

CHUDENG SHUXUE YANJIU

HIT

数学·统计学系列

# 初等数学研究(II) 上

甘志国 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS




数学·统计学系列

# 初等数学研究（Ⅱ）上

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 提 要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书11章内容(集合与逻辑,函数与方程,数列,三角,平面向量,不等式,平面解析几何,立体(平面)几何,排列、组合与二项式定理,概率与统计,极限与导数)、数系、教材研究、数学竞赛、数学问题、数学应用、数学试题、数学史话、趣味数学、其他等22个部分的初等数学研究方面的论文387篇(其中189篇以前曾发表过,有些文章是由发表的多篇文章综合成的),每篇文章各自独立成文。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可供中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

初等数学研究.2.上/甘志国著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.4

ISBN 978-7-5603-2820-1

Ⅰ.初… Ⅱ.甘… Ⅲ.初等数学-研究 Ⅳ.O12

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第032358号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾 翟新烨
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张75 字数1428千字
版 次 2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2820-1
定 价 118.00元(上,下)

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

# 序　　言

一本凝聚了甘志国先生二十多年心血与智慧的《初等数学研究(Ⅱ)》由哈尔滨工业大学出版社出版发行了.甘先生是一位有志于初等数学研究的学者,其《初等数学研究(Ⅰ)》是一部近700页,83万字的巨著,书中收录他的初等数学论文206篇,我研读过其中一部分,认为很有参考价值.例如,"正整数的一个奇异性质","否定一个定理的逆命题"等多篇文章对我思考有关问题很有启发,我进而与甘先生合作写了几篇文章.现在甘先生出版的《初等数学研究(Ⅱ)》,又是一部规模很大的巨著:近400篇文章,共100余万字.可见甘先生之勤奋!据哈工大出版社该书的策划编辑刘培杰先生说:甘先生虽贫穷过、患过病,但"嗜数如命"!由此可知甘先生是一位难得的数学奇人.虽说是奇人,但他并不是天生的"与众不同",而是人人都可以达到的——只要你有决心,有毅力.这就是我们常说的"天下无难事,只要有心人".甘先生还在一篇对自己的简介中说:"时间是挤出来的,正如鲁迅先生所说,我是把别人喝咖啡的时间也用来进行初等数学研究.我很少与家人一起逛街、散步,因为我总是嫌他们走路太慢."这段真言对人人都有很好的教育和启发作用.

当今时代是一个信息爆炸的时代，人们要学习的知识，也许倾毕生精力学到的也只能是沧海一粟.因此，只有坚持不断的学习，掌握汲取知识的方法，不断提高学习新知识的能力，才能紧跟时代的步伐，走向成功的人生.在这方面，甘先生为我们做出了榜样.甘先生对数学的酷爱与执着感染了每一位与他交流和讨论数学问题的人，他对数学问题敏锐的洞察力和解决问题的探索精神让许多同行和学者发自内心的钦佩.虽说我曾是北京师范大学数学学院的博导、教授，在代数、数理逻辑及其应用方面也略有造诣，与我交流和讨论数学问题的国内外学者也不少，但到了老年，有幸能常与远在鄂西北的这位年轻高中数学老师书信来往讨论问题、交流心得是我最快乐的事之一.他的钻研精神和成果让我惊叹不已.我认真审读过甘先生的《初等数学研究(Ⅱ)》中一部分有代表性的文章，认为内容翔实，涉及初等数学研究的很多方面，并且涵盖了高中数学的一些重要方面:论证严谨，结论新颖，科学性强，比如该书中的文章“在无穷等比数列中寻找等差数列”给出的内容“(1)在一个等差数列中能选出等比子列的充要条件;(2)在一个等比数列中存在等差子列的充要条件”.对于数学工作者，特别是高中数学教师很有参考价值;该书中关于“数学史话”、“趣味数学”、“新题征展”方面的文章还为本书增添了浓浓的趣味性.甘先生的《初等数学研究(Ⅱ)》一书系统地再现了他二十多年来的科研历程及成果.研读这本书将会使我们获得一个聪慧的头脑，让我们在知识的海洋里遨游;使我们获得一些新的研究模式，让我们在探索世界的奥妙中去不断获取新知识，更重要的是获得一种精神和力量，利用这种精神和力量可以去解决我们所面对的各种难题.

我还要建议甘先生能再挤出时间读一点数理逻辑中的“模型论”，特别是其中的“紧致性定理”，这对甘先生将来深钻数论问题是有好处的.愿甘先生以欧拉(Euler,1707—1783)等大批数学家为榜样，一如既往的勤奋钻研初等数学，取得更加辉煌的研究成果！也郑重推荐各位初等数学爱好者能抽出时间来研读《初等数学研究(Ⅱ)》这本大作，尽早解决书中所提出的一些新问题.这样，你也会成为一名甘志国式的初等数学爱好者！

王世强

2009年1月1日

于北京师范大学

# 目　录

## 整数性质


余数另外的意义 …… 3
已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数 …… 4
一类既约分数的和 …… 7
几类双色完全平方数 …… 8
缩小变换黑洞 …… 10
浅探伪素数 …… 16
空间数共 17 个 …… 21
回归数 …… 24
2007 年高考湖北卷的--大特色——整数性质 …… 26
二阶递归数列的一条同余性质 …… 30
已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形 …… 35
再谈海伦三角形 …… 39
浅探 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 为完全平方数的条件 …… 43
浅探亲和数 …… 48
平方 $m$ 重连整数 …… 52
恒为整数的 $l$ 次幂的有理系数整值多项式研究 …… 60
$a^n-1$ 的标准分解式中诸素因数的指数 …… 64
$\sigma(n)$的一条性质及其应用——研究完全数与亲和数的奇偶性 …… 66
素数与组合数的整除性质 …… 69
$\prod_{i=1}^{n}(x+i)$的展开式系数的性质 …… 74
两类 $n$ 元排列数对模 $n$ 的同余性质 …… 80
两个和式的求法及整除性质 …… 86
定义 $R(N)$的推广 …… 92
素数列的研究 …… 93
威尔逊素数定理的简化及素数的一条性质 …… 94

相似数的整除 …… 96
关于“$p|x^3+y^3$”的一个定理 …… 97
已知一边的勾股数的求法及组数 …… 99
whc 165 及回归数问题的解决情况 …… 101
半缩小(半扩大)变换的黑洞 …… 104
关于居加猜想的一个结论 …… 108
对两道习题的研究 …… 109
2 关于 1 093,3 511 的基本重数均为 2 …… 111
印度奇妙数组的推广 …… 113

## 不定方程

有理数集上不存在四连贯的二次多项式 …… 117
任意正整数的全部平方差分拆及其组数 …… 125
正整数的互素平方差分拆 …… 131
整边正三角形的二剖分 …… 135
又一广义勾股数组 …… 139
所有形如 $a^2=b+c$ 的勾股数组$(a,b,c)$ …… 140
二次不定方程有理解的结构与整数解 …… 141
用因式分解法解缺平方项的二元二次不定方程 …… 162
一类不定方程有正整数解的充要条件 …… 165
费马猜想研究 …… 168
不定方程 $2x^2+y^2=z^2$ 与 $x^2+y^2=2z^2$ 中有未知数为平方数的正整数解研究 …… 174
一类不定方程的正整数解 …… 183
由 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 所想到的 …… 184
这样证明很简洁 …… 185
不定方程 $x^2-y^2=pz^2$ 的全部整数解 …… 188
含有 60°(或 120°)角的整边三角形三边的求法 …… 192
一类不定方程的解法 …… 195
不定方程 $x^3+2y^3-4z^3=0$ 没有正整数解的再推广 …… 199
对《新题征展(103)》第 5 题的研究 …… 201

## 集合与逻辑


数学逻辑奇妙无穷 …… 205
生活中的条件命题及逆否命题 …… 207


## 函数与方程


关于 $n$ 连贯多项式的几个结论 …… 211
一些连贯、三连贯的二次多项式 …… 215
整数集上四连贯 $n$ 次多项式的构造 …… 216
用[$x$]的一条性质解题 …… 219
两道例题的简解 …… 221
"长三针"问题的简洁解法 …… 222
谈谈周期函数 …… 224
用素数判定多项式不可约 …… 227
函数 $f(x)=\log_x a$ 的单调性 …… 231
一类问题的统一解法 …… 233
一个定理的再推广 …… 234
解抽象函数问题举例 …… 236
一个问题的解决 …… 241
形似质异的函数题 …… 243
幂、指函数图象交点个数的完整结论 …… 247
一元二次方程根的分布 …… 251
谈凸函数 …… 252
订正一道题的答案及简解两道题 …… 254
对数公式大汇集及证明 …… 256
更正一道选择题的答案 …… 258
纠正一个流行错误——应尽早引入"确界"的概念 …… 260
例谈构造对偶式解题 …… 262
例谈函数问题的解法 …… 266
浅探过一点作 $n$ 次曲线切线的条数问题 …… 291
实系数一元三次方程的求根公式 …… 295
数学问题 1703 的一般情形 …… 302
也谈一类绝对值函数的最值问题——兼谈一个猜想的判明 …… 303

一道应用题的简解及推广 …… 309
一道周期函数例题的一般情形 …… 312
增函数与其反函数图象的交点在直线 $y=x$ 上 …… 314
2008 年高考试题(上海理科卷)填空压轴题的另解 …… 315
两道 2008 年高考题的简解 …… 317
数学问题 1750 的伴随问题 …… 319
用一个恒等式解一类无理方程 …… 324
也探函数 $u=\frac{b\sin\theta+d}{a\cos\theta+c}$ 的值域 …… 326
2006 年高考(湖北卷)选择压轴题欣赏 …… 331
对数函数的一条性质及其运用 …… 333
用凸函数的性质探求一类条件最值 …… 335
一种简便快捷的求反函数的方法 …… 341
用“同增异减”求复合函数的单调区间应注意什么 …… 345
一类多元函数的值域——对四个猜想的研究 …… 347
二次分式函数值域的两种求法 …… 353

## 数　列

$\{R(n^m)\}$ 的周期性 …… 359
两类递推数列通项的求法 …… 360
两个和式的求法 …… 362
“分班数阵”的通项 …… 364
古代数列趣题二则 …… 366
用验证法求数列通项两例 …… 367
从已知的等差数列中选出一些项重新组成等差(比)数列个数的问题 …… 369
一道课本例题结论的推广 …… 375
国家公务员考试中的数列趣题 …… 376
等差(比)数列的一条性质 …… 380
《类比思维的一种应用》一文的补充 …… 382
巧求一类既约分数的和 …… 386
是巧合？还是必然！ …… 388
数列求和 …… 391
例谈如何求数列项的最值 …… 397

由一道课本数列题编拟的趣题 …… 399
在无穷等比数列中寻找等差数列 …… 401
应对高考需要研究性备考——兼评 2008 年高考陕西卷(理科)压轴题 …… 406
2008 年高考广东卷(理科)压轴题的简解 …… 412
2008 年高考试题(四川理科卷)第 20 题的另解 …… 414
再谈用验证法求数列通项 …… 416
已知正整数的全部正整数等差分拆 …… 418
周期数列$\{A_n = a^n$ 的末 $k$ 位数$\}$的最小正周期 …… 424
两类取整数列的求和公式 …… 431
等差数列与等比数列的一条对偶性质 …… 436
谈一类数列的求和 …… 438
对两类递推数列的研究 …… 440
对一道联考题的研究 …… 442
你熟悉公式 $a_n = a_m q^{n-m}(n \geq m)$吗? …… 444

## 三　角

一道例题结论的推广 …… 449
关于角格点一些猜想的证明 …… 450
用等距平行线把平面封闭图形涂成阴影的线段条数及总长度 …… 453
"余弦定理在四边形的一个推广"的一个注释 …… 457
再探三角形的一种边角关系 …… 458
例谈三角迭加公式的运用 …… 460
两点不易觉察且流传很广的错误 …… 462
"奇变偶不变,符号看象限"的又一用途 …… 465
实验班学生敢于探索的一道三角题 …… 466
谈谈教科书上的一道练习题 …… 469
谈谈课本上的两个公式 …… 472
先把未知角表示成已知角的和(差)后再解题 …… 474
已知 $\sin\alpha\cos\beta$ 的值巧求 $\cos\alpha\sin\beta$ 的范围 …… 476
已知扇形的内接矩形面积的最大值 …… 478
用公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$的变式解题 …… 481
余弦定理的妙用 …… 483

2008 年高考试题全国卷(II)理科压轴题的简解 …………………………… 484
一类三角问题的完整解答 …………………………………………………… 486
浅探方程 sin $x = ax$ 解的个数…………………………………………… 489
用三角形面积公式证明 $S_{\alpha\pm\beta}$ ………………………………………… 492
对一道三角例题的再研究 …………………………………………………… 493
几个三角恒等式 ……………………………………………………………… 496
圆心四边形的性质及一个三角恒等式 ……………………………………… 499

## 平面向量

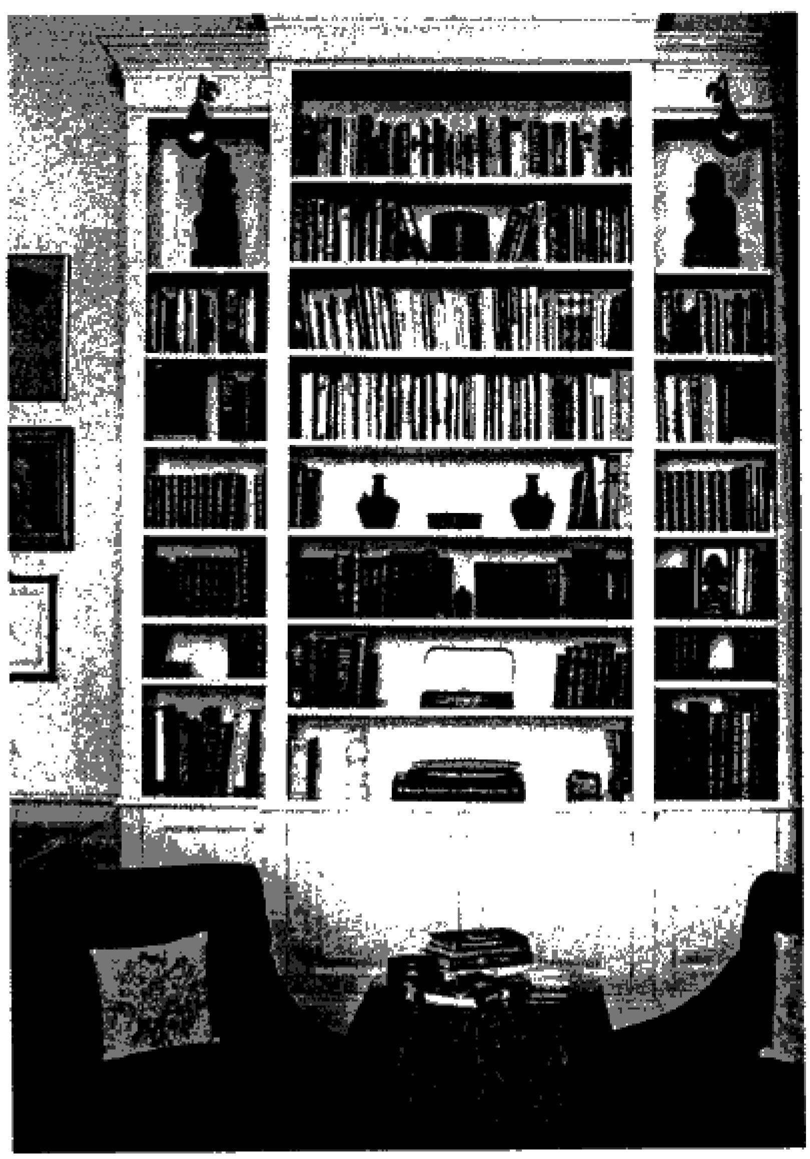
例谈“定比分点坐标公式引出的结论”的运用 ……………………………… 503
建议 …………………………………………………………………………… 506
初学向量时应注意的问题 …………………………………………………… 507
对向量共线基本定理的挖掘 ………………………………………………… 509
纠正《向量题新证》一文中的一点瑕疵 …………………………………… 510
例谈向量和三角形的“四心”问题 ………………………………………… 512
巧用单位向量求三角形的角平分线 ………………………………………… 516

## 不等式

一元高次不等式的解决口诀 ………………………………………………… 519
整体求,莫拆开 ……………………………………………………………… 520
解题宜简 ……………………………………………………………………… 522
凸函数的一个性质 …………………………………………………………… 525
一道复习参考题的多种证法 ………………………………………………… 526
一个不等式的简证及推广 …………………………………………………… 528
由教科书中的三道小题所想到的 …………………………………………… 530
浅探加权平均三角形各角的取值范围 ……………………………………… 532
这种证明仍有瑕疵 …………………………………………………………… 538
介绍几道 2008 年自主招生数学试题 ……………………………………… 541
一个不等式问题的初等解决 ………………………………………………… 547
一个不等式的推广 …………………………………………………………… 550
简证两个不等式 ……………………………………………………………… 553
一个不等式的简证 …………………………………………………………… 555
对一道好题的剖析 …………………………………………………………… 557

再谈一个最值问题的平方解法 …… 558
不等式$(a+b)^2\geqslant 4ab$的另证及应用 …… 559
用二元均值不等式证 $n$ 元均值不等式 …… 561
关于斜抛运动的另几个最值 …… 563
也谈证明不等式 …… 566
一道求取值范围题的正确解法 …… 568
谈谈加权平均值不等式 …… 570
排序不等式的数学归纳法证明 …… 575
对一道中考题的深入研究——平行四边形各顶点的斯坦纳最小树 …… 577
一个不等式的多方位推广 …… 584
对一个不等式推广的再认识 …… 585
权方和不等式的推广及其简证 …… 587
对三个猜想的研究 …… 592
不要冷落了“简化” …… 598
对两个猜想的否定及研究 …… 600
一种去掉绝对值符号的方法 …… 602
两个不等式的推广 …… 605
不等式$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$的六种证法 …… 607
简解两道不等式题 …… 609

# 整数性质



# 余数另外的意义

设 $N,t$ 是正整数，$t$ 除 $N$ 的非负最小余数是由 $t$ 和 $N$ 唯一确定的，记作 $R_t(N)$.

显然 $0 \leqslant R_t(N) \leqslant t-1, N \equiv R_t(N) \pmod t$.

下面的定理给出了余数 $R_t(N)$ 另外的意义.

**定理** (1) 当 $1 \leqslant R_t(N) \leqslant t-1$(即 $t \nmid N$) 时，把 $N$ 化为 $t+1$ 进制数 $\alpha$，在 $t+1$ 进制内连续求 $\alpha$ 的各位数字之和：把 $\alpha$ 的各位数字相加得 $\alpha_1$，再把 $\alpha_1$ 的各位数字相加得 $\alpha_2$，… 直至得到一位数 $\alpha_k(1 \leqslant \alpha_k \leqslant t)$ 止，则 $R_t(N) = \alpha_k$.

(2) 当 $R_t(N) = 0$(即 $t \mid N$) 时，把 $N$ 化为 $t+1$ 进制数 $\alpha$，设在 $t+1$ 进制内连续求 $\alpha$ 的各位数字之和的结果是 $\alpha_k$，则 $\alpha_k = t$.

**证明** (1) 设 $\alpha = a_0(t+1)^n + \cdots + a_{n-1}(t+1) + a_n$(整数 $n \geqslant 0, 0 \leqslant a_i \leqslant t, i = 0,1,\cdots,n, a_0 \neq 0$).

则 $\alpha_1 = a_0 + \cdots + a_{n-1} + a_n$，所以 $\alpha \equiv \alpha_1 \pmod t$.

同理，$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \cdots \equiv \alpha_k \pmod t$，所以 $\alpha \equiv \alpha_k \pmod t$.

又 $N = \alpha, N \equiv R_t(N) \pmod t$，所以 $R_t(N) \equiv \alpha_k \pmod t$.

又 $1 \leqslant R_t(N) \leqslant t-1, 1 \leqslant \alpha_k \leqslant t$，所以 $R_t(N) = \alpha_k$.

(2) 因为 $N \equiv t \pmod t, N = \alpha, \alpha \equiv \alpha_k \pmod t$，所以 $\alpha_k \equiv t \pmod t$.

又 $1 \leqslant \alpha_k \leqslant t$，所以 $\alpha_k = t$. 证毕.

由文献[1]中的定义知，连续求正整数 $N$ 的各位数字之和结果是 $R(N)$，再由本文的定理知 $R(N)$ 的另外意义：当 $1 \leqslant R(N) \leqslant 8$ 时，$R(N)$ 是 9 除 $N$ 的余数；当 $R(N) = 9$，9 除 $N$ 的余数是 0.

## 参考文献

[1] 甘志国. $\{R(n^m)\}$ 的周期性[J]. 数学通讯，1994(2):24.

# 已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数

整边直角三角形叫做勾股形,三边互素的勾股形叫做基本勾股形.文献[1]给出了已知一直角边的(基本)勾股形的个数,本文给出已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数,所得结论简洁完整.

**定理1** 勾股 三边均可表为$(2tmn,t(m^2-n^2),t(m^2+n^2))$,其中$t,n,m-n\in \mathbf{N}^*,(m,n)=1,2\nmid m-n$.其内切圆半径$r=tn(m-n)$.

(以上$t=1$时,即基本勾股形的结论)

在定理1中可证,不同的一组$(t,m,n)$的值对应于一个不同的勾股形.所以,有

**定理2** (1)内切圆半径为$r$的勾股形的个数,即使$r=tn(m-n)$的有序数组$(t,n,m-n)$的取法,其中$t,n,m-n\in \mathbf{N}^*,(n,m-n)=1,2\nmid m-n$;

(2)内切圆半径为$r$的基本勾股形的个数,即使$r=n(m-n)$的有序数组$(n,m-n)$的取法,其中$n,m-n\in \mathbf{N}^*,(n,m-n)=1,2\nmid m-n$.

**定理3** (1)内切圆半径为$r=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$是互不相同的奇素数,$\alpha,\alpha_i\in \mathbf{N},i=1,\cdots,k$)的勾股形的个数为$(\alpha+1)(2\alpha+1)\cdots(2\alpha_k+1)$;

(2)内切圆半径为$r$的基本勾股形的个数为$2^k$($k$是$r$的奇素因数的个数).

**证明** (1)由定理2(1),只需证明

使$tn(m-n)=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$的有序数组$(t,n,m-n)$的取法为$(\alpha+1)(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)$种.

可设$t=2^{\alpha'}p_1^{\alpha'_1}\cdots p_k^{\alpha'_k}(\alpha',\alpha'_i\in \mathbf{Z},0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha,0\leqslant\alpha'_i\leqslant\alpha_i,i=1,\cdots,k)$ ①

$$n(m-n)=2^{\alpha-\alpha'}p_1^{\alpha_1-\alpha'_1}\cdots p_k^{\alpha_k-\alpha'_k} \quad ②$$

当$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$都小于$\alpha_i$时,①中$t$的取法为$(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_k$种;对于每一种取法$t$,因为②中$\alpha-\alpha'_i\in \mathbf{N}(i=1,\cdots,k)$,所以由②可得奇数$m-n$的取法为$2^k$种;对于每一种取法$m-n$,$n$有1种取法.所以此时$(t,n,m-n)$有$2^k(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_k$种取法.

当$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$中有且只有$\alpha_k=\alpha'_k$时,①中$\alpha'_i<\alpha_i(i=1,\cdots,k-1)$,所以$t$有$(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$种取法;②中$\alpha-\alpha'_i\in \mathbf{N}^*(i=1,\cdots,k-1)$,$\alpha_k-\alpha'_k=0$,所以对于每一种取法$t$,奇数$m-n$有$2^{k-1}$种取法;对于每一种取

法 $m-n,n$ 有1种取法.所以此时 $(k,n,m-n)$ 有 $2^{k-1}(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$ 种取法.

从而可得,$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$ 中有且只有一个 $\alpha'_i=\alpha_i$ 时,$(t,n,m-n)$ 共有 $2^{k-1}(\alpha+1)\sum\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$ 种取法(约定,本文中的求和"$\sum$"轮遍 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$).同理有

$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$ 中有且只有两个 $\alpha'_i=\alpha_i$ 时,$(t,n,m-n)$ 共有 $2^{k-2}(\alpha+1)\sum\alpha_1\cdots\alpha_{k-2}$ 种取法.

$\vdots$

$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$ 中有且只有 $k-1$ 个 $\alpha'_i=\alpha_i$ 时,$(t,n,m-n)$ 共有 $2(\alpha+1)\sum\alpha_1$ 种取法.

$\alpha'_i=\alpha_i(i=1,\cdots,k)$ 时,显然 $(t,n,m-n)$ 有1种取法.

所以有序数组 $(t,n,m-n)$ 的全部取法为

$$2^k(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_k+2^{k-1}(\alpha+1)\sum\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}+\cdots+$$
$$2(\alpha+1)\sum\alpha_1+1=(\alpha+1)(2\alpha_1+1)\cdots$$

$(2\alpha_k+1)$ 种(展开此式右边可证此式).

(2) 由定理2(2)来证就不难了.

**推论** 对于任意的正整数 $r$,总存在内切圆半径为 $r$ 的基本勾股形.

再给出几处文献的标记.

1.文献[1]中三个繁杂和式的结果:

$$M=M_1=\frac{1}{2}[(2k_1+1)\cdots(2k_s+1)-1] \quad ④$$

$$M_2=\frac{1}{2}[(2k+1)(2k_1+1)\cdots(2k_s+1)-1] \quad ⑤$$

其中 $M,M_1,M_2$ 见文献[1]的④,⑪,⑫.只要展开上面式④的右端,即可证得式④,式⑤不易直接看出,但可由文献[2]得到.

2.由文献[1]及[2]可得

(1) 一直角边为 $a=2^\alpha p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$ 是互不相同的奇素数,$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$)的勾股形的个数为 $\frac{1}{2}[(2\alpha-1)(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)-1]$;

(2) 一直角边为 $a$($2\nmid a$ 或 $4\mid a$)的基本勾股形的个数为 $2^{k-1}$($k$ 是 $a$ 的素因数的个数,$k\geqslant1$);一直角边为 $a$($2\parallel a$)的基本勾股形不存在.

此结论与定理3相似.

3.求出内切圆半径为 $r$($r$ 是任意正整数)的海伦三角形的个数是极为困难的(见文献[3]末),但本文定理3已给出内切圆半径为 $r$ 的直角海伦三角形(即

勾股形)、本原直角海伦三角形(即基本勾股形) 的个数.

## 参考文献

[1] 张文忠.一直角边为定值的勾股形的个数[J].数学通讯,1996(7):25-27.
[2] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.
[3] 曾丕刚.内切圆半径为整数的海伦三角形[J].数学通讯,1996(4):27-29.

# 一类既约分数的和

本文给出 $m$ 与 $n$ 之间所有分母为 $a$ 的既约分数的和 $S_a$(本文中 $m,n,a$ 是已知的正整数,$m<n,a\geqslant 2$).

**引理**[1] 欧拉函数 $\varphi(a)$ 表示集合 $A_a=\{$小于 $a$ 的正整数中与 $a$ 互素的数$\}$ 的元素个数.若 $a=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$),则 $\varphi(a)=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$,$A_a$ 的元素和为$\frac{1}{2}a\varphi(a)$.

**定理** $S_a=\frac{1}{2}(n^2-m^2)\varphi(a)$.

**证明** $m$ 与 $n$ 之间分母为 $a$ 的既约分数均可表为$\frac{ak+i}{a}$,其中 $k=m,m+1,\cdots,n-1,i\in A_a$.由引理,得

$$S_a=\sum_{i\in A_a}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{ak+i}{a}=\sum_{i\in A_a}\sum_{k=m}^{n-1}k+\sum_{i\in A_a}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{i}{a}=$$
$$\sum_{i\in A_a}\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)+\sum_{i\in A_a}\frac{i}{a}(n-m)=$$
$$\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)\varphi(a)+\frac{n-m}{a}\cdot\frac{1}{2}a\varphi(a)=$$
$$\frac{1}{2}(n^2-m^2)\varphi(a)$$

**推论** 用 $G_a(H_a)$ 表示 $m$ 与 $n$ 之间所有分母为 $a$ 的既约分数的整数部分(小数部分)的和,则

$$G_a=\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)\varphi(a)$$
$$H_a=\frac{1}{2}(n-m)\varphi(a)$$

## 参考文献

[1] 单墫.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.

# 几类双色完全平方数

本刊文献[1]给出了双色完全平方数的定义,并给出了一个构造一类双色完全平方数的定理,本文将给出双色完全平方数的更明确的定义,再给出一些构造双色完全平方数的定理.

**定义** 同时满足下列四个条件的数 $10^n a+b(n\in\mathbf{N}^*)$,称为 $2n$ 位双色完全平方数:

(1) $a\in\mathbf{N}^*,10^{n-1}\leqslant a<10^n$;

(2) $b\in\mathbf{Z},0\leqslant b<10^n$;

(3) $10^n a+b=u^2,u\in\mathbf{N}^*$;

(4) $a+b=v^2,v\in\mathbf{N}^*$.

二位双色完全平方数只有两个:36,81;四位双色完全平方数只有 17 个:$39^2,40^2,42^2,49^2,50^2,57^2,60^2,70^2,75^2,78^2,80^2,86^2,87^2,88^2,89^2,90^2,98^2$.

**定理 1** $n,x\in\mathbf{N}^*,10^n-\sqrt{2}\cdot 10^{\frac{n}{2}}<x\leqslant 10^n-10^{\frac{n}{2}}$,则 $x^2$ 是 $2n$ 位双色完全平方数.

**证明** 令 $a=2x-10^n+1,b=(10^n-x)^2-10^n$,由题设及定义可证 $x^2=10^n a+b$ 是 $2n$ 位双色完全平方数.(详见文献[1])

由定理 1,得 $6^2$ 是二位双色完全平方数;

$x^2(86\leqslant x\leqslant 90)$ 是四位双色完全平方数;

$x^2(956\leqslant x\leqslant 968)$ 是六位双色完全平方数;

$x^2(9\ 859\leqslant x\leqslant 9\ 900)$ 是八位双色完全平方数.

**定理 2** 若 $n,x\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 4,\frac{1}{9}(10^n-10^{\frac{n+1}{2}})<x\leqslant\frac{1}{9}(10^n-10^{\frac{n}{2}})$,则 $(3x)^2$ 是 $2n$ 位双色完全平方数.

**证明** 令 $a=2x-\frac{1}{9}(10^n-1),b=\frac{1}{9}[(10^n-9x)^2-10^n]$,由此以及定义可证 $(3x)^2=10^n a+b$ 是 $2n$ 位双色完全平方数 $\left(a+b=\left[\frac{1}{3}(10^n-1)-3x\right]^2\right)$.

由定理 2,得 $(3x)^2(1\ 076\leqslant x\leqslant 1\ 100)$ 是八位双色完全平方数.

**定理 3** 若 $n,x\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2,\frac{1}{9}(2\cdot 10^n-\sqrt{13}\cdot 10^{\frac{n}{2}})<x\leqslant\frac{2}{9}(10^n-$

$10^{\frac{n}{2}}$),则$(c)^2$是$2n$位双色完全平方数.

证明 令$a = 4\left[x - \frac{1}{9}(10^n - 1)\right]$,$b = \frac{1}{9}[(2 \cdot 10^n - 9x)^2 - 4 \cdot 10^n]$,由定义可证 $(3x)^2 = 10^n a + b$ 是 $2n$ 位双色完全平方数$\left(a + b = \left[\frac{2}{3}(10^n - 1) - 3x\right]^2\right)$.

由定理3,得

$(3x)^2$ ($x = 19,20$)是四位双色完全平方数;

$(3x)^2$ ($210 \leqslant x \leqslant 215$)是六位双色完全平方数;

$(3x)^2$ ($2\ 183 \leqslant x \leqslant 2\ 200$)是八位双色完全平方数.

## 参考文献

[1] 郑成生.双色完全平方数的构造[J].中学数学月刊,1997(9):39-40.

# 缩小变换黑洞

数学黑洞问题近年来引起了人们的广泛兴趣.它与数论一样,有趣但十分困难.本文主要讨论缩小变换黑洞的有关问题.

## 1 数学黑洞的有关概念及其记号

设集合 $M$ 的有限或无限个元素可以按照某种规则排序,设 $M = \{x_i \mid i = 1,\cdots,n,\cdots\}$,其中 $x_1 < \cdots < x_n < \cdots$(这里"<"仅表示排序后的先后关系),$F$ 是关于 $M$ 的变换,可用 $x_i \to x_j$ 表示 $F(x_i) = x_j$.

对 $x_i$ 重复作变换 $F$:

$$x_i = F^0(x_i) \to F(x_i) \to \cdots \to F^{s-1}(x_i) \to$$
$$F^s(x_i) \to \cdots \to F^{s+n}(x_i) \to \cdots$$

显然有 $\forall j \in \mathbf{N}, F^j(x_i) \in M$.

若 $F^{s+n}(x_i) = F^s(x_i)$,$s$ 是满足此的最小自然数,$n$ 是满足此的最小正整数(此时,把 $F^s(x_i) \to \cdots \to F^{s+n-1}(x_i)$ 叫做由 $x_i$ 生成的关于 $M$ 的变换 $F$ 的第一个周期节),则 $F^s(x_i) \to \cdots \to F^{s+n-1}(x_i)$ 或 $F^{s+1}(x_i) \to \cdots \to F^{s+n-1}(x_i) \to F^s(x_i)$ 等(共 $n$ 种书写形式)都叫做 $F$ 的由 $x_i$ 生成的黑洞(把这 $n$ 种书写形式看成同一个黑洞),当然也可叫做 $F$ 的由 $F^j(x_j)(j = 0,1,\cdots,s+n-1)$ 生成的黑洞(因为对 $F^j(x_i)$ 重复作变换 $F$ 均可生成以上周期节),$F^s(x_i),\cdots,F^{s+n-1}(x_i)$ 称为 $F$ 的一组黑洞数.$F^0(x_i),\cdots,F^{s-1}(x_i)$ 的个数 $s$ 叫做 $x_i$ 到 $F$ 的黑洞的路程,简称黑程,记作 $h(x_i) = s$.

设由 $M$ 中的元素 $x_{k_1}, x_{k_2},\cdots$,均可生成上述黑洞,又设 $x_{k_1} < x_{k_2} < \cdots$,则把这个黑洞叫做 $F$ 的第 $k_1$ 个黑洞,记作 $D_{k_1} = F^s x_i \to \cdots \to F^{s+n-1}(x_i)$,$F^s(x_i),\cdots,F^{s+n-1}(x_i)$ 的个数 $n$ 叫做 $F$ 的第 $k_1$ 个黑洞 $D_{k_1}$ 的周长.

关于 $M$ 的变换 $F$ 的所有黑洞的集合记作 $FM$,$FM$ 的元素个数用 $H$ 表示,有 $FM = \{D_1,\cdots,D_H\}$.

研究关于 $M$ 的变换 $F$ 的黑洞,就是要研究黑洞的存在性,求出黑洞的个数 $H$,求出集合 $FM$,每个黑洞 $D_i(i = 1,\cdots,H)$ 分别由 $M$ 的哪些元素生成,每个元素的黑程是多少.

## 2 关于缩小变换黑洞的几个结论

**定理 1** 设 $F$ 是关于 $M$ 的变换，$x \in M$，则由 $x$ 可生成 $F$ 的一个黑洞的充要条件是：存在仅与 $x$ 有关的常数 $a(x)$（与 $j$ 无关），$\forall j \in \mathbf{N}, F^j(x) \leqslant a(x)$.

**证明** 必要性 对 $x$ 重复作变换 $F$：

$$x = F^0(x) \to F(x) \to \cdots \to F^{s-1}(x) \to$$
$$F^s(x) \to \cdots \to F^{s+n}(x) \to \cdots$$

因为由 $x$ 可生成黑洞，所以存在最小的自然数 $s$ 和最小的正整数 $n$，使 $F^{s+n}(x) = F^s(x)$，得 $F^j(x) \leqslant \max\{F^0(x), \cdots, F^{s+n-1}(x)\} = a(x)$（$\forall j \in \mathbf{N}$（自然数集（含 0））)．

因为由 $x$ 可生成黑洞，所以存在最小的自然数 $s$ 和最小的正整数 $n$，使 $F^{s+n}(x) = F^s(x)$，得 $F^j(x) \leqslant \max\{F^0(x), \cdots, F^{s+n-1}(x)\} = a(x)$（$\forall j \in \mathbf{N}$）.

充分性 因为 $\forall j \in \mathbf{N}, F^j(x) \leqslant a(x)$，所以对 $x$ 重复作变换 $F$：$x \to F(x) \to F^2(x) \to \cdots$. 变换可无限次进行，而以上各数只能取有限个值，所以存在最小的自然数 $s$ 和最小的正整数 $n$，使 $F^{s+n}(x) = F^s(x)$，此时 $F^s(x) \to \cdots \to F^{s+n-1}(x)$ 就是由 $x$ 生成的 $F$ 的一个黑洞.

**定理 2** 当 $M$ 是有限集时，则 $\forall x \in M$，由 $x$ 可生成关于 $M$ 的变换 $F$ 的一个黑洞.

**证明** 同定理 1 充分性的证明.

**定义 1** $M = \{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}(x_1 < \cdots < x_n < \cdots)$，$M$ 的有限子集 $M_0 = \{x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant t, j \in \mathbf{N}^*\}$，$F$ 是关于 $M$ 的变换，$\forall x \in \complement_M M_0$.

(1) 若 $F(x) < x$，称 $F$ 是关于 $M$ 的缩小变换；

(2) 若 $F(x) \leqslant x$，称 $F$ 是关于 $M$ 的半缩小变换；

(3) 若 $F(x) > x$，称 $F$ 是关于 $M$ 的扩大变换；

(4) 若 $F(x) \geqslant x$，称 $F$ 是关于 $M$ 的半扩大变换.

**定理 3** 若集合 $M, M_0$ 同定义 1，$F$ 是关于 $M$ 的缩小变换，则 $\forall x_i \in M$，均存在自然数 $l$，使 $F^l(x_i) \in M_0$.

**证明** 先用数学归纳法证明：

若 $F^j(x_i)(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ 均不属于 $M_0$，则 $F^n(x_i) \leqslant x_{i-n}$.

当 $n = 1$ 时，$F^0(x_i) = x_i \notin M_0$，则 $x \in \complement_M M_0$，由 $F(x_i) < x_i$，即 $F(x_i) \leqslant x_{i-1}$，得 $n = 1$ 时成立.

假设 $n$ 时成立. 设 $F^n(x_i) = x_{i-n-n_0} \notin M_0 (n_0 \in \mathbf{N})$，$F^{n+1}(x_i) = F(F^n(x_i)) = F(x_{i-n-n_0}) < x_{i-n-n_0}$，所以 $F^{n+1}(x_i) \leqslant x_{i-n-n_0-1} \leqslant x_{i-n-1}$，得 $n+1$ 时成立. 因而要证结论成立.

因为存在自然数 $q$,使 $1 \leqslant i - qt \leqslant t$,所以由以上结论可得,存在自然数 $l \leqslant qt$,使 $F^l(x_i) \in M_0$.

**定理 4** 若集合 $M, M_0$ 同定义 1,$F$ 是关于 $M$ 的缩小变换,则

(1) $\forall x \in M$,由 $x$ 可生成 $F$ 的一个黑洞;

(2) $FM = \{F$ 的由 $M_0$ 元素生成的黑洞$\}$;

(3) $FM$ 是有限集,且 $FM \neq \varnothing$.

**证明** (1) 对 $x$ 重复作变换 $F$:

$$x \to \cdots b \to \cdots c \to \cdots$$

由定理 2,可使 $b \in M_0, c \in M_0$. 把 $b \to c$ 看成关于 $M_0$ 的变换 $F'$($F'$ 由 $F$ 复合而成),变换 $F'$ 可无限次进行:$b \to c \to \cdots$. 因为 $M_0$ 是有限集合,由定理 1 知,由 $b$ 可生成关于 $M_0$ 的变换 $F'$ 的一个黑洞 $b_1 \to b_2 \to \cdots$,得由 $x$ 可生成关于 $M$ 的变换 $F$ 的一个黑洞 $b_1 \to \cdots \to b_2 \to \cdots$.

(2) 只证 $FM \subseteq \{F$ 的由 $M_0$ 的元素生成的黑洞$\}$.

对 $x$ 重复作变换 $F: x \to \cdots \to b \to \cdots$,由定理 2,可使 $b \in M_0$,所以由 $x$ 生成的黑洞就是由 $M_0$ 的某个元素 $b$ 生成的黑洞,即要证包含关系成立.

(3) 由(2),(1) 可得.

**定理 5** $F$ 是关于 $M$($M$ 同定义 1) 的变换,若 $x \in M$,由 $x$ 能生成 $F$ 的一个黑洞,则存在自然数 $s$,使 $F^s(x) \geqslant F^{s+1}(x)$.(可用反证法证明)

由定理 5,得

**定理 6** 若集合 $M, M_0$ 同定义 1,$F$ 是关于 $M$ 的扩大变换,则

(1) $\forall x \in \complement_M M_0$,由 $x$ 不能生成 $F$ 的黑洞;

(2) $FM = \{F$ 的由 $M_0$ 的元素生成的黑洞$\}$;

(3) $FM$ 为有限集(包括空集).

## 3 几个缩小变换黑洞的例子

### 3.1 $CS_k$ 变换黑洞

**定义 2** $x = \overline{a_1 \cdots a_n}(a_1 \neq 0) \in \mathbf{N}^*$,$k$ 是已知的正整数,$CS_k(x) = a_1^k + \cdots + a_n^k$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的一个变换,这种变换叫做 $CS_k$ 变换,也叫做正整数各位数字 $k$ 次幂之和变换.

**定理 7** 对任意的已知正整数 $k$,存在仅与 $k$ 有关的常数正整数 $m_0$,使 $10^{m_0} - m_0 > k + 1$,设仅与 $k$ 有关的常数 $n_0 = m_0 + k + 1$,则 $9^k n_0 < 10^{n_0 - 1}$.

**证明** 因为 $10^{m_0} - m_0 > k + 1$,所以 $n_0 = m_0 + k + 1 < 10^{m_0}$,$9^k n_0 < 10^k \cdot 10^{m_0} = 10^{n_0 - 1}$.

**定理 8** 若 $k$ 是已知的正整数，$n_0$ 是仅与 $k$ 有关的正整数常数，$9^k n_0 < 10^{n_0-1}$（由定理 7 知，这样的 $n_0$ 存在），则当 $n \geqslant n_0, n \in \mathbf{N}^*$ 时，$9^k n < 10^{n-1}$.

**证明** 对 $n$ 用数学归纳法.

已知 $n = n_0$ 时成立.

假设 $n = m$ 时成立，$9^k m < 10^{m-1}$. 因为 $m \geqslant n_0 \geqslant 1$，所以 $m + 1 < 10m$，$9^k(m+1) < 9^k \cdot 10m < 10^m$，即 $n = m + 1$ 时成立. 因而要证的结论成立.

**定理 9** 若 $k$ 是已知的正整数，则 $CS_k$ 是关于 $\mathbf{N}^*$ 的缩小变换：设 $N_0 = \{$小于 $10^{n_0-1}$ 的正整数$\}$（$n_0$ 满足定理 8），$\forall x \in \complement_{\mathbf{N}^*} N_0$，有 $CS_k(x) < x$.

**证明** 设 $x = \overline{a_1 \cdots a_n}(a_1 \neq 0, n \geqslant n_0)$，由定理 8，得 $9^k n < 10^{n-1}$. 所以 $CS_k(x) = a_1^k + \cdots + a_n^k \leqslant 9^k n < 10^{n-1} \leqslant x$，即 $CS_k(x) < x$.

**定理 10** $N_0$ 同定理 9，把定理 4 中的 $M_0$ 换为 $N_0$，$M$ 换为 $\mathbf{N}^*$，$F$ 换为 $CS_k$ 后所得，结论仍成立.

笔者已验证：

(1) $CS_1\mathbf{N}^* = \{1,2,\cdots,9\}$，因为记 $[i]_n = \{nk + i \mid k = 0,1,\cdots\}(i = 1,2,\cdots,n)$，可证 $CS_1[i]_9 = i$.

(2) $\{1,4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20\} \subseteq CS_2\mathbf{N}^*$.

(3) $\{153;371,407;1,370,55 \to 250 \to 133,160 \to 217 \to 352,919 \to 1\,459,136 \to 244\} \subseteq CS_3\mathbf{N}^*$. 文献[1]说 $CS_3[3]_3 = \{153\}$，这就是自恋数问题，要证此，只需证小于 $10^4$ 以内能被 3 整除的数进行 $CS_3$ 变换均能生成 153（由定理 9，定理 4，把定理 10 中的 $\mathbf{N}^*$ 换成 $[1]_3$，$[2]_3$ 或 $[3]_3$ 均成立，$N_0$ 也作相应改变）.

据文献[2]知，冯跃峰先生已得到定理 10 的有关结论.

### 3.2 $U_k$ 变换黑洞

**定义 3** 设 $x = \overline{a_1 \cdots a_n}(a_1 \neq 0) \in \mathbf{N}^*$，$k$ 是已知的正整数，$a_1, \cdots, a_n$ 中被 $k$ 除余 $0,1,\cdots,k-1$ 的数分别有 $n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}$ 个（有 $n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1} = n$），把 $n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}, n$ 依序排成一个新数 $x_1$（数 $x_1$ 前面的 0 不写），$U_k(x) = x_1$，这种变换叫做 $U_k$ 变换.（如 $U_2(110) = 123$，$U_2(111) = 33$）

**定理 11** 若 $k$ 是已知的正整数，则存在仅与 $k$ 有关的正整数常数 $m_0$，使 $m_0^{k+1} \leqslant 10^{m_0-k-2}$.

**定理 12** 若 $k$ 是已知的正整数，$m_0$ 是仅与 $k$ 有关的正整数常数，$m_0^{k+1} \leqslant 10^{m_0-k-2}$（由定理 11 知 $m_0$ 存在），则当 $n \geqslant m_0$ 时，$n^{k+1} \leqslant 10^{n-k-2}$.

**证明** 对 $n$ 进行数学归纳法. 已知 $n = m_0$ 时成立.

假设 $n = m$ 时成立：$m^{k+1} \leqslant 10^{m-k-2}$. 显然可得：$10m^{k+1} \leqslant 10^{m-k-1}$，$m > k + 2$.

由 $m > k+2$,设 $k+1 = m-r$,其中 $r \in \mathbf{N}^*$.

$$(1+\frac{1}{m})^{k+1} = \frac{(1+\frac{1}{m})^m}{(1+\frac{1}{m})^r} < (1+\frac{1}{m})^m \leqslant \mathrm{e} < 10$$

所以 $$(m+1)^{k+1} < 10m^{k+1} \leqslant 10^{m-k-1}$$

即得 $(m+1)^{k+1} \leqslant 10^{m-k-1}$,即 $n = m+1$ 时成立.所以要证的结论成立.

**定理 13** 若 $k$ 是已知的正整数,则 $U_k$ 是关于 $\mathbf{N}^*$ 的缩小变换:设 $N_0 = \{$小于 $10^{m_0-1}$ 的正整数$\}$($m_0$ 满足定理 12),则 $\forall x \in \complement_{\mathbf{N}^*} N_0$,有 $U_k(x) < x$.

**证明** 设 $x = \overline{a_1 \cdots a_n}(a_1 \neq 0, n \geqslant m_0)$,则 $x \geqslant 10^{n-1}$.因为 $n \geqslant m_0$,由定理12,得 $n^{k+1} \leqslant 10^{n-k-2}$,所以 $(10n)^{k+1} \leqslant 10^{n-1}$,设 $n$ 是 $r$ 位数,$n \geqslant 10^{r-1}$,$10n \geqslant 10^r$,由定义 3,得 $U_k(x)$ 至多是 $r(k+1)$ 位数,所以 $U_k(x) < 10^{r(k+1)} \leqslant (10n)^{k+1} \leqslant 10^{n-1} \leqslant x$,得 $U_k(x) < x$.

**定理 14** 把定理4中的 $M$ 换为 $\mathbf{N}^*$,$M_0$ 换为 $N_0$($N_0$ 同定理 13),所得结论成立.

可以验证 $U_1\mathbf{N}^* = \{22\}$,$U_2\mathbf{N}^* = \{123\}$.

### 3.3 $V_k$ 变换黑洞

**定义 4** 设 $x = \overline{a_1 \cdots a_n}(a_1 \neq 0) \in \mathbf{N}^*$,$a_1, \cdots, a_n$ 中被 $k$ 除余 $0,1,\cdots,k-1$ 的数分别有 $n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}$ 个(有 $n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1} = n$),把 $n, n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}$ 依序排成一个新数 $x_1 = \overline{n, n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}}$,$V_k(x) = x_1$,显然 $V_k$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的一个变换.

**定理 15** 若 $k$ 是已知的正整数,则 $V_k$ 是关于 $\mathbf{N}^*$ 的缩小变换:$N_0$ 同定理13,$\forall x \in \complement_{\mathbf{N}^*} N_0$,有 $V_k(x) < x$.

**定理 16** 把定理 14 中的 $U_k$ 换为 $V_k$,所得结论成立.

可以验证:$V_1\mathbf{N}^* = \{22\}$,$V_2\mathbf{N}^* = \{312\}$.

### 3.4 $T_k$ 变换黑洞

**定义 5** 若 $A$ 表示所有 $n(n=1,2,\cdots)$ 位数码的集合:$A = \{\overline{a_1 \cdots a_n}(a_i = 0,1,\cdots,9; i = 1,\cdots,n) \mid n = 1,2,\cdots\}$,$k$ 是已知的正整数,设 $x = \overline{a_1 \cdots a_n} \in A$,$a_1 \cdots a_n$ 中被 $k$ 除余 $0,\cdots,k-1$ 的数分别有 $n_0,\cdots,n_{k-1}$ 个(有 $n_0 + \cdots + n_{k-1} = n$),新数码 $x_1 = \overline{n_0 n_1 \cdots n_{k-1} n}$(首位数字为0时0照写),则 $T_k(x) = x_1$.显然 $T_k$ 是 $A$ 的一个变换(文献[1]得 $T_2A = \{123\}$,所以 123 叫做西西弗斯数).

**定理 17** 设 $V_k^{s-1}(x)$ 是 $m_s$ 位数,$m_s$ 是 $l_s$ 位数,则 $T_k^s(x) = V_k^s(x)$ 的前 $l_s$ 位数移至后面(如 25 679 的前三位数移至后面,则原数变为 79 256).

**证明** 设 $V_k^{s-1}(x)=\overline{a_1\cdots a_{m_s}}$，$a_1,\cdots,a_{m_s}$ 中被 $k$ 除余 $0,1,\cdots,k-1$ 的数分别为 $n_0,n_1,\cdots,n_{k-1}$ 个，则 $V_k^s(x)=V_k(\overline{a_1\cdots a_{m_s}})=\overline{m_s,n_0,\cdots,n_{k-1}}$.

由定义4,5知，$T_k^{s-1}(x)$ 是 $V_k^{s-1}(x)$ 的各位数字的一个排列，所以 $T_k^s(x)=T_k(T_k^{s-1}(x))=T_k(V_k^{s-1}(x))=T_k(\overline{a_1\cdots a_{m_s}})=\overline{n_0\cdots n_{k-1}m_s}=\overline{m_sn_0\cdots n_{k-1}}$ 的前 $l_s$ 位数移至后面 $=V_k^s(x)$ 的前 $l_s$ 位数移至后面.

用定理17得，由 $V_k^{s-1}(x)$ 和 $V_k^s(x)$ 可确定 $T_k^s(x)$，如 $V_2:\underbrace{1\cdots1}_{10^6个1}\to\overline{10^6,0,10^6}\to 15\ 132\to514\to312\to312\to\cdots;T_2:\underbrace{1\cdots1}_{10^6个1}\to\overline{0,10^6,10^6}\to13\ 215\to145\to123\to123\to\cdots$.

由定理16,17得

**定理18** 把定理14中的 $\mathbf{N}^*$ 换为 $A$，$U_k$ 换为 $T_k$，所得结论成立.

可以验证：$T_1A=\{22\}$，$T_2A=\{123\}$，$T_3A=\{0\ 314\to2\ 204\to1\ 124\}$，$T_4A=\{04\ 105\to32\ 005\to21\ 115\to13\ 015,12\ 205\}$.

下面给出 $T_2A=\{123\}$ 的证明：

由前面的叙述可知，只证小于 $10^6$ 的数码均能生成 $T_2$ 的黑洞123即可. 容易发现 $T_2(x)$ 是3位数码（当 $x<10^6$ 时），所以 $T_2^2(x)$ 是末位为3的数码 $\overline{ab3}$（$a+b=3$），得 $T_2^2(x)$ 是033或123的一个排列，而 $033\to123\to123\to\cdots$，所以 $T_2A=\{123\}$.

### 3.5 $f_g$ 变换黑洞

**定义6** 设 $G=\{正奇数\}$，$g$ 是一个已知的正奇数，$\forall x\in G$，$f_g(x)=\frac{x+g}{2^\alpha}$（其中 $2^\alpha\,\|\,x+g$），显然 $f_g$ 是 $G$ 的变换，这种变换叫做 $f_g$ 变换.

**定理19** $f_g$ 是缩小变换：若 $G_0=\{不大于\ g\ 的正奇数\}$，则 $\forall x\in\complement_G G_0$，$f_g(x)<x$.

**证明** 因为 $x>g$，所以 $f_g(x)=\frac{x+g}{2^\alpha}\leqslant\frac{x+g}{2}<x$，得 $f_g(x)<x$.

**定理20** 把定理4中的 $M$ 换为 $G$，$M_0$ 换为 $G_0$（$G$，$G_0$ 同定义6），所得结论成立.

**定理21** $f_g$ 的最后一个黑洞是 $g$，当且仅当 $g=2^\alpha-1$（$\alpha\in\mathbf{N}^*$）时，$1\in f_gG$.

容易验证：$f_1G=\{1\}$，$f_3G=\{1,3\}$，$f_5G=\{1\to3,5\}$，$f_7G=\{1,3\to5,7\}$.

## 参考文献

[1] 李鸿祥，张芝兰. 数学黑洞问题的图论表示[J]. 数学通讯，1995(7):25.

[2] 杨之. 近年中国初等数学研究的若干新成果[J]. 数学通讯，1994(7):24.

# 浅探伪素数

## 1 引言

1640 年 10 月 18 日,法国著名业余数学家 Fermat(1601—1665) 在给他的朋友 B.F.de Bessy(1605—1675) 的信中提出数论中的著名定理:

**Fermat 小定理** 若 $p$ 是素数,$(a,p)=1$,则 $p \mid (a^{p-1}-1)$.

判断一个任意的正整数是否为素数比较困难,人们曾想到用 Fermat 小定理的逆命题"若 $a \geqslant 2, p \mid (a^{p-1}-1)$,则 $p$ 是素数"来判断已知的 $p$ 是否为素数,这要看 Fermat 小定理的逆命题是否成立.

早在 1819 年,法国数学家舍拉斯就发现 $341 \mid 2^{340}-1$,而 $341 = 11 \times 31$,从而指出 Fermat 小定理的逆命题不成立(参见文献[2] 第 191 ~ 192 页),所以,寻找合数 $p$,使 $p \mid a^{p-1}-1(a \geqslant 2)$ 成为一个研究内容.

**定义 1** 若整数 $a \geqslant 2$,则满足 $n \mid a^{n-1}-1$ 的合数 $n$ 叫做以 $a$ 为底的伪素数,以 2 为底的伪素数简称伪素数.

下文中未注明的字母均表示正整数,"以 $a$ 为底的伪素数" 中有 $a \geqslant 2$.

## 2 引理

**引理 1**[3] $(a^r-1, a^s-1) = a^{(r,s)}-1$.

**引理 2** 以下两种情形,$n = \dfrac{a^{kp}-1}{a^k-1}(a \geqslant 2)$ 均为合数:

(1)$p$ 是合数;

(2)$p$ 是素数,$p \nmid k, k \geqslant 2$.

**证明** (1) 设 $p = rs, r, s \geqslant 2$,得 $n = \dfrac{a^{krs}-1}{a^{kr}-1} \cdot \dfrac{a^{kr}-1}{a^k-1}$ 是合数.

(2)$n = \dfrac{a^p-1}{a-1} \cdot \dfrac{a^{kp}-1}{\frac{(a^p-1)(a^k-1)}{a-1}}$ 为整数.

由 $(k,p)=1$ 及引理 1,得

$$(a^k-1, a^p-1) = a-1$$

$\dfrac{a^p-1}{a-1}$ 是大于 1 的整数,再证 $\dfrac{a^{kp}-1}{\frac{(a^p-1)(a^k-1)}{a-1}}$ 是大于 1 的整数,这可由

“两个数的最小公倍数整除这两个数的公倍数”获证.所以 $n$ 是合数.

**引理 3** 若 $a \geqslant 2$,则 $a^r - 1 \mid a^s - 1 \Longleftrightarrow r \mid s$.

**证明** 只证 $\Rightarrow$,由题设可得$(a^r - 1, a^s - 1) = a^r - 1$.又由引理1,得 $a^{(r,s)} - 1 = a^r - 1,(r,s) = r, r \mid s$.

## 3 一类$\frac{a^{kp}-1}{a^k-1}$形以 $a$ 为底的伪素数

**定理 1** 若 $n = \frac{a^{kp}-1}{a^k-1}$ 是合数,$kp(a^k-1) \mid a^{kp} - a^k$,则 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**证明** 得 $kp \left| \frac{a^{kp}-1}{a^k-1} \right.$,即 $kp \mid n-1, a^{kp} - 1 \mid a^{n-1} - 1, n \mid a^{n-1} - 1$,又 $n$ 是合数,所以 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**推论 1** 若 $2 \mid a, n = a^{a^r} + 1$ 是合数,则 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**证明** 在定理 1 中,令 $k = a^r, p = 2$ 可证.

形如 $2^{2^r} + 1 (r \in \mathbf{N})$ 的数叫做 Fermat 数,至今尚未发现 $r \geqslant 5$ 的 Fermat 素数(见文献[2]第 187 页),Fermat 合数是伪素数.

**推论 2** 若 $p$ 是奇素数,$p \nmid a, p \nmid a^{a^r} - 1$,则 $n = \frac{a^{p \cdot a^r}}{a^{a^r} - 1}$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**证明** 令 $k = a^r$,由引理 2(2) 知 $n = \frac{a^{kp}-1}{a^k-1}$ 是合数.

因为 $p \mid a^{p-1} - 1$,所以 $p \mid a^{(p-1)a^r-1}$,又 $a^{a^r} - 1 \mid a^{(p-1)a^r} - 1, p \nmid a^{a^r} - 1$,所以 $p(a^{a^r} - 1) \mid a^{(p-1)^{a^r}} - 1$:又 $a^r \mid a^{a^r}$,所以 $a^r p(a^{a^r} - 1) \mid a^{a^r}[a^{(p-1)a^r} - 1]$,即 $kp(a^k - 1) a^{kp} - a^k$.由定理 1 知,$n$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

由推论 2 可得一些简洁的结论:

(1) 当 $a = 2$ 时:

令 $r = 1$,得 $n = \frac{4^p - 1}{3}$(素数 $p > 3$)是伪素数,当 $p = 5$ 时得到最小的伪素数 341;

令 $r = 2$,得 $n = \frac{16^p - 1}{15}$(素数 $p > 5$)是伪素数(此即文献[4]中的定理);

令 $r = 3$,得 $n = \frac{256^p - 1}{255}$(素数 $p > 5$,且 $p \neq 17$)是伪素数.

(2) 当 $r = 1$ 时:

$n=\dfrac{27^p-1}{26}$(素数 $p>3$ 且 $p\neq 13$) 是以 3 为底的伪素数;

$n=\dfrac{3\ 125^p-1}{3\ 124}$(常数 $p\neq 5,11,71$) 是以 5 为底的伪素数.

**推论 3** 若 $t+2\leqslant r\leqslant a^t$,则 $n=\dfrac{a^{a^r}-1}{a^{a^t}-1}$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**证明** 令 $k=a^t,p=a^{r-t}$(可得 $p$ 是合数),由引理 2,得 $n$ 是合数,再由定理 1,可证 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**推论 4** 若 $k,p$ 是奇素数,$k\neq p,p\nmid a,p\nmid a^k-1,k\nmid a-1,k-1\mid p-1$,则 $n=\dfrac{a^{kp}-1}{a^k-1}$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

**证明** 由引理 2(2) 知 $n$ 是合数.

有 $p\mid a^{k(p-1)}-1,a^k-1\mid a^{k(p-1)}-1$,又 $p\nmid a^k-1$,所以 $p(a^k-1)\mid a^{k(p-1)}-1$.

又 $k\mid a^{k-1}-1,k-1\mid p-1$,所以 $k\mid a^{p-1}-1,k\mid a^{k(p-1)}-1$.

因为 $k\mid a^k-a,k\nmid a-1$,所以 $k\nmid a^k-1$,可得 $(k,p(a^k-1))=1$, $kp(a^k-1)\mid a^{k(p-1)}-1,kp(a^k-1)\mid a^{kp}-a^k$.由定理 1,得 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数.

在推论 4 中,令 $a=2,k=3$ 或 5,得 $\dfrac{8^p-1}{7}$(奇素数 $p\neq 3,7$),$\dfrac{32^p-1}{31}$($p$ 是 $4r+5$ 形素数) 均是伪素数.

## 4 $a^m-1$ 形以 $a$ 为底的伪素数

**定理 2** $a^m-1$ 是以 $a$ 为底的伪素数$\Longleftrightarrow m\mid a^m-2$ 且 $a^m-1$ 是合数.

**证明** $a^m-1$ 是以 $a$ 为底的伪素数$\Longleftrightarrow a^m-1\mid a^{a^m}-2$ 且 $a^m-1$ 是合数$\Longleftrightarrow m\mid a^m-2$ 且 $a^m-1$ 是合数.

**推论 5** 若 $m$ 是合数,则 $a^m-1$ 是以 $a$ 为底的伪素数$\Longleftrightarrow m\mid a^m-2$.

**推论 6** 若 $m$ 是素数,则$(km+2)^m-1$ 是以 $km+2$ 为底的伪素数.

**定理 3** $\{$伪素数$\}=\{m\mid m$ 是奇合数且 $2^m-1$ 是伪素数$\}$.

**证明** $m$ 是伪素数$\Longleftrightarrow m$ 是合数且 $m\mid 2^{m-1}-1\Longleftrightarrow m$ 奇合数且 $m\mid 2^m-2\Longleftrightarrow m$ 是奇合数且 $2^m-1$ 是伪素数(由推论 5).

由定理3知,若找到了全部形如 $2^m-1$($m$ 是奇合数)的伪素数,就找出了所有的伪素数.由此可知,伪素数有无限个.

## 5 Carmichael 数

**定义 2** 若对于所有与 $n$ 互质的数 $a$,均有 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数,则 $n$ 叫

做 Carmichael 数.

文献[5]把伪素数叫做假素数,Carmichael 数叫做绝对假素数.

因为 $561 = 3 \times 11 \times 17$,当 $3 \nmid a$,$17 \nmid a$ 时,总有 $561 \mid a^{560} - 1$(设 $a = 561q + r$,$0 \leqslant r \leqslant 560$,只需验证 $(561, r) = 1$ 时,总有 $561 \mid r^{560} - 1$),所以561是Carmichael数,$1\,729 = 7 \times 13 \times 19$ 也是Carmichael数.这种性质是美国数学家Carmichael于1909年发现的(见文献[2]第191 ~ 193页).

**定理4** 若 $n$ 同时是以 $a$,$b$ 为底的假素数,则 $n$ 也是 $ab$ 为底的假素数.

**证明** 读者可由定义1获证.

**推论7** $n$ 是Carmichael数的充要条件为:对于所有小于 $n$ 的素数 $p$,均有 $n$ 是以 $p$ 为底的伪素数.

## 6 其他形式的伪素数

本文的定理1,2分别介绍了 $\frac{a^{kp} - 1}{a^k - 1}$,$a^m - 1$ 形以 $a$ 为底的伪素数,试问:还有其他形式以 $a$ 为底的伪素数吗?

**定理5** (1) 若 $a > 1$,$(a, 561) = 1$,$a \neq 560, 562$,则561是以 $a$ 为底的伪素数,但561不是 $\frac{a^{kp} - 1}{a^k - 1}$,$a^m - 1$ 形以 $a$ 为底的伪素数.

(2) 若 $a > 1$,$(a, 2\,821) = 1$,$a \neq 2\,820, 2\,822$,则2 821是以 $a$ 为底的伪素数(见文献[5]),但2 821不是 $\frac{a^{kp} - 1}{a^k - 1}$,$a^m - 1$ 形以 $a$ 为底的伪素数.

**证明** 只证(1)的后半部分结论.

若 $561 = \frac{a^{kp} - 1}{a^k - 1}$,得

$$a^k[561 - a^{k(p-1)}] = 2^4 \times 5 \times 7$$

因为 $(a, 561) = 1$,所以 $(a, 561 - a^{k(p-1)}) = 1$,得

$$\begin{cases} a^k = 2^4; 5; 7; 2^4 \times 5; 2^4 \times 7; 5 \times 7; 2^4 \times 5 \times 7 \\ 561 - a^{k(p-1)} = 5 \times 7; 2^4 \times 7; 2^4 \times 5, 7; 5; 2^4; 1 \end{cases}$$

可得 $a = 560$,$k = 1$,$p = 2$,这与 $a \neq 560$ 矛盾!

若 $561 = a^m - 1$,得 $a^m = 2 \times 281$,所以 $a = 562$,$m = 1$,这与 $a \neq 562$ 矛盾!

说明结论(1)成立.

# 参考文献

[1] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992.

[2] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.
[3] 熊全淹.初等整数论[M].2版.武汉:湖北教育出版社,1989.
[4] 陈历功,陈君安.介绍一个直接求"伪素数"的定理[J].数学通讯,1995(4):16-17.
[5] 张文忠.中学数学中的趣题[M].西安:陕西科学技术出版社,1989.

# 空间数共 17 个

注释①给出了"空间数"的定义,即体积、表面积和总棱长三者全相等或有两者相等的那个数,设长方体高为 $x$,宽为 $y$,长为 $z$,且 $x \leqslant y \leqslant z, x, y, z \in \mathbf{N}^*$,则

体积　$V = xyz$

表面积　$S = 2(xy + xz + yz)$

总棱长　$L = 4(x + y + z)$

由文献[1]的方法,得所有的 $V = S$ 型空间数见表 1.

表 1

| $V = S$ 型空间数 $xyz$ | 对应的 $(x, y, z)$ $(x \leqslant y \leqslant z)$ |
|---|---|
| 882 | (3,7,42) |
| 576 | (3,8,24) |
| 486 | (3,9,18) |
| 450 | (3,10,15) |
| 432 | (3,12,12) |
| 400 | (4,5,20) |
| 288 | (4,6,12) |
| 256 | (4,8,8) |
| 250 | (5,5,10) |
| 216 | (6,6,6) |

$V = S$ 型空间数共 10 个(文献[1]漏掉了上表中的第 9 个),可以验证此时均有 $L < V$,所以不存在 $V = S = L$ 型空间数.

再来求 $V = L$ 型空间数,得

$$xyz = 4(x + y + z)(x \leqslant y \leqslant z, x, y, z \in \mathbf{N}^*) \quad ①$$

若 $x = y$,得 $zx^2 - 8x - 4z = 0$,从而

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{z^2 + 4}}{z}$$

由 $x \in \mathbf{N}^*$,得 $\sqrt{z^2+4} \in \mathbf{Q}$,又由 $z \in \mathbf{N}^*$,得 $\sqrt{z^2+4} \in \mathbf{N}^*$,设 $z^2 + 4 =$

$n^2(n \in \mathbf{N}^*)$,得 $2 \mid n \pm z$,且

$$\frac{n+z}{2} \cdot \frac{n-z}{2} = 1$$

所以
$$\frac{n+z}{2} = \frac{n-z}{2} = 1$$

得 $z = 0$,这与 $z \in \mathbf{N}^*$ 矛盾!所以 $x \neq y$,同理 $y \neq z$,得

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{4}(x < y < z)$$

由 $x < y < z$,得

$$xy < xz < yz$$

$$\frac{1}{xy} > \frac{1}{xz} > \frac{1}{yz}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} < \frac{3}{xy}, xy < 12$$

又由 $x < y$,得 $x = 1$ 或 2.

当 $x = 1$ 时,得 $yz = 4(1 + y + z) > 4z$,所以 $y \geqslant 5$,又 $xy < 12$,得 $5 \leqslant y \leqslant 11$.

可试验出式 ① 的解为

$$(x,y,z) = (1,5,24),(1,6,14),(1,8,9)$$

当 $x = 2$ 时,得 $yz = 2(2 + y + z) > 2z$,所以 $y \geqslant 3$. 又 $xy < 12$,得 $3 \leqslant y \leqslant 5$. 可试验出式 ① 的解为 $(x,y,z) = (2,3,10),(2,4,6)$.

所有的 $V = L$ 型空间数见表 2.

**表 2**

| $V = L$ 型空间数 $xyz$ | 对应的$(x,y,z)$ $(x \leqslant y \leqslant z)$ |
|---|---|
| 120 | (1,5,24) |
| 84 | (1,6,14) |
| 72 | (1,8,9) |
| 60 | (2,3,10) |
| 48 | (2,4,6) |

$V = L$ 型空间数共 5 个(文献[1] 只给出了上表中的第 5 个).

最后来求 $S = L$ 型空间数,得

$$xy + xz + yz = 2x + 2y + 2z(x \leqslant y \leqslant z, x,y,z \in \mathbf{N}^*) \quad ②$$

若 $x \geqslant 2$,得 $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$,所以

$$xy \geqslant 2x, xz \geqslant 2z, yz \geqslant 2y, xy + xz + yz \geqslant 2x + 2y + 2z$$

(当且仅当 $x = y = z = 2$ 时取等号)

所以 $x \geqslant 2$,式②的解为

$$(x,y,z)=(2,2,2)$$

若 $x=1$ 时,则可得 $z=1,2$,其时式②无解,所以 $z\geqslant 3$,还得

$$yz=2+y+z\leqslant 2+2z$$

$$y\leqslant 2+\frac{2}{z}.$$

由 $z\geqslant 3, y\in \mathbf{N}^*$,得 $y=1$ 或 2;又由 $x=1$,可验证出此时式②的解为

$$(x,y,z)=(1,2,4)$$

所有的 $S=L$ 型空间数见表 3.

表 3

| $S=L$ 型空间数 $4(x+y+z)$ | 对应的 $(x,y,z)$ $(x\leqslant y\leqslant z)$ |
|---|---|
| 28 | (1,2,4) |
| 24 | (2,2,2) |

$S=L$ 型空间数共 2 个(文献[1]只给出了上表中的第 2 个).

所以空间数共 17 个:24,28,48,60,72,84,120,216,250,256,288,400,432,450,486,576,882.

## 参考文献

[1] 杨之."空间数"初探[J].中学数学,2004(9):46.

# 回 归 数

有许多数具有这样一种有趣性质:它的十进制表示的各位数字,按照原顺序进行某些数学运算,又可以重新得到该数,这就是回归数,例如:

$24 = 2^3 + 4^2, 2\,427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4,$

$81 = (8+1)^2, 145 = 1! + 4! + 5! (n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n)$

英国数学家哈代(1877—1947)曾经发现过另一种形式的回归数:

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3, 371 = 3^3 + 7^3 + 1^3,$

$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3, 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3.$

它们都是三位数且等于各位数字的三次幂之和,这种巧合不能不令人感到惊讶.更令人惊奇的是,一位读者看过哈代的有趣发现后,竟然构造出其值等于其各位数字的四(五、六)次幂之和的四(五、六)位数:

$1\,634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4,$

$54\,748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5,$

$548\,834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$

像这种其值等于各位数字的 $n$ 次幂之和的 $n$ 位数,称为 $n$ 位 $n$ 次幂回归数.本文只讨论这种回归数,所以简称回归数.人们自然会问:对于什么样的自然数 $n$ 有回归数?这样的 $n$ 是有限个还是无穷多个?对于已给定的 $n$,如果有回归数,那么有多少个回归数?

1986 年美国的一位数学教师安东尼·迪拉那巧妙地证明了使 $n$ 位数成为回归数的 $n$ 只有有限个.

设 $A_n$ 是这样的回归数,即

$$A_n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n$$

其中 $1 \leqslant a_1 \leqslant 9, 0 \leqslant a_i \leqslant 9 (i = 2, 3, \cdots, n)$.

从而
$$10^{n-1} \leqslant A_n \leqslant n \cdot 9^n$$
$$n \cdot 9^n > 10^{n-1}$$
$$\left(\frac{10}{9}\right)^n < 10n \qquad ①$$

随着正整数 $n$ 的不断增加,$\left(\frac{10}{9}\right)^n$ 的值较 $10n$ 的值增加得要快,很快就会使式①不成立.因此满足式①的 $n$ 不能无限制地增大,即 $n$ 只能取有限多个,进一步

地计算表明：

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{60} = 556.479\,8\cdots < 10 \times 60$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{61} = 618.3\,109\cdots > 10 \times 61$$

对于 $n \geqslant 61$，便有 $\left(\frac{10}{9}\right)^n > 10n$. 所以使式①成立的正整数 $n \leqslant 60$，回归数至多是 60 位数.

迪拉那说，他的学生们早在 1975 年借助于哥伦比亚大学沃森实验室的计算机得到：

一位一次幂回归数为 1，2，…，9；

二位二次幂回归数不存在；

三位三次幂回归数只有哈代发现的四个；

四位四次幂回归数有 1 634，8 208，9 474；

五位五次幂回归数有 54 748，92 727，93 084；

六位六次幂回归数有 548 834；

七位七次幂回归数有 1 741 725，4 210 818，9 800 817；

八位八次幂回归数有 24 678 050，24 678 051.

但此后对哪一个正整数 $n(n \leqslant 60)$ 还有回归数；对于已给定的 $n$，能有多少个回归数；最大的回归数是多少；均不清楚.

## 参考文献

[1] 贺贤孝. 数学中的未解之谜[M]. 长沙：湖南教育出版社，1998.
[2] 杨之. 初等数学研究中的问题与课题[M]. 长沙：湖南教育出版社，1996.

# 2007年高考湖北卷的一大特色
## ——整数性质

"数学是自然科学的皇后,数论是自然科学的皇冠,哥德巴赫猜想则是皇冠上的一颗明珠."这是陈景润读高中时,他的数学老师对全班同学说的一段名言.由此,陈景润开始对数学产生极大兴趣,并最终取得研究哥德巴赫猜想的巨大成就,数论[1]是数学的一个分支,主要研究整数的性质.

2007高考早已落下帷幕,笔者发现湖北卷(理)中有四道题与整数的性质有关,题量、分值均接近20%,这类题目应该引起师生的重视.整数是最简单的数,它的基本性质应成为每一个公民的常识,高中课本"二项式定理"一节中就有"证明 $55^{55}+9$ 能被8整除"的习题.

**题1** 如果 $\left(3x^2-\frac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零数项,则正整数 $n$ 的最小值为( )

(A)3 (B)5 (C)6 (D)10

**解** $\left(3x^2-\frac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1}=C_n^r(3x^2)^{n-r}\left(-\frac{2}{x^3}\right)^r=$$
$$3^{n-r}(-2)^rC_n^rx^{2n-5r}(r=0,1,2,\cdots,n)$$

题意即存在 $n,r$ 使 $2n=5r$,所以5是 $2n$ 的约数,又5与2互质,所以5是 $n$ 的约数,$n$ 是5的倍数,得正整数 $n$ 的最小值为5(此时 $r=2$),选(B).

**注** $\left(3x^2-\frac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式是固定顺序 $n+1$ 项的和,里面每一项都不会是零,所以题中的"非零"两字可去掉.

**题8** 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和分别为 $A_n$ 和 $B_n$,且 $\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$,则使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 $n$ 的个数是( )

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

**解** $$\frac{A_n}{B_n}=\frac{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}{\frac{n}{2}(b_1+b_n)}=\frac{a_1+a_n}{b_1+b_n}=\frac{7n+45}{n+3}$$

因此上式对 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立，所以

$$\frac{a_1 + a_{2n-1}}{b_1 + b_{2n-1}} = \frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}$$

即

$$\frac{a_n + a_n}{b_n + b_n} = \frac{14n+38}{2n+2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{7n+19}{n+1} = 7 + \frac{12}{n+1}$$

$\frac{a_n}{b_n} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{12}{n+1} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow n+1$ 是 12 的大于 1 的约数 $\Leftrightarrow n+1 = 2,3,4,6$ 或 12.

所以满足题意的 $n$ 有 5 个，选(D).

**题 10**　已知直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$（$a, b$ 是非零常数）与圆 $x^2 + y^2 = 100$ 有公共点，有公共点的横坐标和纵坐标均为整数，那么这样的直线共有(　　)

(A)60 条　(B)66 条　(C)72 条　(D)78 条

**解**　由 $x^2 + y^2 = 100$，得 $|x| \leqslant 10$，用 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 10$ 可试得圆 $x^2 + y^2 = 100$ 上的整点（即横坐标和纵坐标均为整数的点）有且仅有 12 个（图 1）：$A_1(10,0)$，$A_2(8,6)$，$A_3(6,8)$，$A_4(0,10)$，$A_5(-6,8)$，$A_6(-8,6)$，$A_7(-10,0)$，$A_8(-8,-6)$，$A_9(-6,-8)$，$A_{10}(0,-10)$，$A_{11}(6,-8)$，$A_{12}(8,-6)$.

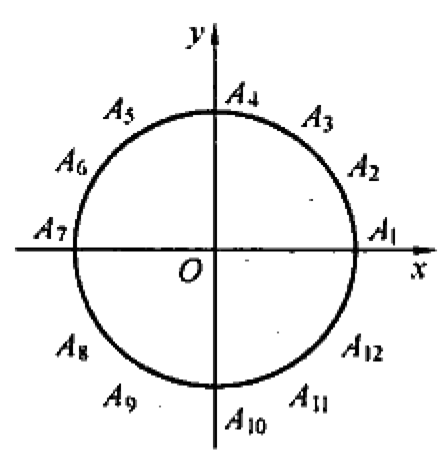


图 1

显然，题中的直线与圆的公共点只能是这 12 个点中的一个或两个.

注意到直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 在 $x$ 轴，$y$ 轴上的截距均存在且均不为 0，所以：

当公共点是一个时，直线与圆相切，切点只能是 8 个（排除 $A_1, A_4, A_7, A_{10}$），得 8 条直线（切线）；

当公共点是两个时，直线（割线）的条数是 $C_{12}^2 - 4 - 10 = 52$（即排除经过原点的直线 $A_2OA_8, A_3OA_9, A_5OA_{11}, A_6OA_{12}$ 和与坐标轴垂直的直线 $A_2A_{12}, A_3A_{11}, A_4A_{10}, A_5A_9, A_6A_8, A_3A_5, A_2A_6, A_1A_7, A_{12}A_8, A_{11}A_9$）.

所以所求直线的条数是 $8 + 52 = 60$，选(A).

**题 21**　已知 $m, n$ 为正整数.

(1) 用数学归纳法证明：当 $x > -1$ 时，$(1+x)^m \geqslant 1 + mx$；

(2) 对于 $n \geqslant 6$，已知 $\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n < \frac{1}{2}$，求证 $\left(1 - \frac{m}{n+3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^m$，$m =$

$1,2,\cdots,n$;

(3) 求出满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 $n$.

笔者在此不给出这道压轴题的详细解答过程,只是介绍一下此题的背景.

第(1)问是伯努利不等式[2],用导数也极易证出:当 $m,x\in(-1,+\infty)$ 时,$f(x)=(1+x)^m-mx$ 的最小值是 $f(0)=1$.

第(2)问中的不等式"$(1-\frac{1}{n+3})^n<\frac{1}{2}(n\geqslant 6,n\in\mathbf{N}^*)$"也可这样证得:

易验证 $n=6$ 时成立,下证 $n\geqslant 7$ 时成立,即证

$$(n+3)^n>2(n+2)^n$$

$$[(n+2)+1]^n>(n+2)^n+(n+2)^n$$

$$C_n^1(n+2)^{n-1}+C_n^2(n+2)^{n-2}+\cdots>n(n+2)^{n-1}+2(n+2)^{n-1}$$

只需证

$$C_n^2(n+2)^{n-2}\geqslant 2(n+2)^{n-1}$$

$$C_n^2\geqslant 2(n+2)$$

$$n^2-5n-8\geqslant 0$$

这由 $n\geqslant 7$ 极易证出,所以要证结论成立.

第(3)问是不定方程问题(数论中的很多世界难题都是此类问题),它有勾股定理、费马(Fermat,1601—1665)大定理[3]、埃斯柯特猜想[4]的背景.

1637年,被誉为"业余数学之王"的法国数学家费马在研读丢番图的著作时,提出了费马问题——对于大于2的任一正整数 $n$,方程 $x^n+y^n=z^n$ 均无正整数解 $(x,y,z)$. 1993年才证明了它的正确性,此结论就叫费马大定理.

埃斯柯特猜想:当 $n>1$ 时,关于 $n,h,x$ 的方程

$$x^n+(x+1)^n+(x+2)^n+\cdots+(x+h)^n=(x+h+1)^n$$

的正整数解只有 $(n,h,x)=(2,3,1),(3,3,2)$,即

$$3^2+4^2=5^2,3^3+4^3+5^3=6^3$$

这个猜想是1900年提出的,当时,埃斯柯特只证明了 $n=2,3,4,5$ 的情形,我国数学家柯召,孙琦在1978年证明了当 $n$ 是大于1的奇数时猜想是正确的,当 $n$ 是偶数的情形还未获彻底解决.

此题的编拟者一定对埃斯柯特猜想有所研究:证得了 $x=3$ 且 $h=n-1$ 时此猜想成立.

用数学归纳法也可证得:

$$3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n<(n+3)^n(n\geqslant 4)$$

**证明**　当 $n=4$ 时成立:$3^4+4^4+5^4+6^4<(6+1)^4$(将右边展开).

假设 $n=k(k\geqslant 4)$ 时成立:$3^k+4^k+\cdots+(k+2)^k<(k+3)^k$,得

$$3^{k+1}+4^{k+1}+\cdots+(k+1)^{k+1}+(k+1)(k+2)^k<$$

$$3^k(k+1)+4^k(k+1)+\cdots+$$

$$(k+1)^k(k+1)+(k+2)^k(k+1)<C_{k+1}^1(k+3)^k \quad ①$$

可证 $k^2-k-4>0(k\geqslant 4)$,所以 $k+2<C_{k+1}^2$,又$(k+2)^{k-1}<(k+3)^{k-1}$,相乘,得

$$(k+2)^k<C_{k+1}^2(k+3)^{k-1}$$

$$(k+2)^{k+1}<C_{k+1}^2(k+3)^{k-1}+(k+1)(k+2)^k \quad ②$$

由 ①,②,得

$$3^{k+1}+4^{k+1}+\cdots+(k+2)^{k+1}<C_{k+1}^1(k+3)^k+C_{k+1}^2(k+3)^{k-1}$$

$$3^{k+1}+4^{k+1}+\cdots+(k+2)^{k+1}+(k+3)^{k+1}<$$
$$(k+3)^{k+1}C_{k+1}^1(k+3)^k+C_{k+1}^2(k+3)^{k-1}<$$
$$[(k+3)+1]^{k+1}=(k+4)^{k+1}$$

即 $n=k+1$ 时也成立,所以要证结论成立.

用解决整数问题的常用工具 —— 数学归纳法也简洁地解决了这道压轴题的压轴问.

## 参考文献

[1] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992.

[2] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲(修订版)[M].北京:高等教育出版社,1983.

[3] RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS.数学是什么[M].汪浩,朱煜民,译.长沙:湖南教育出版社,1985.

[4] 徐肇玉.勾股数的联想[J].数学通报,1995(1):39-41.

# 二阶递归数列的一条同余性质

## 1 约定

为了书写简便,本文约定

(1) 小写字母均表示整数(除开 i 表示虚数单位);

(2) 数列$\{a_n\}$满足递推关系 $a_{n+2} = ua_{n+1} + va_n(n \in \mathbf{Z})$,其特征方程的判别式 $\Delta = u^2 + 4v$;

(3) $p$ 是奇素数;

(4) 同余式的模均指(mod $p$),并且省写;

(5) $(\Delta, p) = 1$,所以 $\Delta \neq 0$;

(此时由费马小定理知,$\Delta^{p-1} \equiv 1$,所以 $\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1$.)

(6) 满足 $\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ 的 $p$ 叫做关于$\Delta$ 的第一类奇素数,记作 $p \in P_1$,否则(指满足 $\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ 的 $p$) 叫做 $\Delta$ 的第二类奇素数,记为 $p \in P_2$.

## 2 定理及其证明

**定理 1** (1) 当 $p \in P_1$ 时,$a_k \equiv a_{k+p-1}$;

(2) 当 $p \in P_2$ 时,$va_k \equiv -a_{k+p+1}$.

为证明定理 1,先给出几条引理.

**引理 1** (1) 当 $\Delta > 0$时,$a_n = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left[(2a_1 - ua_0 + a_0\sqrt{\Delta}) \cdot \left(\frac{u+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n - (2a_1 - ua_0 - a_0\sqrt{\Delta})\left(\frac{u-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n\right](n \in \mathbf{N})$;

(2) 当 $\Delta < 0$时,$a_n = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}}\left[(2a_1 - ua_0 + a_0\sqrt{-\Delta}\mathrm{i})\left(\frac{u+\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}}{2}\right)^n - (2a_1 - ua_0 - a_0\sqrt{-\Delta}\mathrm{i})\left(\frac{u-\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}}{2}\right)^n\right](n \in \mathbf{N})$.

**引理 2** (1)$p \mid C_p^j(1 \leqslant j \leqslant p-1)$;

(2)$p \mid C_{p+1}^j(2 \leqslant j \leqslant p-1)$.

**定理 3** (1) 当 $p \in P_1$ 时,$a_1 \equiv a_p$;

(2) 当 $p \in P_2$ 时，$va_{-1} \equiv -a_p$.

**证明** 先证 $\Delta > 0$ 时成立，用引理 1(1).

$$2a_p \equiv 2^p a_p = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\Big[(2a_1 - ua_0 + a_0\sqrt{\Delta})\sum_{j=0}^{p} C_p^j u^{p-j}(\sqrt{\Delta})^j -$$
$$(2a_1 - ua_0 - a_0\sqrt{\Delta})\sum_{j=0}^{p} C_p^j u^{p-j}(-1)^j(\sqrt{\Delta})^j\Big] =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\Big\{(2a_1 - ua_0)\sum_{j=0}^{p} C_p^j u^{p-j}(\sqrt{\Delta})^j[1-(-1)^j] +$$
$$a_0\sum_{j=0}^{p} C_p^j u^{p-j}(\sqrt{\Delta})^{j+1}[1+(-1)^j]\Big\} =$$
$$(2a_1 - ua_0)\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2j+1}u^{p-2j-1}\Delta^j + a_0\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2j}u^{p-2j}\Delta^j \equiv$$
$$(2a_1 - ua_0)\Delta^{\frac{p-1}{2}} + ua_0(\text{用引理 } 2(1))$$

(1) 当 $p \in P_1$ 时，$\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$，得 $2a_p \equiv 2a_1$，所以 $a_1 \equiv a_p$.

(2) 当 $p \in P_2$ 时，$\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$，得 $2a_p \equiv -2(a_1 - ua_0) = -2va_{-1}$，所以 $va_{-1} \equiv -a_p$.

再证 $\Delta < 0$ 时成立.

由引理 1(2)，可把上面证明中的 $\sqrt{\Delta}$ 换为 $\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}$，得

$$2a_p \equiv 2^p a_p = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}i}\Big\{(2a_1 - ua_0)\sum_{j=0}^{p} C_p^j u^{p-j}(\sqrt{-\Delta}\mathrm{i})^j[1-(-1)^j] +$$
$$a_0\sum_{j=0}^{p} C_p^j u^{p-j}(\sqrt{-\Delta}\mathrm{i})^{j+1}[1+(-1)^j]\Big\} =$$
$$(2a_1 - ua_0)\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2j+1}u^{p-2j-1}\Delta^j + a_0\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2j}u^{p-2j}\Delta^j$$

得到了与前面证明中相同的结果，后面的证明当然完全一样了，所以 $\Delta < 0$ 时也成立.

**引理 4** (1) 当 $p \in P_1$ 时，$a_2 \equiv a_{p+1}$；

(2) 当 $p \in P_2$ 时，$va_0 \equiv -a_{p+1}$.

**证明** 先证 $\Delta > 0$ 时成立.

$$4a_{p+1} \equiv 2^{p+1}a_{p+1} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\Big\{(2a_1 - ua_0)\sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j u^{p+1-j}(\sqrt{\Delta})^j[1-(-1)^j] +$$
$$a_0\sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j u^{p+1-j}(\sqrt{\Delta})^{j+1}[1+(-1)^j]\Big\} =$$

$$(2a_1-ua_0)\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}C_{p+1}^{2j+1}u^{p-2j}\Delta^j+a_0\sum_{j=0}^{\frac{p+1}{2}}C_{p+1}^{2j}u^{p+1-2j}\Delta^j\equiv$$

$$(2a_1-ua_0)u(1+\Delta^{\frac{p-1}{2}})+a_0(u^2+\Delta\cdot\Delta^{\frac{p-1}{2}})\text{(用引理 2(2))}$$

(1) 当 $p\in P_1$ 时,$\Delta^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1$,所以 $4a_{p+1}\equiv 2u(2a_1-ua_0)+a_0(2u^2+4v)=4(ua_1+va_0)=4a_2,a_2\equiv a_{p+1}$.

(2) 当 $p\in P_2$ 时,$\Delta^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1$,所以 $4a_{p+1}\equiv a_0(u^2-\Delta)=-4va_0$,所以 $va_0\equiv -a_{p+1}$.

再证 $\Delta<0$ 时成立.

可把上面中的 $\sqrt{\Delta}$ 换为 $\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}$,就可得到证明.

定理 1 的证明:

(1) 第一步,证明 $p\mid u$ 且 $p\mid v$ 时成立.

此时,由递推关系得 $a_n\equiv 0(n\in\mathbf{Z})$,所以 $a_k\equiv a_{k+p-1}\equiv 0$.

第二步,证明 $p\mid v$ 时成立.

由第一步,只证 $p\nmid u$ 且 $p\mid v$ 时成立.

由 $p\mid v$ 及递推关系,得 $a_n\equiv ua_{n-1}$,所以 $a_n\equiv u^la_{n-1}(n\in\mathbf{Z},l\in\mathbf{N}^*)$,取 $n=k+p-1,l=p-1$,得 $a_{k+p-1}\equiv u^{p-1}a_k\equiv a_k$(因为 $p\nmid u$),所以 $a_k\equiv a_{k+p-1}$.

第三步,证明 $k\leqslant 2$ 时成立.

由第二步,只证明 $p\nmid v,k\leqslant 2$ 时成立(用反向数学归纳法).

由引理 4(1),3(1) 知 $k=2,1$ 时成立.

假设 $k=l,l-1(l\leqslant 2)$ 时成立,得 $a_l\equiv a_{l+p-1},ua_{l-1}\equiv ua_{l+p-2}$,相减得 $va_{l-2}\equiv va_{l+p-3}$.

因为素数 $p\nmid v$,所以 $a_{l-2}\equiv a_{l+p-3}$,即 $k=l-2$ 时成立,要证结论成立.

第四步,证明(1) 成立.

由第三步,只证明 $k\geqslant 1$ 时成立(用数学归纳法).

$k=1,2$ 时成立.

假设 $k=l,l+1(l\geqslant 1)$ 时成立,得 $va_l\equiv va_{l+p-1},ua_{l+1}\equiv ua_{l+p}$,相加得 $a_{l+2}\equiv a_{l+p+1}$,即 $k=l+2$ 时成立,所以 $k\geqslant 1$ 时成立.

(2) 证明同(1),这里只写出主要步骤.

第一步,证明 $p\mid u$ 且 $p\mid v$ 时成立.

第二步,证明 $p\mid v,k\leqslant 0$ 时成立.

由第一步,只证 $p\nmid u$ 且 $p\mid v,k\leqslant 0$ 时成立,$0\equiv a_{k+p-1}$.

我们证明此时 $0\equiv a_k(k\leqslant p+1)$ 即可.

因为 $p \mid v$,所以由引理 4(2) 知 $k = p + 1$ 时成立.

假设 $k = l(l \leqslant p + 1)$ 时成立:$0 \equiv a_l$.

由 $p \mid v$ 和递推式,得 $a_l \equiv ua_{l-1} \equiv 0$,再由 $p \nmid u$,得 $0 \equiv a_{l-1}$,即 $k = l - 1$ 时成立,所以 $0 \equiv a_k(k \leqslant p + 1)$.

第三步,证明 $k \leqslant 0$ 时成立.

由第二步,只证明 $p \nmid v, k \leqslant 0$ 时成立(用反向数学归纳法).

第四步,证明(2) 成立.

由第三步,只证明 $k \geqslant -1$ 时成立(用数学归纳法).

## 3 运用

定理 1 的运用范围很广,当 $\Delta \neq 0,(\Delta, p) = 1$ 时可用定理 1 得到很多同余性质(整除性质),这里列出两个推论.

**推论 1** 若 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+2} = (2u + 1)b_{n+1} - u(u + 1)b_n(n \in \mathbf{Z})$,则 $b_k \equiv b_{k+p-1}$.

**证明** 由 $\Delta = (2u + 1)^2 + 4[-u(u + 1)] = 1$,得 $\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, p \in P_1$.

由定理 1(1) 得 $b_k \equiv b_{k+p-1}$.

**推论 2** 若 $\{c_n\}$ 满足 $c_{n+2} = 2uc_{n+1} + (2^t - u^2)c_n(t \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z})$,则

(1) $p$ 是 $8m \pm 1$ 形素数,或 $t$ 是偶数时,$c_k \equiv c_{k+p-1}$;

(2) $p$ 是 $8m \pm 3$ 形素数,且 $t$ 是奇数时,$(2^t - u^2)c_k \equiv -c_{k+p+1}$.

**证明** $\Delta = 2^{t+2}$,由结论[1] 知,$p$ 是 $8m \pm 1$ 形素数时,$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$,$p$ 是 $8m \pm 3$ 形素数时,$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$.

(1) 得 $\Delta^{\frac{p-1}{2}} = 2^{\frac{p-1}{2}(t+2)} \equiv 1$,由 $p \in P_1$ 及定理 1(1) 得 $c_k \equiv c_{k+p-1}$.

(2) 得 $\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$,由 $p \in P_2$ 及定理 1(2) 得$(2^t - u^2)c_k \equiv -c_{k+p+1}$.

设 $\{d_n\}$ 满足 $d_{n+2} = 2d_{n+1} + d_n, d_0 = 0, d_1 = 1$,$\{d_n\}$ 就是 IMO - 29 备选题 1 中的 $\{a_n\}$.在推论 2 中令 $t = u = 1$,可得 $\{d_n\}$ 的一些整除性质.

当 $p$ 是 $8m \pm 1$ 形素数时,$p \mid (d_{p-2} - 1, d_{p-1}, d_p - 1)$;

当 $p$ 是 $8m \pm 3$ 形素数时,$p \mid (d_p + 1, d_{p+1}, d_{p+2} + 1)$.

Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n(n \in \mathbf{Z}), F_0 = 0, F_1 = 1$.由定理 1 可得

(1) 当 $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ 时,$F_k \equiv F_{k+p-1}$,特别的,$1 = F_2 \equiv F_{p+1}$;

(2) 当 $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ 时,$-F_k \equiv F_{k+p+1}$,特别的,$0 = -F_0 \equiv F_{p+1}$.

所以当奇素数 $p \neq 5$ 时,$p \mid F_{p+1}(F_{p+1}-1)$,由此可得 IMO - 29 备选题 45 成立.

## 4 $\Delta = 0$ 时的情形

**定理 2** 若 $\{f_n\}$ 满足递推关系 $f_{n+2} = 2uf_{n+1} - u^2f_n$(得 $\Delta = 0, f_n = u^{n-1}[f_1n - uf_0(n-1)](n \in \mathbf{N})$),$q$ 是素数,则 $uf_k \equiv f_{k+q} \pmod q$ $(k \in \mathbf{Z})$.

**证明** 当 $q \mid u$ 时成立.

当 $q \nmid u$ 时,可用数学归纳法证明(先证 $k = 0,1$ 时成立).

## 参考文献

[1] 现代工程数学手册编委会.现代工程数学手册(Ⅲ)[M].武汉:华中工学院出版社,1998.

# 已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形

本文用$a,b,c(a \geqslant b \geqslant c),p,r,S_\Delta$分别表示所论$\triangle ABC$的三边，半周长，内切圆半径，面积；$u,v,w$分别表示顶点$A,B,C$到内切圆的切线长(图1).

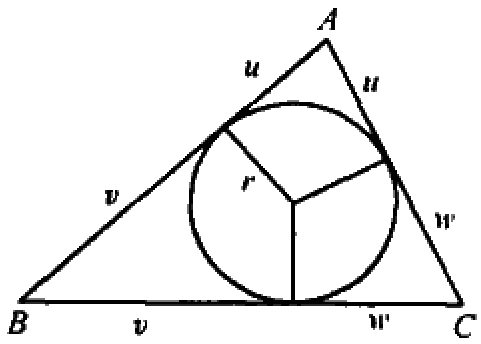



图1

由$a \geqslant b \geqslant c$可证$u \leqslant v \leqslant w$，还有

$$\begin{cases} a = v + w \\ b = w + u \\ c = u + v \end{cases} \quad ①$$

$$p = u + v + w \quad ②$$

$$\begin{cases} u = p - a \\ v = p - b \\ w = p - c \end{cases} \quad ③$$

$$r = \frac{S_\Delta}{p} \quad ④$$

$$\arctan\frac{r}{u} + \arctan\frac{r}{v} + \arctan\frac{r}{w} = \frac{\pi}{2} \quad ⑤$$

$$w = \frac{r^2(u+v)}{uv - r^2} \quad ⑥$$

由④知，面积为有理数的整边三角形的内切圆半径也为有理数.
本文给出已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形三边的求法.

## 1 面积为整数时

面积为整数的整边三角形叫做海伦三角形.

**定理1** 在海伦三角形中，$p,u,v,w \in \mathbf{N}^*$，$u < \sqrt{3}r$，$w > \sqrt{3}r$，$r > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**证明** 在海伦三角形中，$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$($S_\Delta \in \mathbf{N}^*$).

假设$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$($p \notin \mathbf{N}^*$)，则$p$是分母为2的既约分数，得$p-a$，$p-b$，$p-c$都是分母为2的既约分数，所以$S_\Delta \notin \mathbf{N}^*$，矛盾！所以$p \in \mathbf{N}^*$，又

由③,得 $u,v,w\in\mathbf{N}^*$.

可证在海伦三角形中,$a=b=c$ 不成立,所以 $u=v=w$ 不成立,得 $w>u$.

在海伦三角形中,假设 $u\geqslant\sqrt{3}r$,由 $u\leqslant v\leqslant w$,得 $v\geqslant\sqrt{3}r,w>\sqrt{3}r,\frac{r}{u}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{r}{v}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{r}{w}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $\arctan\frac{r}{u}+\arctan\frac{r}{v}+\arctan\frac{r}{w}<3\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}$,这与⑤矛盾!所以 $u<\sqrt{3}r$,同理可证 $w>\sqrt{3}r$.

由 $1\leqslant u<\sqrt{3}r$,得 $r>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**定理 2** 满足 $\frac{1}{\sqrt{3}}<r=\frac{n}{m}((m,n)=1)$ 的海伦三角形中,$u,v,w$ 满足:

$$\begin{cases}u\text{ 是小于}\sqrt{3}r\text{ 的正整数} & ⑦\\ m^2uv-n^2\text{ 是 }n^2(m^2u^2+n^2)\text{ 的不超过 }n\sqrt{n^2+m^2u^2}\text{ 的正因数} & ⑧\\ w=\dfrac{n^2(u+v)}{m^2uv-n^2} & ⑨\end{cases}$$

且 $u,v,w\in\mathbf{N}^*$.

**证明** 由定理 1 知⑦成立,由⑥知⑨成立.

由 $w=\frac{n^2(u+v)}{m^2uv-n^2}\geqslant v$,可证 $m^2uv-n^2\leqslant n\sqrt{n^2+m^2u^2}$.

由⑨知,$m^2uv-n^2\mid n^2u+n^2v$,所以 $m^2uv-n^2\mid m^2n^2u^2+m^2n^2uv$,$m^2uv-n^2\mid n^2(m^2u^2+n^2)$,得⑧成立.

定理 2 成立.

由定理2逐次试验求出 $u,v,w$ 后(由⑦得 $u=1,2,\cdots,[\sqrt{3}r]$,对每一个 $u$,由⑧求得 $v$ 的值,再由⑨求出 $w$ 的值,经过有限次可求出全部$(u,v,w)$的值),再由①可求出$(a,b,c)$.

定理 2 给出了《数学通讯》(1999 年第 3 期)问题征解第 73 题的一种解法.

## 2 面积为分数时

这里的分数不包括整数.

**定理 3** 在面积为正分数的整边三角形中,$2p,2u,2v,2w,4S_\Delta$ 均为奇数,$r$ 为分数,可设 $r=\frac{n}{2m}((m,n)=1,2\nmid mn)$,$u<\sqrt{3}r,w>\sqrt{3}r,r>\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

**证明** 因为 $S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 为分数,所以 $p(p-a)(p-b)(p-c)$ 为分数,得 $p$ 也为分数,所以 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 是分母为2的

既约分数,即 $2p$ 为奇数.

由 ③ 得 $u,v,w$ 也是分母为 2 的既约分数, 即 $2u,2v,2w$ 为奇数, 可得 $p(p-a)(p-b)(p-c)$ 是分母为 16 的既约分数,所以 $4S_\Delta$ 是奇数.

因为 $r=\dfrac{S_\Delta}{p}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4S_\Delta}{2p}=\dfrac{n}{m}((m,n)=1,2\nmid mn)$,所以 $r=\dfrac{n}{2m}$ 为分数.

同定理 1 的证明,有 $u<\sqrt{3}r,w>\sqrt{3}r$. 由 $2u\in\mathbf{N}^*$,得 $r>\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

**定理 4** 在 $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}<r=\dfrac{n}{2m}((m,n)=1,2\nmid mn)$ 的面积为分数的整边三角形中, $u'=2u,v'=2v,w'=2w$ 满足

$$\begin{cases}u' \text{ 是小于 } 2\sqrt{3}r \text{ 的奇数} & ⑩\\ m^2u'v'-n^2 \text{ 是 } n^2(m^2u'+n^2) \text{ 的不超过 } n\sqrt{n^2+m^2u'^2} \text{ 的正因数} & ⑪\\ w'=\dfrac{n^2(u'+v')}{m^2u'v'-n^2} & ⑫\end{cases}$$

且 $u',v',w'$ 均为正奇数.

**证明** 由定理 3 知 ⑩ 成立,由 ⑥ 知 ⑫ 成立.

由 $w'=\dfrac{n^2(u'+v')}{m^2u'v'-n^2}\geqslant v'$,可证 $m^2u'v'-n^2\leqslant n\sqrt{n^2+m^2u'^2}$.

由 ⑫ 知, $m^2u'v'-n^2\mid n^2u'+n^2v'$,可得 $m^2u'v'-n^2\mid n^2(m^2u'^2+n^2)$,得 ⑪ 成立. 定理 4 成立.

由定理 4 求出 $u',v',w'$ 后,由 ① 可求出 $a,b,c$.

由定理 1 ~ 4 可求出 $r$ 已知的面积为有理数的全部整边三角形的三边.

**定理 5** 内切圆半径为 $r$(已知) 的面积为有理数的整边三角形只有有限个.

一个复杂的问题是求出内切圆半径为 $r$(已知) 的海伦三角形的个数 $\mathrm{Her}(r)$, 比如, $r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $\mathrm{Her}(r)=0,\mathrm{Her}(1)=1,\mathrm{Her}(2)=5,\mathrm{Her}(3)=13$, $\mathrm{Her}(\dfrac{2}{3})=0$(参见文献[1],[2]),甚至求出内切圆半径为 $r$(已知) 的面积为有理数的整边三角形的个数 $\mathrm{Gan}(r)$. 文献[3] 定理 3 已给出了内切圆半径为 $r$ 的(本原) 直角海伦三角形的个数.

还有以下结论成立:

**定理 6** (1) 把内切圆半径为 $r=\dfrac{n}{m}((m,n)=1)$ 的面积为有理数的整边三角形各边扩大到 $m$ 倍后的三角形是内切圆半径为 $mr=n$ 的海伦三角形;

(2) 把内切圆半径为 $n$ 的海伦三角形各边缩小到 $m$ 倍后,若得到的是整边

三角形,则它就是内切圆半径为$\frac{n}{m}$的面积为有理数的整边三角形.

## 参考文献

[1] 曾否刚.内切圆半径为整数的海伦三角形[J].数学通讯,1996(4):27-29.
[2] 姚勇.周长是面积 $k$ 倍的海伦三角形[J].数学通讯,1996(2):29.
[3] 甘志国.已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数[J].数学通讯,1997(2):34-35.

# 再谈海伦三角形

面积为整数的整边三角形叫做海伦三角形，由文献[1]定理2可求出已知内切圆半径的全部海伦三角形（有限个），本文再给出两类特殊的海伦三角形（即下面的定理1，2，它们的证明略去），还给出了已知内切圆半径的直角海伦三角形与等腰海伦三角形的较好求法.

约定，下文中未注明的字母均表正整数.

## 1 两类海伦三角形

**定理1** 以 $t(a^2+b^2)$，$t(b^2+c^2)$，$t(c^2+a^2)$（其中 $a^2+b^2+c^2=d^2$）为边长的三角形是海伦三角形，其面积为 $abcdt^2$，内切圆半径为$\frac{tabc}{d}$.

**定理2** 以 $a(a+1)b^2+c^2$，$(a+1)(a^2b^2+c^2)$，$a[(a+1)^2b^2+c^2]$ 为边长的三角形是海伦三角形，其面积为 $abc(a+1)[a(a+1)b^2+c^2]$，内切圆半径为 $abc$.

**推论1** (1) 以 $a(a+1)+1$，$(a+1)(a^2+1)$，$a[(a+1)^2+1]$ 为边长的三角形是内切圆半径为 $a$ 的本原海伦三角形（三边互素的海伦三角形叫做本原海伦三角形），且 $5\nmid a-2$ 时，此三角形的三边两两互素；

(2) 以 $2b^2+1$，$2b^2+2$，$4b^2+1$ 为边长的三角形是内切圆半径为 $b$ 的本原海伦三角形，且此三角形的三边两两三素（当 $3\nmid b$ 时，此三角形的三边均不是3的倍数）；

(3) 以 $c^2+2$，$c^2+4$，$2c^2+2(2\nmid c)$ 为边长的三角形是内切圆半径为 $c$ 的本原海伦三角形，且此三角形的三边两两互素（当 $3\mid c$ 时，此三角形的三边均不是3的倍数）.

**推论2** 以$(2a^2+1)^2$，$(a^2+1)(4a^4+1)$，$a^2[4(a^2+1)^2+1]$（其中 $a^2+1=2b^2$）为边长的三角形是面积为完全平方数$[2ab(2a^2+1)]^2$的本原海伦三角形.

**注** (1) $a^2+b^2+c^2=d^2$ 的全部正整数解已有方法求出，比如 $a=p^2-q^2+r^2$，$b=2pr$，$c=2qr$，$d=p^2+q^2+r^2$ 就是其一部分正整数解.

(2) $a^2+1=2b^2$ 是一种佩尔方程，可求出其全部正整数解（有无限组）.

(3) 推论1(2)，(3) 分别给出了比文献[2]更好的结论，推论2给出了文献[3]例9的较好解答.

## 2 海伦直角三角形的求法

**定理 3** 海伦直角三角形(即整边直角三角形)的内切圆半径 $r\in\mathbf{N}^*$,海伦直角三角形的三边可表示为 $2kpq,k(p^2-q^2),k(p^2+q^2)$,其中 $p>q$,$2\nmid p+q,kq(p-q)=$ 内切圆半径 $r$.

**证明** 由勾股数组的求法,可设整边直角三角形的三边为 $2kpq,k(p^2-q^2),k(p^2+q^2)$,其中 $p>q,2\nmid p+q$.

得 $S_\Delta=k^2pq(p^2-q^2)(S_\Delta\in\mathbf{N}^*)$.

所以整边直角三角形均为海伦三角形,进而有海伦直角三角形即整边直角三角形,且 $r=\dfrac{S_\Delta}{s}=kq(p-q)(r\in\mathbf{N}^*)$,这里 $s$ 表示半周长.

由定理 3 可求出已知内切圆半径的全部海伦直角三角形.

## 3 等腰海伦三角形的求法

由文献[4]定理 1,可求出已知的内切圆半径为整数的等腰海伦三角形(在定理 1[4] 中可得 $m-n\mid d$ 或 $n\mid d$,从而可把定理 1[4] 叙述得更清楚明白),用以下定理 4 求已知内切圆半径的等腰海伦三角形更简捷.

**定理 4** 内切圆半径为 $\dfrac{n}{m}((m,n)=1)$ 的三角形是等腰海伦三角形的充要条件是

$$(1)\begin{cases}n=hn_1(m^2d^2-n_1^2)\\ \text{腰 } a=hd(m^2d^2+n_1^2)\\ \text{底 } b=2hd(m^2d^2-n_1^2)\end{cases}$$

其中 $(m,h)=(m,n_1)=(d,n_1)=1,md>n_1,2\nmid md+n_1$;

$$\text{或}(2)\begin{cases}n=2hn_1(md-n_1)(md-2n_1)\\ \text{腰 } a=hd[(md-n_1)^2+n_1^2]\\ \text{底 } b=4hdn_1(md-n_1)\end{cases}$$

其中 $(m,h)=(m,n_1)=(d,n_1)=1,md>2n_1,2\nmid md$.

**证明** 必要性.

设内切圆半径为 $\dfrac{n}{m}$ 的等腰海伦三角形的腰、底、半周长、面积分别为 $a,b,s,S_\Delta$.

因为 $s=\dfrac{1}{2}(a+a+b)=a+\dfrac{1}{2}b(s\in\mathbf{N}^*)$(由文献[1]定理 1 知),所以 $b=2c(c\in\mathbf{N}^*),s=a+c$.

$$S_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-a)(s-b)} = c\sqrt{a^2-c^2}(S_\Delta \in \mathbf{N}^*)$$

所以 $a^2 - c^2 = t^2(t \in \mathbf{N}^*)$,可设

$$(1)\begin{cases} t = 2d_1m_1n_1 \\ c = d_1(m_1^2 - n_1^2) \\ a = d_1(m_1^2 + n_1^2) \end{cases} \text{或}(2)\begin{cases} t = d_1(m_1^2 - n_1^2) \\ c = 2d_1m_1n_1 \\ a = d_1(m_1^2 + n_1^2) \end{cases}$$

其中 $d_1, m_1, n_1 \in \mathbf{N}^*, (m_1, n_1) = 1, m_1 > n_1, 2 \nmid m_1 + n_1$.

(1) 得 $\frac{n}{m} = \frac{S_\Delta}{s} = \frac{ct}{a+c} = \frac{d_1n_1(m_1^2 - n_1^2)}{m_1}$ ①

可证 $(n_1(m_1^2 - n_1^2), m_1) = 1$ ②

设 $(m_1, d_1) = d, m_1 = m'd, d_1 = hd, (m', h) = 1$ ③

由 ①,得 $\frac{n}{m} = \frac{hn_1(m'^2d^2 - n_1^2)}{m'}$ ④

由 ②,③ 知 $(hn_1(m'd^2 - n_1^2), m') = 1$,所以 ④ 是两个既约分数相等,得

$$\begin{cases} n = hn_1(m'^2d^2 - n_1^2) \\ m = m' \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} n = hn_1(m^2d^2 - n_1^2) \\ \text{腰 } a = hd(m^2d^2 + n_1^2) \\ \text{底 } b = 2hd(m^2d^2 - n_1^2) \end{cases}$$

其中 $(m, h) = (m, n_1) = (d, n_1) = 1, md > n_1, 2 \nmid md + n_1$.

(2) 得 $\frac{n}{m} = \frac{2d_1m_1n_1(m_1 - n_1)}{m_1 + n_1}$ ⑤

可证 $(2m_1n_1(m_1 - n_1), m_1 + n_1) = 1$ ⑥

设 $(m_1 + n_1, d_1) = d, m_1 + n_1 = m'd, d_1 = hd, (m', h) = 1$ ⑦

由 ⑤,得

$$\frac{n}{m} = \frac{2hn_1(m'd - n_1)(m'd - 2n_1)}{m'}$$ ⑧

由 ⑥,⑦ 知 $(2hn_1(m'd - n_1)(m'd - 2n_1), m') = 1$,所以 ⑧ 是两个既约分数相等,得

$$\begin{cases} n = 2hn_1(m'd - n_1)(m'd - 2n_1) \\ m = m' \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} n = 2hn_1(md - n_1)(md - 2n_1) \\ \text{腰 } a = hd[(md - n_1)^2 + n_1^2] \\ \text{底 } b = 4hdn_1(md - n_1) \end{cases}$$

其中 $(m, h) = (m, n_1) = (d, n_1) = 1, md > 2n_1, 2 \nmid md$.

充分性.

可证满足条件(1) 或(2) 的三角形是内切圆半径为$\frac{n}{m}$ 的等腰海伦三角形.

**推论3** 除开 $n = 3$且($m = 1$或2)外,不存在内切圆半径为$\frac{n}{m}$($(m,n) = 1$,$n$ 是素数) 的等腰海伦三角形.

文献[5] 定理3 已给出已知内切圆半径的直角海伦三角形的个数,要求出已知内切圆半径的等腰海伦三角形的个数是很困难的.

## 参考文献

[1] 甘志国.已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形[C] // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998,336-346.

[2] 黄拔萃.三边均不是3 的倍数的本原海伦三角形[J].数学通讯,1995(5):24.

[3] 余红兵.谈谈构造法解题[J].数学通讯,1994(7):34-38.

[4] 曾丕刚.内切圆半径为整数的海伦三角形[J].数学通讯,1996(4):27-29.

[5] 甘志国.已知内切圆半径的(本原) 勾股形的个数[J].数学通讯,1997(2):34-35.

# 浅探 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 为完全平方数的条件

约定,本文中表示指数的式子均取正整数值,用 $J, J_+, J_-$ 分别表示奇数集,正奇数集,负奇数集.

文献[1]研究了 $2^a+2^b+2^c$ 为完全平方数的条件,本文对 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 为完全平方数的条件作些浅探,为节省篇幅,文中有些结论未作证明(它们的证明是容易的).

## 1 几个简捷完整的结论

**定理 1** (1)$2^a+2^a$ 为完全平方数 $\Leftrightarrow 2 \nmid a$;

(2)$2^a+2^b(a>b)$ 为完全平方数 $\Leftrightarrow 2 \mid b$ 且 $a=b+3$;

(3)$2^a-2^b(a>b)$ 为完全平方数 $\Leftrightarrow 2 \mid b$ 且 $a=b+1$.

由定理 1,要研究 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 为完全平方数的条件,只需研究 $a,b,c$ 两两不等的情形. $2^a \pm 2^b \pm 2^c$($a,b,c$ 两两不等)只包括三种类型的数:

(1)$2^a+2^b+2^c$(不妨设 $a>b>c$);

(2)$2^a-2^b-2^c$(不妨设 $b>c$),它若为完全平方数,则 $a>b>c$;

(3)$2^a+2^b-2^c$(不妨设 $a>b$),包括 $2^a+2^b-2^c(a>b>c)$, $2^a-2^c+2^b(a>c>b)$(可证 $c>a>b$ 时, $2^a+2^b-2^c<2^a+2^a-2^{a+1}=0$).

所以只需研究: $2^a+2^b+2^c(a>b>c)$, $2^a-2^b-2^c(a>b>c)$, $2^a+2^b-2^c(a>b>c)$, $2^a-2^b+2^c(a>b>c)$ 这四种情形为完全平方数的条件.

**定理 2** $2^a-2^b-2^c(a>b>c)$ 为完全平方数 $\Leftrightarrow 2 \mid c$ 且 $a=c+2, b=c+1$.

**定理 3** $2^a+2^b-2^c(a>b>c)$ 为完全平方数 $\Leftrightarrow 2 \mid c$ 且 $a=c+3, b=c+1$.

**定理 4** (1)若 $2^a+2^b+2^c(a>c, b>c)$ 为完全平方数,则 $2 \mid c$;且 $a>b>c$ 时, $b-c \geqslant 3$.

(2)$2^a+2^b+2^c(a>c, b>c)$ 为完全平方数 $\Leftrightarrow 2 \mid c$ 且 $2^{a-c}+2^{b-c}+1$ 为完全平方数.

(3) 当 $a=c+5$ 或 $c+9$, $b=c+4$, $2 \mid c$ 时, $2^a+2^b+2^c$ 为完全平方数.

(4) 当 $a=2b-2c-2(a \in \mathbf{N}^*)$, $2 \mid c$ 时, $2^a+2^b+2^c$ 为完全平方数.

(5)$2^a+2^b+2^c(b=c+3,2\mid c)$为完全平方数$\Leftrightarrow a=c+4$.

定理4(4)即文献[1]的命题,应当指出,文献[1]用此结论解答了文献[1]中的全部例题,解答均不完整(因为命题[1]只是充分条件).由本文定理4(5)知,文献[1]的例1,2,5的答案均唯一,即文献[1]给出的答案.例5[1]解答中理由的叙述不清,明明是"$5+7+1=13$",却写成"$<13$","$>13$",例4[1]的答案正确,解答见文献[2],例6是否还有其他答案,仅由文献[1]还不能肯定.

由定理4(2),要研究$2^a+2^b+2^c(a>b>c)$为完全平方数的条件,只需研究$2^k+2^l+1(k>l)$为完全平方数的条件(参见本文第2节).

**定理5** (1)若$2^a-2^b+2^c(a>c,b>c)$为完全平方数,则$2\mid c$,且$a>b>c$时,$b-c\geqslant 3$.

(2)$2^a-2^b+2^c(a>c,b>c)$为完全平方数$\Leftrightarrow 2\mid c$且$2^{a-c}-2^{b-c}+1$为完全平方数.

(3)当$a=c+5$或$c+7$,$b=c+3$,$2\mid c$时,$2^a-2^b+2^c$为完全平方数.

(4)当$a=2b-c-2(a\in\mathbf{N}^*)$,$2\mid c$时,$2^a-2^b+2^c$为完全平方数.

由定理5(2),要研究$2^a-2^b+2^c(a>b>c)$为完全平方数的条件,只需研究$2^k-2^l+1(k>l)$为完全平方数的条件(见本文第3节).

## 2 $2^k+2^l+1(k>l)$为完全平方数的条件

**定理6** $2^k+2^l+1(k>l)$为完全平方数(则$l\geqslant 3$)的充要条件是

(1)$k=2l-2$(此时$2^k+2^l+1=(2^{l-1}+1)^2$);

或(2)$k=5$或$9$,$l=4$(此时$2^k+2^l+1=7^2$或$23^2$);

或(3)存在$y\in J_+$,使得$2^{4l-8}y^2+(2^{3l-4}-2^{2l-3}+2^{l-1}+1)y+2^{2l-2}-2^l+5-2^{k-4l+6}=0$(此时$2^k+2^l+1=(2^{4l-7}y+2^{3l-4}-2^{2l-3}+2^{l-1}+1)^2$).

**证明** 必要性.

设$2^k+2^l+1=x^2$,$2^{k-l}+1=\dfrac{(x+1)(x-1)}{2^l}$.

因为$2^l\parallel x^2-1$,$8\mid x^2-1$,所以$l\geqslant 3$.

(1)当$2\parallel x+1$时,$2^{l-1}\parallel x-1$,设

$$x=2^{l-1}x_1+1(x_1\in J_+),2^{k-l}=2^{l-2}x_1^2+x_1-1 \quad ①$$

当$x_1=1$时,$k=2l-2$,此时$2^k+2^l+1=(2^{l-1}+1)^2$.

当$x_1\geqslant 2$时,可证$2^{l-2}x_1^2+x_1-1>2^{l-2}$,所以由①得$k-l>l-2$,$2^{l-2}\parallel x_1-1$.设$x_1=2^{l-2}x_2+1(x_2\in J_+)$.由①,得

$$2^{k-2l+2}=(2^{l-2}x_2+1)^2+x_2=2^{2l-4}x_2^2+(2^{l-1}+1)x_2+1>2^{2l-4} \quad ②$$

所以$k-2l+2>2l-4$,有$2^{2l-4}\parallel(2^{l-1}+1)x_2+1$,设

$$(2^{l-1}+1)x_2+1=2^{2l-4}x_3(x_3\in J_+)$$

所以 $\begin{cases}x_2=2^{2l-4}y+2^{l-1}-1\\x_3=(2^{l-1}+1)y+4\end{cases}$ （由 $x_3\in J_+$，得 $y\in J_+$）

又由 ②，可得

$$2^{k-4l+6}=(2^{2l-4}y+2^{l-1}-1)^2+(2^{l-1}+1)y+4 \quad ③$$

$$2^{4l-8}y^2+(2^{3l-4}-2^{2l-3}+2^{l-1}+1)y+2^{2l-2}-2^l+5-2^{k-4l+6}=0 \quad ④$$

此时，由 $2^k+2^l+1=x^2$ 及 $x, x_1, x_2$ 的表达式可得

$$2^k+2^l+1=(2^{4l-7}y+2^{3l-4}-2^{2l-3}+2^{l-1}+1)^2 \quad ⑤$$

(2) 当 $2\parallel x-1$ 时，$2^{l-1}\parallel x+1$，设 $x=2^{l-1}x_1-1(x_1\in J_+)$，得

$$2^{k-1}=2^{l-2}x_1^2-(x_1+1) \quad ⑥$$

当 $x_1=1$ 时，$2^{k-l-1}=2^{l-3}-1$，所以 $k=5, l=4$，此时 $2^k+2^l+1=7^2$.

当 $x_1\geqslant 2$ 时，可证 $2^{l-2}x_1^2-(x_1+1)>2^{l-2}$，由 ⑥ 得

$$2^{l-2}\parallel x_1+1, x_1=2^{l-2}x_2-1(x_2\in J_+)$$

$$2^{k-2l+2}=(2^{l-2}x_2-1)^2-x_2=2^{2l-4}x_2^2-(2^{l-1}+1)x_2+1 \quad ⑦$$

当 $x_2=1$ 时，$2^{k-3l+3}=2^{l-3}-1, k=9, l=4$，此时 $2^k+2^l+1=23^2$.

当 $x_2\geqslant 2$ 时，可证 $2^{2l-4}x_2^2-(2^{l-1}+1)x_2+1>2^{2l-4}$，由 ⑦ 得，$k-2l+2>2l-4$（即 $k>4l-6$），所以 $2^{2l-4}\parallel(2^{l-1}+1)x_2-1$，设 $(2^{l-1}+1)x_2-1=2^{2l-4}x_3(x_3\in J_+)$. 所以

$$\begin{cases}x_2=-2^{2l-4}y-2^{l-1}+1\\x_3=-(2^{l-1}+1)y-4\end{cases}\quad (y\in J_-)$$

由 ⑦ 可得式 ③ 在这里也成立，还有 ④，⑤ 在这里也成立.

综上所述，必要性成立.

由以上证明，充分性也成立.

由定理 6 及其证明，还有

若 $2^k+2^l+1(k>l)$ 为完全平方数，除定理 6(1)，(2) 外，则 $k>4l-6$.

## 3 $2^k-2^l+1(k>l)$ 为完全平方数的条件

**定理 7** $2^k-2^l+1(k>l)$ 为完全平方数（则 $l\geqslant 3$）的充要条件是

(1) $k=2l-2$（此时 $2^k-2^l+1=(2^{l-1}-1)^2$）；

若 (2) $k=5$ 或 $7, l=3$（此时 $2^k-2^l+1=5^2$ 或 $11^2$）；

若 (3) 存在 $y\in J$，使得 $2^{4l-8}y^2+(2^{3l-4}+2^{2l-3}+2^{l-1}-1)y+2^{2l-2}+2^l+5-2^{k-4l+6}=0$（此时 $2^k-2^l+1=(2^{4l-7}y+2^{3l-4}+2^{2l-3}+2^{l-1}-1)^2$）.

**证明** 与定理 6 的证明少有不同，简述如下：

必要性.

设 $2^k-2^l+1=x^2, 2^{k-l}-1=\dfrac{(x+1)(x-1)}{2^l}$,有 $l\geqslant 3$.

(1) 当 $2\parallel x+1$ 时,$2^{l-1}\parallel x-1, x=2^{l-1}x_1+1(x_1\in J_+), 2^{k-l}=2^{l-2}x_1^2+x_1+1>2^{l-2}$ ①′

所以 $2^{l-2}\parallel x_1+1, x_1=2^{l-2}x_2-1(x_2\in J_+)$.

由式 ①′ 得

$$2^{k-2l+2}=(2^{l-2}x_2-1)^2+x_2=2^{2l-4}x_2^2-(2^{l-1}-1)x_2+1 \qquad ②'$$

当 $x_2=1$ 时,得 $2^{k-2l+1}=2^{2l-5}-2^{l-2}+1$,有

$2l-5\geqslant l-2$(因为 $l\geqslant 3$),$k-2l+1<l-2$(假设 $k-2l+1\geqslant l-2$,得 $2^{l-2}\parallel 1, l=2$),所以 $k-2l+1=0$,进而有 $l=3, k=5$,此时 $2^k-2^l+1=5^2$.

当 $x_2\geqslant 2$ 时,由式 ②′ 得

$$2^{2l-4}\parallel (2^{l-1}-1)x_2-1, (2^{l-1}-1)x_2-1=2^{2l-4}x_3(x_3\in J_+)$$

所以
$$\begin{cases}x_2=-2^{2l-4}y-2^{l-1}-1\\ x_3=-(2^{l-1}-1)y-4\end{cases}\quad (y\in J_+)$$

又由式 ②′,得

$$2^{k-4l+6}=(2^{2l-4}y+2^{l-1}+1)^2+(2^{l-1}-1)y+4 \qquad ③'$$

$$2^{4l-8}y^2+(2^{3l-4}+2^{2l-3}+2^{l-1}-1)y+2^{2l-2}+2^l+5-2^{k-4l+6}=0 \qquad ④'$$

此时
$$2^k-2^l+1=(2^{4l-7}y+2^{3l-4}+2^{2l-3}+2^{l-1}-1)^2 \qquad ⑤'$$

(2) 当 $2\parallel x-1$ 时,$2^{l-1}\parallel x+1, x=2^{l-1}x_1-1(x_1\in J_+)$

$$2^{k-l}=2^{l-2}x_1^2-(x_1-1) \qquad ⑥'$$

当 $x_1=1$ 时,$k=2l-2$,此时 $2^k-2^l+1=(2^{l-1}-1)^2$.

当 $x_1\geqslant 2$ 时,由式 ⑥′,得 $2^{l-2}\parallel x_1-1, x_1=2^{l-2}x_2+1(x_2\in J_+)$,所以

$$2^{k-2l+2}=2^{2l-4}x_2^2+(2^{l-1}-1)x_2+1 \qquad ⑦'$$

有
$$2^{2l-4}\parallel (2^{l-1}-1)x_2+1, (2^{l-1}-1)x_2+1=2^{2l-4}x_3(x_3\in J_+)$$

所以
$$\begin{cases}x_2=2^{2l-4}y+2^{l-1}+1\\ x_3=(2^{l-1}-1)y+4\end{cases}\quad (y\in J_+\cup\{-1\})$$

当 $y=-1$ 时,得 $l=3, x_3=x_2=1, x_1=3, x=11, k=7$,此时 $2^k-2^l+1=11^2$.

又由式 ⑦′,可得式 ③′ 在这里成立,还有式 ④′,⑤′ 在这里也成立.

综上所述,必要性成立.

由以上证明,充分性也成立.

由定理 7 及其证明，还有：

$2^k - 2^l + 1(k > l)$ 为完全平方数，除定理 7(1)，(2) 外，则 $k > 4l - 6$.

最后，笔者提出如下问题：

**问题 1**　研究 $\sum_{i=1}^{k} p^{a_i}$（$k,p$ 已知；$k \geqslant 2$；$p = 2$，素数，或正整数）为完全 $n$ 次方数的条件（$n$ 已知，$n \geqslant 2$）.

**问题 2**　研究 $2^x + a = y^n$（$a$ 是已知的非零整数，$n$ 已知，$n \geqslant 2$）的正整数解 $(x, y)$.

## 参考文献

[1] 孙哲. $2^a + 2^b + 2^c$ 为完全平方数的充分条件[J]. 数学通讯，1994(4)：19-20.
[2] 顾海润. 应用判别式的一个是非问题[J]. 数学通讯，1994(4)：7-8.

# 浅探亲和数

## 1 亲和数的定义及史料

通常用 $\sigma(n)$ 表示正整数 $n$ 的全部正因数之和.关于 $\sigma(n)$ 的求法,有以下结论[1]:$\sigma(1)=1$;当 $n\geqslant 2$ 时,设 $n$ 的标准分解式为 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$,$i=1,2,\cdots,k$),则 $\sigma(n)=\prod\limits_{i=1}^{k}\dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$.

**定义** 如果正整数 $a,b$ 满足 $\sigma(a)=\sigma(b)=a+b$,则称 $a,b$ 是一对亲和数,亲和数也称相亲数,互完数.

文献[2]~[4]介绍了亲和数的有关历史资料,文献[2]还列举了 100 000 以内的共 13 对亲和数.

## 2 一种构造亲和数的方法

下面的定理 1 给出了一种构造亲和数的方法.

**定理 1** 若 $p_1,p_2$ 是两个不同的奇素数,$\dfrac{(p_1+1)(p_2+1)}{(p_1+1)+(p_2+1)}=2^n$($n\in\mathbf{N}^*$),且 $(p_1+1)(p_2+1)-1=p_3$ 也是奇素数,则 $2^np_1p_2,2^np_3$ 是一对亲和数.

**证明** 可得 $\sigma(2^np_1p_2)=(2^{n+1}-1)(p_1+1)(p_2+1)$,$\sigma(2^np_3)=(2^{n+1}-1)(p_3+1)$.

由题设还可得 $\sigma(2^np_1p_2)=\sigma(2^np_3)=2^np_1p_2+2^np_3$,所以 $2^np_1p_2,2^np_3$ 是一对亲和数.

**定理 2** 若 $p_1,p_2$ 是两个不同的奇素数,$(p_1+1)(p_2+1)-1=p_3$ 也是奇素数,则至多存在一个正整数 $n$,使 $2^np_1p_2,2^np_3$ 是一对亲和数,且 $\dfrac{(p_1+1)(p_2+1)}{(p_1+1)+(p_2+1)}=2^n$,$2^n<p_1$,$2^n<p_2$,$\dfrac{\sqrt{4p_1+5}-1}{2}<p_2\leqslant p_1^2+p_1-3$,$\dfrac{\sqrt{4p_2+5}-1}{2}<p_1\leqslant p_2^2+p_2-3$.

**证明** 假设还存在 $m\in\mathbf{N}^*$($m\neq n$,不妨设 $m<n$),使 $2^mp_1p_2,2^mp_3$ 也是

一对亲和数,则

$$\sigma(2^n p_3) = 2^n p_1 p_2 + 2^n p_3$$

$$(2^{n+1} - 1)(p_3 + 1) = 2^n(p_1 p_2 + p_3)$$

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \frac{p_1 p_2 + p_3}{p_3 + 1}$$

同理,有$\frac{2^{m+1} - 1}{2^m} = \frac{p_1 p_2 + p_3}{p_3 + 1}$,所以$\frac{2^{n+1} - 1}{2^{m+1} - 1} = 2^{n-m}$.

而此式不可能成立,所以假设错误,即至多存在一个正整数 $n$,使 $2^n p_1 p_2$,$2^n p_3$ 是一对亲和数.

当 $2^n p_1 p_2$,$2^n p_3$ 是一对亲和数时,由题设可证得

$$p_2 = \frac{p_1(2^n - 1) + 2^{n+1} - 1}{p_1 + 1 - 2^n}$$

所以

$$\frac{(p_1 + 1)(p_2 + 1)}{(p_1 + 1) + (p_2 + 1)} = 2^n$$

并且有 $p_2(p_1 + 1 - 2^n) = p_1(2^n - 1) + 2^{n+1} - 1 > 0$,所以 $p_1 + 1 - 2^n \geqslant 1$,$p_1 \geqslant 2^n$,得 $p_1 > 2^n$.同理有 $p_2 > 2^n$.

还可得$\frac{(p_1 + 1)(p_2 + 1)}{(p_1 + 1) + (p_2 + 1)} = 2^n < p_2$,所以 $p_2^2 + p_2 - (p_1 + 1) > 0$,$p_2 > \frac{\sqrt{4p_1 + 5} - 1}{2}$.

同理,有 $p_1 > \frac{\sqrt{4p_2 + 5} - 1}{2}$,所以 $p_2 < p_1^2 + p_1 - 1$,又 $p_2$ 与 $p_1^2 + p_1 - 1$ 均为奇数,所以 $p_2 \leqslant p_1^2 + p_1 - 3$.

得$\frac{\sqrt{4p_1 + 5} - 1}{2} < p_2 \leqslant p_1^2 + p_1 - 3$.

同理,有$\frac{\sqrt{4p_2 + 5} - 1}{2} < p_1 \leqslant p_2^2 + p_2 - 3$.

由定理 2,得

**推论 1**　由一个已知的素数 $p_1$,用定理 1 只能得到有限对亲和数.

选 $p_1 = 3$,由定理 2 得 $p_2 \leqslant 9$,可以验证此时不能得到亲和数.

选 $p_1 = 5$,由定理 2 得 $p_2 \leqslant 27$,此时只能得到一对亲和数 220,284($p_1 = 5$,$p_2 = 11$,$p_3 = 71$,$n = 2$),这是最小的一对亲和数.

选 $p_1 = 7$,由定理 2 得 $p_2 \leqslant 53$,此时不能得到亲和数.

在定理 1 中,令 $p_2 = 2^m(p_1 + 1) - 1(m \in \mathbf{N}^*)$,可得

**推论 2**　若 $p_1 = 2^{n-m}(2^m + 1) - 1$,$p_2 = 2^n(2^m + 1) - 1$,$p_3 = 2^{2n-m}(2^m +$

$1)^2-1$ 均为奇素数(其中 $m,n\in\mathbf{N}^*,m<n$),则 $2^np_1p_2,2^np_3$ 是一对亲和数.

**推论 3** 若 $p=3\cdot2^n-1,q=3\cdot2^{n-1}-1,r=3^2\cdot2^{2n-1}-1$ 均为素数(其中 $n\in\mathbf{N}^*,n>1$),则 $2^npq,2^nr$ 是一对亲和数.

推论 3 即阿拉伯数学家伊本柯拉(Ibn kurra,836—901)发明的一种求亲和数的方法(见文献[2]第 22 页),也可以说本文的方法(定理 1,推论 2)是伊本柯拉方法的推广.

笔者已验证,在文献[2 ~ 4]列举的亲和数中,所有形如 $2^npq,2^nr$($n\in\mathbf{N}^*$,$p,q,r$ 是互不相同的奇素数)的亲和数均可由推论 3 得到:

按大小顺序的第 8 对亲和数 17 296,18 418 即推论 3 中 $n=4$ 的情形,$n=7$ 时得到亲和数 9 363 584,9 437 056.

## 3 亲和数的奇偶性研究

人们猜测:一对亲和数的奇偶性是相同的.人们已验证,此猜测在 $3\times10^9$ 以内都是正确的[3].

**定理 3** 奇偶性不同的一对亲和数可表示为 $2^\alpha p^2$ 与 $q^2$,其中 $\alpha\in\mathbf{N}^*,p,q$ 为奇数.

**证明** 设奇偶性不同的一对亲和数为 $2a$ 与 $b$,$b$ 为奇数,所以 $\sigma(2a)=\sigma(b)=2a+b$,有 $2\nmid\sigma(2a),2\nmid\sigma(b)$.

设 $2a,b$ 的标准分解式分别为

$2a=2^\alpha p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k},b=q_1^{\beta_1}\cdots q_l^{\beta_l}$,其中 $p_i$ 是互不相同的奇素数,$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}^*$,$i=1,\cdots,k$;$q_j$ 是互不相同的奇素数,$\beta_j\in\mathbf{N}^*,j=1,\cdots,l$.

$$\sigma(2a)=(2^{\alpha+1}-1)\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1},\sigma(b)=\prod_{j=1}^{l}\frac{q_j^{\beta_j+1}-1}{q_j-1}$$

因为 $2\nmid\sigma(2a)$,所以 $2\nmid\dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}(i=1,\cdots,k)$,可得 $\alpha_i+1$ 为奇数,$\alpha_i$ 为偶数,所以 $2a=2^\alpha p^2$.同理可得 $b=q^2$,其中 $p,q$ 均为奇数.

由文献[3]给出的 10 对亲和数,笔者提出

**猜想** 若 $a,b$ 是一对亲和数,则

(1)$a$ 与 $b$ 的位数相同;

(2)$a$ 与 $b$ 的首位数相同;

(3)$(a,b)>1$.

最后,笔者顺便指出,文献[4]中亲和数的定义是错误的,文献[4]说 9 363 548,9 437 506 是一对亲和数也是不对的,应改为 9 363 584,9 437 056 是一对亲和数(见文献[3]).

# 参考文献

[1] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.
[2] 洪伯阳,叶桂斌.相亲数及其推广[J].数学通讯,1993(5):22-24.
[3] 单墫.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.
[4] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992.

# 平方 $m$ 重连整数

## 1 引言

**定义** $A$ 表示 $k$ 位正整数(首位数字不为 0),$m \geqslant 2$,形如$\overline{\underbrace{A,\cdots,A}_{m个A}} = A \cdot [10^{(m-1)k} + \cdots + 10^k + 1] = A \cdot \dfrac{10^{mk}-1}{10^k-1}$的数叫做 $m$ 重连整数,二重连整数简称连整数,是完全平方数的 $m$ 重连整数叫做平方 $m$ 重连整数,是完全平方数的连整数叫做平方连整数.

约定,本文中未注明的字母均表示正整数,用 $L_{2,m,k}$ 表示所有的$mk$ 位平方 $m$ 重连整数组成的集合,$L_{2,2,k}$ 表示所有的 $2k$ 位平方连整数组成的集合,"$m$ 重连整数"中有 $m \geqslant 2$.

文献[1]首先给出一个构造平方连整数的方法,文献[2]推广了这种方法,并且文献[2]的方法还给出了一类平方连整数的算术平方根与循环小数的联系.本文对平方 $m$ 重连整数作些研究,得到了存在平方 $m$ 重连整数的简明充要条件,求出了全部 $mk$ 位平方 $m$ 重连整数,还得到了平方连整数与循环小数的联系.

## 2 引理

**引理 1**[3] $\dfrac{10^{mk}-1}{10^k-1}(m \geqslant 2)$ 不是完全平方数.

**引理 2** 若 $p \mid 10^k+1$,则 $p^2 \mid 10^{kp(2n-1)}+1$.

**证明** 只需证明 $p^2 \mid 10^{kp}+1$.

可设 $10^k+1 = pa$,$p$ 是奇数.

当 $p=1$ 时,要证结论成立.

当 $p \geqslant 3$ 时,得

$$10^{kp}+1 = 1+(-1+pa)^p = C_p^1(-1)^{p-1}(pa) + C_p^2(-1)^{p-2}(pa)^2 + \cdots + (pa)^p$$

所以 $p^2 \mid 10^{kp}+1$,即当 $p \geqslant 3$ 时要证结论也成立.

(还可对 $s$ 用数学归纳法证得:

若 $p$ 是奇素数，$r\in\mathbf{N}^*$，$p^r\parallel 10^\beta+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，$2\nmid n$，$p\nmid n$，$s\in\mathbf{N}$，则 $p^{r+s}\parallel 10^{\beta\cdot p^s n}+1$.

若 $p\mid 10^k+1(k\in\mathbf{N}^*)$，$p$ 是奇素数，又设 $\beta$ 是满足 $p\mid 10^\beta+1$ 的最小正整数，且 $p^r\parallel 10^\beta+1(r\in\mathbf{N}^*)$，再设 $p^s\parallel \frac{k}{\beta}$，则 $p^{r+s}\parallel 10^k+1$.）

**引理 3**[4]　$(10^a-1,10^b-1)=10^{(a,b)}-1$.

**引理 4**　若 $\alpha,\beta\in\mathbf{N}$，$2^\alpha\parallel a$（指 $2^\alpha\mid a$ 且 $2^{\alpha+1}\nmid a$），$2^\beta\parallel b$，则

(1) 当 $\alpha=\beta$ 时，$(10^a+1,10^b+1)=10^{(a,b)}+1$；

(2) 当 $\alpha\neq\beta$ 时，$(10^a+1,10^b+1)=1$.

**证明**　有 $(10^a+1,10^b+1)\mid(10^{2a}-1,10^{2b}-1)$，由引理 3，得

$$(10^a+1,10^b+1)\mid(10^{(a,b)}+1)(10^{(a,b)}-1) \quad ①$$

又 $(10^a+1,10^{(a,b)}-1)\mid(10^a+1,10^a-1)$，$(10^a+1,10^a-1)=1$，所以 $(10^a+1,10^{(a,b)}-1)=1$，由式 ① 可得

$$(10^a+1,10^b+1)=10^{(a,b)}+1 \quad ②$$

(1) 因为 $2^\alpha\parallel a$，$2^\alpha\parallel b$，所以 $2^\alpha\parallel(a,b)$，$\frac{a}{(a,b)}$，$\frac{b}{(a,b)}$ 均为奇数.

所以 $10^{(a,b)}+1\mid 10^{(a,b)\cdot\frac{a}{(a,b)}}+1$，即 $10^{(a,b)}+1\mid 10^a+1$. 同理 $10^{(a,b)}+1\mid 10^b+1$，所以 $10^{(a,b)}+1\mid(10^a+1,10^b+1)$. 又由式 ②，得结论 (1) 成立.

(2) 不妨设 $\alpha>\beta$. 因为 $2^\alpha\parallel a$，$2^\beta\parallel b$，$\alpha>\beta$，所以 $2^\beta\parallel(a,b)$，$2^{\alpha-\beta}\parallel\frac{a}{(a,b)}$，可设 $a=(a,b)\cdot 2c$.

假设存在素数 $p\mid(10^{(a,b)}+1,10^a+1)$，得 $p>2$，$10^{(a,b)}+1=pr$，$p\mid 10^a+1$.

$$10^a+1=(10^{(a,b)}+1-1)^{2c}+1=(pr-1)^{2c}+1=PR+2$$

所以 $p\mid 2$，这与 $p>2$ 矛盾！所以不存在素数 $p\mid(10^{(a,b)}+1,10^a+1)$，即 $(10^{(a,b)}+1,10^a+1)=1$. 又由式 ②，得结论 (2) 成立.

还可证明，把引理 4 中的"10"换为"$2u$"，所得结论也成立.

**引理 5**　若存在正整数 $k$，使 $p\mid 10^k+1$，且 $\frac{r}{p}<1$，则

(1) 存在最小的正整数 $t$，使 $p\mid 10^t+1$；

(2) $\frac{r}{p}$ 可化成纯循环小数；

(3) $\frac{r}{p}$ 的循环节长度是偶数 $2t$；

(4) $k=t(2k_1-1)$.

**证明**　(1)，(2) 显然成立.

(3) 由 $p \mid 10^k+1$，得 $p \mid 10^{2k}-1$，所以存在最小的正整数 $v$，使 $p \mid 10^v-1$. 又 $p \mid 10^t+1$，所以 $p \mid 10^v+10^t$.

显然 $v \neq t$. 假设 $v < t$，得 $p \mid 10^{t-v}+1$，这与 $p \mid 10^t+1$（$t$ 最小）矛盾！所以 $v > t$，得 $p \mid 10^{v-t}+1$，$p \mid (10^{v-t}+1, 10^t+1)$.

因为 $p > 1$，所以 $(10^{v-t}+1, 10^t+1) > 1$，由引理 4，得 $(10^k+1, 10^t+1) = 10^{(k,t)}+1$，且 $k, t$ 的标准分解式中 2 的指数相等.

因为 $p \mid 10^t+1$（$t$ 最小），$(k,t) \leqslant t$，所以 $(k,t)=t$，$t \mid k$，$\frac{k}{t} \in \mathbf{N}^*$，又 $k$，$t$ 的标准分解式中 2 的指数相等，所以 $\frac{k}{t}$ 为奇数，可设 $k = t(2k_1-1)$.

**引理 6**　若 $p \mid 10^k+1$，$\frac{r}{p} < 1$，$\frac{r}{p}$ 的第一个循环节是 $a_1\cdots a_{2k}$，则

(1) $a_i + a_{k+i} = 9\ (i = 1,2,\cdots,k)$；

(2) $\frac{r}{p} = \frac{\overline{a_1\cdots a_{2k}}}{10^{2k}-1} = \frac{\overline{a_1\cdots a_k}+1}{10^k+1}$.

**证明**　由竖式加法，可证得

$$\overline{b_1\cdots b_k(9-b_1)\cdots(9-b_k)} + (\overline{b_1\cdots b_k}+1) = (\overline{b_1\cdots b_k}+1)\cdot 10^k$$

所以

$$\overline{b_1\cdots b_k(9-b_1)\cdots(9-b_k)} = (\overline{b_1\cdots b_k}+1)(10^k-1) \qquad ③$$

因为 $p \mid 10^k+1$，所以可设 $\frac{r}{p} = \frac{a}{10^k+1}$.

因为 $\frac{r}{p} < 1$，所以 $a \leqslant 10^k$，可设 $a = \overline{b_1\cdots b_k}+1\ (b_i = 0,1,\cdots,9; i = 1,\cdots,k)$，得

$$\frac{\overline{a_1\cdots a_{2k}}}{10^{2k}-1} = \frac{r}{p} = \frac{\overline{b_1\cdots b_k}+1}{10^k+1} = \frac{\overline{b_1\cdots b_k(9-b_1)\cdots(9-b_k)}}{10^{2k}-1}\text{（用式③）} \qquad ④$$

所以

$$\overline{a_1\cdots a_{2k}} = \overline{b_1\cdots b_k(9-b_1)\cdots(9-b_k)}$$

得 $a_i = b_i\ (i = 1,\cdots,k)$，$a_{k+i} = 9 - b_i\ (i = 1,\cdots,k)$，所以 $a_i + a_{k+i} = 9\ (i = 1,\cdots,k)$，即结论(1)成立.

由 $a_i = b_i\ (i = 1,\cdots,k)$ 及式④，可得结论(2)成立.

## 3　平方 $m$ 重连整数

**定理 1**　存在 $mk$ 位平方 $m$ 重连整数的充要条件是 $\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 有大于 $10^{(m-2)k}$ 的平方因子.

**证明** 必要性.任一个 $mk$ 位 $m$ 重连整数总可设为 $A\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$,$A$ 是 $k$ 位数,设 $\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}=p^2a$,$a$ 无大于 1 的平方因子.

因为 $A\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 是完全平方数,所以可设 $A=r^2a$,得

$$A=(\frac{r}{p})^2\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}=(\frac{r}{p})^2[10^{(m-1)k}+\cdots+10^k+1]>\frac{10^{(m-1)k}}{p^2}$$

又 $A<10^k$,所以 $p^2>10^{(m-2)k}$,且 $p^2\left|\ \frac{10^{mk}-1}{10^k-1}\right.$.

充分性.设 $\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}=p^2a$,$a$ 无大于 1 的平方因子,$p^2>10^{(m-2)k}$.

(1) 当 $u=\frac{p}{\sqrt{10^{(m-2)k}}}\in\mathbf{N}^*$ 时,有 $u\geqslant 2$,令 $r=u-1$,可证:

$$10^{-(m-2)k-1}<(\frac{r}{p})^2<10^{-(m-2)k} \quad ⑤$$

(即证 $\frac{1}{10}<\left(\frac{u-1}{u}\right)^2<1$,显然成立)

当 $\frac{p}{\sqrt{10^{(m-2)k}}}\notin\mathbf{N}^*$ 时,存在 $v\in\mathbf{N}^*$,使

$$v\sqrt{10^{(m-2)k}}<p<(v+1)\sqrt{10^{(m-2)k}}$$

当 $r=v$ 时,也有式⑤成立(因为 $\left(\frac{r}{p}\right)^2=\left(\frac{v}{p}\right)^2>\left[\frac{v}{(v+1)\sqrt{10^{(m-2)k}}}\right]^2$ $=\left(\frac{v}{v+1}\right)^2\cdot10^{-(m-2)k}>10^{-(m-2)k-1}$).

即存在 $r\in\mathbf{N}^*$,使式⑤成立,由以下定理 2 知,$\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}\right)^2$ 是 $mk$ 位平方 $m$ 重连整数.

(注:在充分性的证明(1)中可证 $u\notin\mathbf{N}^*$,因为可证 $u^2\notin\mathbf{N}^*$.)

**猜想 1** $10^{ak}+1(a,k\in\mathbf{N}^*,a>1)$ 没有大于 $\frac{10^{ak}-1}{10^k-1}$ 的平方因子.(若此猜想成立,可证不存在平方 $2a$ 重连整数.)

**推论 1** 存在 $2k$ 位平方连整数的充要条件是 $10^k+1$ 有大于 1 的平方因子.

**定理 2** 设 $\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 的最大平方因子是 $p^2(p^2>10^{(m-2)k})$,则

$$L_{2,m,k}=\left\{\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}\right)^2\middle|\,10^{-(m-2)k-1}<\left(\frac{r}{p}\right)^2<10^{-(m-2)k}\right\}$$

**证明** 设 $\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}=p^2a$,$a$ 无大于 1 的平方因子,则

$A\cdot\frac{10^{mk-1}}{10^k-1}=A\cdot p^2a$ 是 $mk$ 位平方 $m$ 重连整数 $\Leftrightarrow A=r^2a=\left(\frac{r}{p}\right)^2\cdot$ $\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 是 $k$ 位数.

所以要证明定理 2,只需证明

$A=\left(\frac{r}{p}\right)^2\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 是 $k$ 位数 $\Leftrightarrow 10^{-(m-2)k-1}<\left(\frac{r}{p}\right)^2<10^{-(m-2)k}$

$\Rightarrow$ 由 $A$ 是 $k$ 位数,得

$$\frac{10^{k-1}}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}\leqslant\left(\frac{r}{p}\right)^2<\frac{10^k}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}} \quad ⑥$$

由式 ⑥ 右边的不等式可证 $\left(\frac{r}{p}\right)^2<10^{-(m-2)k}$.

因为式 ⑥ 左边的分数是既约分数,所以由引理 1 知式 ⑥ 左边是严格不等式,又 $p^2\left|\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}\right.$,所以 $\left(\frac{r}{p}\right)^2\geqslant\frac{10^{k-1}+1}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$,从而可证 $\left(\frac{r}{p}\right)^2>10^{-(m-2)k-1}$.

所以要证结论成立.

$\Leftarrow$ 因为 $\left(\frac{r}{p}\right)^2>10^{-(m-2)k-1}$,所以可证 $A>10^{k-1}$.

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2<10^{-(m-2)k}=\frac{10^k+1+\cdots+10^{-(m-2)k}}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$$

由 $p^2\left|\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}\right.$,知 $\left(\frac{r}{p}\right)^2\leqslant\frac{10^k+1}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$.

又 $\left(\frac{r}{p}\right)^2\neq\frac{10^k+1}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$(当 $m$ 是奇数时,此式右边是既约分数,由引理 1 知成立;当 $m$ 是偶数时,由引理 1 知,也有 $\left(\frac{r}{p}\right)^2\neq\frac{1}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$),所以 $\left(\frac{r}{p}\right)^2<\frac{10^k+1}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$,又由引理 1 知 $\left(\frac{r}{p}\right)^2\neq\frac{10^k}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$,所以 $\left(\frac{r}{p}\right)^2<\frac{10^k}{\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}}$,得 $A<10^k$.

所以 $A$ 是 $k$ 位数.

**推论 2** 设 $10^k+1$ 的最大平方因子为 $p^2(p>1)$,则

$$L_{2,2,k}=\left\{\left[\frac{r}{p}(10^k+1)\right]^2\left|\ \frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{r}{p}<1\right.\right\}$$

## 4 平方连整数与循环小数的联系

**定理3** 若 $p \mid 10^k+1, \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{r}{p} < 1, s_{p,r,n} = \frac{r}{p}[10^{kp(2n-1)}+1]$，则 $(s_{p,r,n})^2$ 是 $2kp(2n-1)$ 位平方连整数，且 $s_{p,r,n}$ 是 $kp(2n-1)$ 位数.

**证明** $(s_{p,r,n})^2 = \frac{r^2}{p^2}[10^{kp(2n-1)}+1]^2$，因为 $p^2 \mid 10^{kp(2n-1)}+1$（引理2），所以

$$10^{kp(2n-1)}+1 \,\Big|\, (s_{p,r,n})^2 \tag{7}$$

由 $\frac{r}{p} > \frac{1}{\sqrt{10}}$，得

$$(s_{p,r,n})^2 > \frac{1}{10}[10^{kp(2n-1)}+1]^2 > 10^{2kp(2n-1)-1}$$

由 $\frac{r}{p} < 1$，得 $\frac{r}{p} \leqslant \frac{p-1}{p}$，由此可证

$$(s_{p,r,n})^2 \leqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^2[10^{kp(2n-1)}+1]^2 < 10^{2kp(2n-1)}$$

（因为 $p \leqslant 10^k+1 < 10^{kp(2n-1)}+1$，所以 $\frac{p-1}{p} < \frac{10^{kp(2n-1)}}{10^{kp(2n-1)}+1}$）

所以

$$(s_{p,r,n})^2 \text{ 是 } 2kp(2n-1) \text{ 位数} \tag{8}$$

由式⑦及⑧知，$(s_{p,r,n})^2$ 是 $2kp(2n-1)$ 位平方连整数.

由⑧知，$s_{p,r,n}$ 是 $kp(2n-1)$ 位数.

**定理4** 若 $p \mid 10^k+1, \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{r}{p} < 1, \frac{r}{p}$ 的第一个循环节是 $a_1\cdots a_{2k}$，记 $q_n = \frac{1}{2}[(2n-1)p-1]$，则定理3中的 $s_{p,r,n} = \overline{a_1\cdots a_{2k}a_1\cdots a_{2k}\cdots a_1\cdots a_{2k}a_1\cdots a_k}$（把 $\overline{a_1\cdots a_{2k}}$ 的 $2k$ 个数字连续重复写 $q_n$ 遍后又接着写 $a_1\cdots a_k$ 的 $k$ 个数字）$+1$.

**证明** 设定理4结论中的等式右边为 $B$，则

$$B = \overline{a_1\cdots a_{2k}} \cdot [10^{2k(q_n-1)} + \cdots + 10^{2k} + 1] \cdot 10^k + \overline{a_1\cdots a_k} + 1 =$$

$$\overline{a_1\cdots a_{2k}} \cdot \frac{10^{2kq_n-1}}{10^{2k}-1} \cdot 10^k + \frac{r}{p}(10^k+1) \text{（用引理6）} =$$

$$\frac{r}{p}[10^{kp(2n-1)}+1] = s_{p,r,n} \text{（定理3中的）}.$$

文献[2]的定理3即本文定理3,4中 $p$ 是素数，且 $a_1,\cdots,a_k$ 不全为9的情形，所以本文的定理3,4推广了文献[2]的定理3.

由本文的定理 3 知,$\left[\frac{25}{77}(10^{31}+1)\right]^2$ 是平方连整数,可以证明它不能由文献[2] 的定理 3 得到,从而否定了文献[2] 的猜想,本文再提出:

**猜想 2** 由本文的定理 3 不能得到所有的平方连整数.

**定理 5** (参见引理 5,推论 2) 设 $p^2$ 是 $10^k+1$ 的最大平方因子,且 $\frac{1}{10}<\frac{r^2}{p^2}<1$,$p^2 \mid 10^t+1$($t$ 最小),$k=t(2k_1-1)$,$\frac{r^2}{p^2}$ 的第一个循环节是 $a_1\cdots a_{2t}$,则 $2k$ 位平方连整数 $\left[\frac{r}{p}(10^k+1)\right]^2$ 的前 $k$ 位数 $=\overline{a_1\cdots a_{2t}a_1\cdots a_{2t}\cdots a_1\cdots a_{2t}a_1\cdots a_t}$(把 $a_1\cdots a_{2t}$ 的 $2t$ 个数字连续重复写 $(k_1-1)$ 遍后又接着写 $a_1\cdots a_t$ 的 $t$ 个数字)$+1$.

**证明** 由引理 6,得 $\frac{r^2}{p^2}=\frac{\overline{a_1\cdots a_{2t}}}{10^{2t}-1}=\frac{\overline{a_1\cdots a_t}+1}{10^t+1}$.

设定理 5 结论中的等式右边为 $C$,则

$$C=\overline{a_1\cdots a_{2t}}\cdot[10^{2t(k_1-2)}+\cdots+10^{2t}+1]\cdot 10^t+\overline{a_1\cdots a_t}+1=$$
$$\overline{a_1\cdots a_{2t}}\cdot\frac{10^{2t(k_1-1)}-1}{10^{2t}-1}\cdot 10^t+\overline{a_1\cdots a_t}+1=$$
$$\frac{r^2}{p^2}[10^{2t(k_1-1)}-1]\cdot 10^t+\frac{r^2}{p^2}(10^t+1)=\frac{r^2}{p^2}(10^k+1)=$$

$2k$ 位平方连整数 $\left[\frac{r}{p}(10^k+1)\right]^2$ 的前 $k$ 位数.

**例** 求出所有的 22 位平方连整数.

**解** 由引理 2 知,$11^2 \mid 10^{11}+1$,又由推论 1 知,存在 22 位平方连整数.

可以验证,$10^{11}+1$ 的最大平方因子为 $11^2$,所以由推论 2,得

$$L_{2,2,11}=\left\{\left[\frac{r}{11}(10^{11}+1)^2\right]^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{r}{11}<1\right\}=$$
$$\left\{\left[\frac{r}{11}(10^{11}+1)\right]^2 \,\middle|\, r=4,5,\cdots,10\right\}$$

因为 $\frac{4}{11}=0.\dot{3}\dot{6}$,所以由定理 4(这时 $p=11,r=4,k=1,n=1,q_1=5$),得 $s_{11,4,1}=\frac{4}{11}(10^{11}+1)=36\ 363\ 636\ 364$.

因为 $\left(\frac{4}{11}\right)^2=0.\dot{1}322\ 314\ 049\ 586\ 776\ 859\ 50\dot{4}$,所以由定理 5(这时 $p=11$,$r=4,k=t=11,k_1=1$)得

$$\left[\frac{4}{11}(10^{11}+1)\right]^2=1\ 322\ 314\ 049\ 613\ 223\ 140\ 496,$$

即 $\left[\frac{4}{11}(10^{11}+1)\right]^2=36\ 363\ 636\ 364^2=1\ 322\ 314\ 049\ 613\ 223\ 140\ 496$,

同理,可得

$$\left[\frac{5}{11}(10^{11}+1)\right]^2 = 45\ 454\ 545\ 455^2 = 2\ 066\ 115\ 702\ 520\ 661\ 157\ 025,$$

$$\left[\frac{6}{11}(10^{11}+1)\right]^2 = 54\ 545\ 454\ 546^2 = 2\ 975\ 206\ 611\ 629\ 752\ 066\ 116,$$

$$\left[\frac{7}{11}(10^{11}+1)\right]^2 = 63\ 636\ 363\ 637^2 = 4\ 049\ 586\ 776\ 940\ 495\ 867\ 769,$$

$$\left[\frac{8}{11}(10^{11}+1)\right]^2 = 72\ 727\ 272\ 728^2 = 5\ 289\ 256\ 198\ 452\ 892\ 561\ 984,$$

$$\left[\frac{9}{11}(10^{11}+1)\right]^2 = 81\ 818\ 181\ 819^2 = 6\ 694\ 214\ 876\ 166\ 942\ 148\ 761,$$

$$\left[\frac{10}{11}(10^{11}+1)\right]^2 = 90\ 909\ 090\ 910^2 = 8\ 264\ 462\ 810\ 082\ 644\ 628\ 100$$

由推论 1 可以验证,不存在 $2k(k=1,2,\cdots,10)$ 位平方连整数,所以最小的平方连整数是 $\left[\frac{4}{11}(10^{11}+1)\right]^2$.

由推论 1,2 求全部的平方连整数,还应当解决这样的问题:对于怎样的 $k$, $10^k+1$ 有大于 1 的平方因子,最大的平方因子是多少?(请注意:可证 $(10^r+1)^2 \mid 10^{r(2n-1)(10^r+1)}+1$).

当 $m \geqslant 3$ 时,笔者还没有找到平方 $m$ 重连整数,运用定理 1 和电子计算机是一定能找到的;笔者也还没有找到平方 $m$ 重连整数与循环小数的联系.

是完全 $n(n \geqslant 2)$ 次方数的 $m$ 重连整数叫做 $n$ 方 $m$ 重连整数,研究 $n$ 方 $m$ 重连整数也是很困难的.

## 参考文献


[1] 周月英,李振亮. 一类是完全平方数的连整数[J]. 数学通讯,1995(2):35-36.

[2] 李抗强. 构造是完全平方数的连整数的方法[J]. 数学通讯,1996(1):24-25.

[3] 曹珍富. 解丢番图方程的一种有力的初等方法[C] // 初等数学研究论文选[M]. 上海:上海教育出版社,1992,28-34.

[4] 熊全淹. 初等整数论[M]. 2 版. 武汉:湖北教育出版社,1989.

# 恒为整数的 $l$ 次幂的有理系数整值多项式研究

若 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,有理系数 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 次多项式 $f(n)$ 的值均为整数,则 $f(n)$ 叫做有理系数整值多项式. 本文求出所有的恒为整数的 $l(l\geqslant k)$ 次幂有有理根的 $k$ 次有理系数整值多项式.

**定理1** 设 $f(n)=a_kn^k+\cdots+a_1n(a_k\neq 0,k\in\mathbf{N}^*)$ 是有理系数整值多项式, $a_1,\cdots,a_k$ 的最小公分母为 $A(A\in\mathbf{N}^*)$, $n_1,n_2$ 是大于 $\max\{A,A\mid a_1\mid,\cdots,A\mid a_{k-1}\mid\}$ 的两个不同的素数,若 $f(n_1)$, $f(n_2)$ 均为整数的 $l(l\in\mathbf{N},l\geqslant k)$ 次幂,则 $f(n)\equiv(cn)^l$($c$ 是非零整数常数).

**证明** 当 $l=1$ 时,有 $k=1$,此时结论成立,下证 $l\geqslant 2$ 时成立.

先对 $i$ 用数学归纳法证明:

当 $i=1,\cdots,k-1$ 时,均有 $a_1=\cdots=a_i=0$.有

$$f(n_1)=n_1\cdot\frac{1}{A}(Aa_kn_1^{k-1}+\cdots+Aa_2n_1+Aa_1) \qquad ①$$

$Aa_j(j=1,\cdots,k)$ 是整数, $Aa_k\neq 0$.

假设 $a_1\neq 0$,得 $Aa_1\neq 0$.

因为 $f(n_1)\in\mathbf{Z}$, $(A,n_1)=1$,所以 $\frac{1}{A}(Aa_kn_1^{k-1}+\cdots+Aa_2n_1+Aa_1)\in Z$.

因为 $(n,Aa_1)=1$,所以 $(n_1,Aa_kn_1^{k-1}+\cdots+Aa_2n_1+Aa_1)=1$. $(n_1,\frac{1}{A}(Aa_kn_1^{k-1}+\cdots+Aa_2n_1+Aa_1))=1$.

因为 $f(n_1)$ 是整数的 $l$ 次幂,所以由式①得 $n_1$ 是整数的 $l(l\geqslant 2)$ 次幂,这与 $n_1$ 是素数矛盾!所以 $a_1=0$, $i=1$ 时成立.

假设 $i-1(i-1\leqslant k-2)$ 时成立,得

$$f(n_1)=n_1^i\cdot\frac{1}{A}(Aa_kn_1^{k-i}+\cdots+Aa_{i+1}n_1+Aa_i)=1 \qquad ②$$

下证 $i$ 时成立,只需证 $a_i=0$.

假设 $a_i\neq 0$,同上可证 $(n_1^i,\frac{1}{A}(Aa_kn_1^{k-i}+\cdots+Aa_{i+1}n_1+Aa_i))=1$.

因为 $f(n_1)$ 是整数的 $l$ 次幂,所以由式②得, $n_1^i(i<k\leqslant l)$ 是整数的 $l$ 次幂,这与 $n_1$ 是素数矛盾!所以 $a_i=0$. 由数学归纳法知要证结论成立.

所以 $f(n)\equiv a_kn^k$.

因为 $f(n_1)=a_kn_1^k$ 是整数的 $l$ 次幂，$a_kn_1^k=u^l(u\in\mathbf{Z})$，设 $a_k=\dfrac{q}{p}(p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{Z},(p,q)=1)$. $qn_1^k=pu^l$，$p\mid n_1^k$，设 $p=n_1^j(j=0,1,\cdots,k)$，$qn_1^{k-j}=u^l$.

当 $j=k$ 时，$p=n_1^k$，$q=u^l$. 由 $(p,q)=1$，得 $n_1\nmid u$，此时 $a_k=\dfrac{u^l}{n_1^k}$.

当 $j<k$ 时，$n_1\mid u$，设 $u=n_1u_1$，$q=u_1^ln_1^{l-k+j}$，所以 $a_k=u_1^ln_1^{l-k}$.

所以 $a_k=\dfrac{u^l}{n_1^k}(n_1\nmid u)$ 或 $u_1^ln_1^{l-k}(u_1\in\mathbf{Z}^*)$.

同理有 $a_k=\dfrac{v^l}{n_2^k}(n_2\nmid v)$ 或 $v_1^ln_2^{l-k}(v_1\in\mathbf{Z}^*)$

若 $a_k\notin\mathbf{Z}$，则 $a_k=\dfrac{u^l}{n_1^k}=\dfrac{v^l}{n_2^k}$，$n_2^ku^l=n_1^kv^l$.

由 $(n_1,n_2)=1$，得 $n_1\mid u$，与 $n_1\nmid u$ 矛盾!

所以 $a_k\in\mathbf{Z}$，$a_k=u_1^ln_1^{l-k}=v_1^ln_2^{l-k}$.

设 $(u_1,v_1)=d$，$u_1=u'_1d$，$v=v'_1d$，$(u'_1,v'_1)=1$，$u'^l_1u_1^{l-k}=v'^l_1n_2^{l-k}$，$\dfrac{u'^l_1}{v'^l_1}=\dfrac{n_2^{l-k}}{n_1^{l-k}}$，这是两个既约分数相等，所以 $|u'^l_1|=n_2^{l-k}$.

因为 $n_2$ 是素数，$l-k<l$，所以 $l=k$，$u'^l_1=\pm1$，$u_1=\pm d=c$，$a_k=c^l$，$f(n)\equiv(cn)^l$（$c$ 是非零整数常数）.

**推论 1** (1) 恒为整数的 $k$ 次幂的缺常数项的 $k$ 次有理系数整值多项式均可表为 $f(n)=(cn)^k$（$c$ 是非零整数常数）;

(2) 不存在恒为整数的 $l(l>k)$ 次幂的缺常数项的 $k$ 次有理系数整值多项式.

**定理 2** 设 $f(n)=a_kn^k+\cdots+a_1n+a_0(a_k\neq0,k\in\mathbf{N}^*)$ 是有理系数整值多项式，$f\left(\dfrac{q}{p}\right)=0(p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{Z},(p,q)=1)$，$pn_1-q$，$pn_2-q$ 是两个不同的充分大的素数，若 $f(n_1)$，$f(n_2)$ 均为整数的 $l(l\geqslant k)$ 次幂，则 $f(n)\equiv[c(pn-q)]^l$（$c$ 是非零整数常数）.

**证明** $$p^kf\left(\frac{q}{p}\right)=a_kq^k+a_{k-1}pq^{k-1}+\cdots+a_1p^{k-1}q+a_0p^k=0 \qquad ③$$

$$\begin{aligned}p^kf(n)\equiv{}&a_k(pn)^k+a_{k-1}p(pn)^{k-1}+\cdots+a_1p^{k-1}(pn)+a_0p^k\equiv\\&a_k(pn-q+q)^k+a_{k-1}p(pn-q+q)^{k-1}+\cdots+\\&a_1p^{k-1}(pn-q+q)+a_0p^k\end{aligned} \qquad ④$$

由式③，④知，$p^kf(n)\equiv g(pn-q)$，$g(pn-q)$ 是 $pn-q$ 的缺常数项的 $k$ 次有理系数整值多项式.

所以$f(n)\equiv h(pn-q)$，$h(pn-q)$是$pn-q$的缺常数项$k$次有理系数整值多项式.

由定理1，得

$$f(n)\equiv h(pn-q)\equiv[c(pn-q)]^l(c\text{ 是非零整数常数})$$

注：由式③，④可得

$$f(n)=\frac{1}{p^k}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{k}a_jp^{k-j}q^{j-i}C_j^i\Big)(pn-q)^i=\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=i}^{k}a_j\cdot\frac{q^{j-i}}{p^j}\cdot C_j^i\Big)(pn-q)^i$$

设$b_i=\sum\limits_{j=i}^{k}a_j\cdot\dfrac{q^{j-i}}{p^j}\cdot C_j^i$，$b_1,\cdots,b_k$的最小公分母是$B$. 由定理1知，定理2中的充分大是指大于$\max\{B,B|b_1|,\cdots,B|b_{k-1}|\}$.

当定理1，2的条件中$l=k$时，只需一个充分大的素数，便可得结论成立.

**推论2** (1)恒为整数的$k$次幂的有有理根$\frac{q}{p}(p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{Z},(p,q)=1)$的$k$次有理系数整值多项式均可表为$f(n)\equiv[c(pn-q)]^k$($c$是非零整数常数)；

(2)不存在恒为整数的$l(l>k)$次幂的有有理根的$k$次有理系数整值多项式.

**证明** (1)由算术级数中的迪利克雷定理[1]知，数列$\{pn-q\}$中有无限多项是素数($q=0$时也成立)，当然有两个充分大的素数$pn_1-q$，$pn_2-q$，得$f(n_1)$，$f(n_2)$均为整数的$l(l\geqslant k)$次幂.

由定理2，得$f(n)\equiv[c(pn-q)]^k$($c$是非零整数常数). 当然有结论(1)成立.

(2)假设$f(n)$存在，则$f(n)\equiv[c(pn-q)]^k$($c$是非零整数常数). 设$m_1=pn_1-q$，$m_2=pn_2-q$是两个不同的素数($n_1,n_2\in\mathbf{N}^*$)，有$f(n_1)=(cm_1)^k=M_1^l$，$f(n_2)=(cm_2)^k=M_2^l(M_1,M_2\in\mathbf{Z}^*)$.

得$\dfrac{m_1^k}{m_2^k}=\dfrac{M_1^l}{M_2^l}=\dfrac{M'^l_1}{M'^l_2}((M'_1,M'_2)=1)$，所以$m_1^k=|M'_1|^l$($m_1$是素数，$k<l$)，这不可能！所以$f(n)$不存在.

显然定理1是定理2的特例，推论1是推论2的特例.

要求出所有的恒为整数的$l$次幂的有理系数$k$次整值多项式$f(n)(k,l\in\mathbf{N}^*,l\geqslant2)$，本文解决了$f(n)$有有理根，$l\geqslant k$的情形，还需研究以下两种情形($k=1$时，$f(n)$一定有有理根，所以已经解决)：

(1)$f(n)$没有有理根，$l\geqslant k\geqslant2$；

(2)$l<k$.

# 参考文献

[1] 单壿.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.

# $a^n-1$ 的标准分解式中诸素因数的指数

首先约定，本文中的字母均表示整数.

本文研究 $a^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 形数的标准分解式中诸素因数($p$)的指数，即求出自然数 $k$，使 $p^k\parallel a^n-1$.

## 1 当 $p=2$ 时

下面的定理 2 给出了 $a^n-1$ 的标准分解式中 2 的指数.

**定理 1** 若 $2^{k_0}\parallel a\pm1,k_0\geqslant2$(对于任意的奇数 $a$，且 $a\pm1\neq0$，均存在整数 $k_0\geqslant2$，使 $2^{k_0}\parallel a+1$ 或 $2^{k_0}\parallel a-1$)，$k\geqslant1$，则 $2^{k+k_0}\parallel a^{2^k}-1$.

**证明** 因为 $2^{k_0}\parallel a\pm1,k_0\geqslant2$，所以 $2\parallel a\mp1,2^{k_0+1}\parallel a^2-1$，即当 $k=1$ 时成立.

当 $k\geqslant2$ 时，$a^{2^k}-1=(a^2-1)(a^2+1)\cdot\cdots\cdot(a^{2^{k-1}}+1)$，可得 $2\parallel a^2+1,\cdots,2\parallel a^{2^{k-1}}+1$，又 $2^{k_0+1}\parallel a^2-1$，所以 $2^{k+k_0}\parallel a^{2^k}-1$.

**定理 2** $2^{k_0}\parallel a\pm1,k_0\geqslant2$.

(1)$2\nmid n$：当 $2^{k_0}\parallel a+1$ 时，$2\parallel a^n-1$；当 $2^{k_0}\parallel a-1$ 时，$2^{k_0}\parallel a^n-1$；

(2) 若 $n=2^kn_1(2\nmid n_1),k\geqslant1$，则 $2^{k+k_0}\parallel a^n-1$.

**证明** (1)$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a+1)$，

$a^{n-1}+\cdots+a+1$ 是 $n$(奇数) 个奇数之和，所以 $2\nmid a^{n-1}+\cdots+a+1$.

当 $2^{k_0}\parallel a+1$ 时，$2\parallel a-1$，所以 $2\parallel a^n-1$；

当 $2^{k_0}\parallel a-1$ 时，$2^{k_0}\parallel a^n-1$.

(2)$a^n-1=a^{2^kn_1}-1=(a^{2^k}-1)[a^{2^k(n_1-1)}+\cdots+a^{2^k}+1]$，可得$2\nmid a^{2^k(n_1-1)}+\cdots+a^{2^k}+1$.

又由定理 1，得 $2^{k+k_0}\parallel a^{2^k}-1$，所以 $2^{k+k_0}\parallel a^n-1$.

## 2 $p$ 为奇素数时

下面的定理 6 给出了 $a^n-1$ 的标准分解式中诸奇素数($p$) 的指数.

**定理 3** 若 $p$ 是奇质数，$p\mid b-1,b\neq1$，则 $p\parallel\dfrac{b^p-1}{b-1}$.

**证明** 设 $p^r \parallel b-1, r \geqslant 1, b = p^r b_1 + 1, p \nmid b_1$.

$$b^p - 1 = (p^r b_1 + 1)^p - 1 = (p^r b_1)^p + \cdots + C_p^{p-2}(p^r b_1)^2 + p^{r+1} b_1$$

得 $p^{r+1} \parallel b^p - 1$,又 $p^r \parallel b-1, \frac{b^p-1}{b-1} \in \mathbf{Z}$,所以 $p \parallel \frac{b^p-1}{b-1}$.

**定理4** 若 $p$ 是奇素数,$p^{k_0} \parallel b-1, b \neq 1, k_0 \geqslant 1$,则 $p^{k+k_0} \parallel b^{p^k} - 1$.

**证明** $b^{p^k} - 1 = (b-1) \cdot \frac{b^p-1}{b-1} \cdot \frac{b^{p^2}-1}{b^p-1} \cdot \cdots \cdot \frac{b^{p^k}-1}{b^{p^{k-1}}-1}$

因为 $p \mid b-1$,所以 $p \mid b^p - 1, p \mid b^{p^2} - 1, \cdots, p \mid b^{p^{k-1}} - 1$.

由定理3,得 $p \parallel \frac{b^p-1}{b-1}, p \parallel \frac{b^{p^2}-1}{b^p-1}, \cdots, p \parallel \frac{b^{p^k}-1}{b^{p^{k-1}}-1}$.

又 $p^{k_0} \parallel b-1$,所以 $p^{k+k_0} \parallel b^{p^k} - 1$.

**定理5** 若 $p$ 是奇素数,$p^{k_0} \parallel b-1, b \neq 1, k_0 \geqslant 1, p \nmid n_1$,则 $p^{k+k_0} \parallel b^{p^k n_1} - 1$.

**证明** $b^{p^k n_1} - 1 = (b^{p^k} - 1)[b^{p^k(n_1-1)} + \cdots + b^{p^k} + 1]$,因为 $p \mid b-1, p \nmid n_1$,所以 $p \nmid [b^{p^k(n_1-1)} + \cdots + b^{p^k} + 1]$.

又由定理4,得 $p^{k+k_0} \parallel b^{p^k} - 1$,所以 $p^{k+k_0} \parallel b^{p^k n_1} - 1$.

**定理6** 若 $p$ 是奇素数,$\alpha$ 是满足 $p \mid a^\alpha - 1$ 的最小正整数(由 Fermat 小定理知,$p \mid a^{p-1} - 1$,所以 $\alpha$ 存在,且 $\alpha \mid p-1$),又设 $p^{k_0} \parallel a^\alpha - 1, k_0 \geqslant 1, n = \alpha p^k n_1, k \geqslant 0, p \nmid n_1$,则 $p^{k+k_0} \parallel a^n - 1$(由 $\alpha$ 最小可证:若 $p \mid a^n - 1$,则 $\alpha \mid n$,所以可设 $n = \alpha p^k n_1$).

**证明** 在定理5中,令 $b = a^\alpha$ 立得.

## 3 $a^n + 1$ 的情形

把整数 $A$ 的标准分解式中素数 $p$ 的指数记为 $(A)_p$,有 $(A)_p \geqslant 0$.

**定理7** (1) $(a^n+1)_p = (a^{2n}-1)_p - (a^n-1)_p$;

(2) 当 $n$ 是奇数时,$(a^n+1)_p = ((-a)^n - 1)_p$;

(3) 当 $p \neq 2$ 时,$(a^n+1)_p = (a^{2n}-1)_p$ 或 0.

**例** 求 $(2^{250}+1)_5$.

**解** 满足 $5 \mid 2^\alpha - 1$ 的最小正整数 $\alpha = 4$,且 $5 \parallel 2^4 - 1$.

$500 = 4 \times 5^3$,由定理6,得 $5^4 \parallel 2^{500} - 1$,即 $(2^{500}-1)_5 = 4$.

因为 $4 \nmid 250$,所以 $5 \nmid 2^{250} - 1$,即 $(2^{250}-1)_5 = 0$.

所以由定理7(1),得 $(2^{250}+1)_5 = 4 - 0 = 4$.

# $\sigma(n)$ 的一条性质及其应用
## —— 研究完全数与亲和数的奇偶性

## 1 $\sigma(n)$ 的意义及求法

通常用 $\sigma(n)$ 表示正整数 $n$ 的所有正因数之和，求 $\sigma(n)$ 的方法是[1]：$\sigma(1)=1$；当 $n\geqslant 2$ 时，设 $n$ 的标准分解式为 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$（$p_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,k$），则 $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$. 可把此结论改述为

**定理 1** 对于任意的正整数 $n$，总可设 $n=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k_1}p_i^{\alpha_i}$（$p_i$ 是互不相同的奇素数，$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}$，$i=1,2,\cdots,k_1$）（这种表示 $n$ 的方法中可选 $k_1$ 大于任意正整数） ①

则
$$\sigma(n)=(2^{\alpha+1}-1)\prod_{i=1}^{k_1}\frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i-1} \quad ②$$

$\sigma(n)$ 还有性质：$\sigma(n)$ 是积性函数，即 $(a,b)=1$ 时，$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$.

约定下文中未注明的字母均表示正整数.

**定理 2** (1)$2\nmid\sigma(n)\Leftrightarrow n=a^2$ 或 $n=2a^2$；

(2)$2\parallel\sigma(n)\Leftrightarrow n=p^{4k+1}a^2$ 或 $n=2p^{4k+1}a^2$（$p$ 是 $4m+1$ 形素数，$k\in\mathbf{N}$，$p\nmid a$）.

**证明** 可设 $n$ 为式 ① 的形式，$k_1\geqslant 2$.

(1)$2\nmid\sigma(n)\Leftrightarrow 2\nmid\frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i-1}(i=1,2,\cdots,k_1)\Leftrightarrow 2\mid\alpha_i(i=1,2,\cdots,k_1)\Leftrightarrow n=2^{\alpha}x^2(\alpha\in\mathbf{N},2\nmid x)\Leftrightarrow n=a^2$ 或 $2a^2$.

(2)$\Rightarrow$ 因为 $2\parallel\sigma(n)$，所以在式 ② 中有 $2\parallel\prod_{i=1}^{k_1}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$，不妨设

$$2\parallel\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \quad ③$$

且
$$2\nmid\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}(i=2,3,\cdots,k_1) \quad ④$$

由式③得 $2 \mid p_1^{\alpha_1}+\cdots+p_1+1$,所以 $\alpha_1$ 是奇数,设 $\alpha_1=2l+1(l\in\mathbf{N})$,得 $\dfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}=(p_1+1)\cdot\dfrac{(p_1^2)^{l+1}-1}{p_1^2-1}=(p_1+1)[(p_1^2)^l+\cdots+(p_1^2)+1]$.

又由式③及 $p_1$ 是奇素数,得 $2\parallel p_1+1, 2\nmid(p_1^2)^{l_1}+\cdots+(p_1^2)+1$.

所以 $p_1$ 是 $4m+1$ 形素数,$l$ 是偶数,设 $l=2k(k\in\mathbf{N})$,即 $\alpha_1=4k+1$.

由式④,得 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,k_1)$ 是偶数.

所以 $n=2^{\alpha}p_1^{4k+1}x^2(\alpha,k\in\mathbf{N},p_1$ 是 $4m+1$ 形素数,$x$ 是奇数,$p_1\nmid x)$.

所以当 $\alpha$ 是偶数时,$n=p^{4k+1}a^2$;$\alpha$ 是奇数时,$n=2p^{4k+1}a^2$(其中 $p$ 是 $4m+1$ 形素数,$k\in\mathbf{N},p\nmid a)$.

设 $a=2^{\alpha_0}\prod\limits_{i=1}^{k_1}p_i^{\alpha_i}(p_i$ 是互不相同的奇素数,$\alpha_0,\alpha_i\in\mathbf{N},i=1,2,\cdots,k_1)$.

因为 $n=p^{4k+1}a^2$ 或 $2p^{4k+1}a^2$,所以 $n=2^{\alpha}p^{4k+1}\prod\limits_{i=1}^{k_1}p_i^{2\alpha_i}(\alpha=2\alpha_0$ 或 $2\alpha_0+1)$,

$$\sigma(n)=(2^{\alpha+1}-1)\cdot\frac{p^{4k+2}}{p-1}\prod_{i=1}^{k_1}(p_i^{2\alpha_i}+\cdots+p_i+1).$$

可得
$$\frac{p^{4k+2}-1}{p-1}=(p+1)[(p^2)^{2k}+\cdots+(p^2)+1]$$

因为 $p$ 是 $4m+1$ 形素数,所以 $2\parallel\dfrac{p^{4k+2}-1}{p-1}$.又有 $2\nmid(2^{\alpha+1}-1)\prod\limits_{i=1}^{k_1}(p_i^{2\alpha_i}+\cdots+p_i+1)$,所以 $2\parallel\sigma(n)$.

定理2成立.

## 2 奇完全数的性质

满足 $\sigma(n)=2n$ 的正整数 $n$ 叫做完全数,早就知道,$n$ 是偶完全数的充要条件是 $n=2^{p-1}(2^p-1)$,其中 $2^p-1$ 是素数,但至今仍未发现一个奇完全数,借助于电子计算机,人们证明了,如果有奇完全数,它一定大于 $10^{200}$,并且它的素因数个数大于15[1](文献[2]说至少含有8个不同的素因数),运用上述 $\sigma(n)$ 的性质易得奇完全数的一条性质:

**定理3** 奇完全数可表示为 $p^{4k+1}a^2$,其中 $p$ 为 $4m+1$ 形素数,$k\in\mathbf{N}$,$a$ 为奇数,$p\nmid a$,$p^{4k+1}\mid\sigma(a^2)$.

**证明** 设 $n$ 为奇完全数,则 $\sigma(n)=2n,2\parallel\sigma(n)$.

由定理2(2),得 $n=p^{4k+1}a^2(p$ 是 $4m+1$ 形素数,$k\in\mathbf{N},p\nmid a)$,由 $n$ 是奇数,得 $a$ 是奇数.

因为 $\sigma(n)$ 是积性函数,所以

$$\sigma(n)=\sigma(p^{4k+1})\sigma(a^2)=\frac{p^{4k+2}-1}{p-1}\sigma(a^2)=2p^{4k+1}a^2$$

因为$\left(p^{4k+1},\frac{p^{4k+2}-1}{p-1}\right)=1$,所以 $p^{4k+1}\mid\sigma(a^2)$.

定理 3 成立.

## 3 奇偶性不同的亲和数的性质

通常用 $s(n)$ 表示 $n$ 的除本身外的所有正因数之和,有 $\sigma(n)=s(n)+n$.若 $s(n)=m$ 且 $s(m)=n$,则称 $m,n$ 为亲和数,若 $n,n$ 为亲和数,则 $n$ 是完全数.

**定理 4** $m,n$ 是亲和数 $\Leftrightarrow\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$.

**证明** $m,n$ 是亲和数 $\Leftrightarrow s(m)=n$ 且 $s(n)=m\Leftrightarrow s(m)+m=m+n=s(n)+n\Leftrightarrow\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$.

关于亲和数的奇偶性,曾有人猜测:一对亲和数的奇偶性相同(这在 $3\cdot10^9$ 以内正确[1]).笔者得到:

**定理 5** 奇偶性不同的亲和数可表示为 $a^2,2b^2$($a$ 为奇数).

**证明** 设奇数 $m$ 与偶数 $n$ 是一对亲和数,则 $\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$.

由 $2\nmid m+n$,得 $2\nmid\sigma(m)$,$2\nmid\sigma(n)$.

由定理 2(1),得 $m=a^2$,$n=2b^2$($a$ 是奇数).

**定理 6** 满足 $2\parallel m+n$ 的亲和数 $m,n$ 只能是下列两种情形之一:

(1)$p^{4k+1}a^2$ 与 $q^{4k+1}b^2$($p,q$ 为 $4t+1$ 形素数,$k\in\mathbf{N}$,$a,b$ 是奇数,$p\nmid a$,$q\nmid b$);

或(2)$2p^{4k+1}a^2$ 与 $2q^{4k+1}b^2$($p,q,k$ 同上,$a,b\in\mathbf{N}$,且 $2\nmid a+b$).

**证明** 有 $\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$.

因为 $2\parallel m+n$,所以 $2\parallel\sigma(m)$,$2\parallel\sigma(n)$.

由定理2(2),得 $m=p^{4k+1}a^2$ 或 $2p^{4k+1}a^2$($p$ 为 $4t+1$ 形素数,$k\in\mathbf{N}$,$p\nmid a$),$n=q^{4k+1}b^2$ 或 $2q^{4k+1}b^2$($q$ 为 $4t+1$ 形素数,$k\in\mathbf{N}$,$q\nmid b$).

因为 $2\mid m+n$,所以 $m,n$ 的奇偶性相同,从而可得定理 6 成立.

**猜想** (1) 不存在 $2\parallel m+n$ 的亲和数 $m,n$;

(2) 若 $m,n$ 是亲和数,则 $8\mid m+n$.

## 参考文献

[1] 单墫.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.

[2] 洪伯阳.数论著名问题选介[J].华中师范大学学报(自然科学版,数学史专辑),1987(3):63.

# 素数与组合数的整除性质

有较多文献介绍了关于组合数的恒等式，但除文献[1]讨论了组合数的奇偶性外，未见其他专文论述组合数的整除性质，本文的定理给出了素数与组合数的几条整除性质，不过，有一个定理的证明需要用到一种多元数学归纳法.

数学归纳法是数学中最基本也是最重要的方法之一，已有多种形式的数学归纳法，文献[2]定理2的六个推论就是六种数学归纳法，但都是对一个变量归纳的. 如果对命题中的多个变量都用数学归纳法，就叫做多元数学归纳法. 本文用通常的数学归纳法(即第一数学归纳法)，得到一种多元数学归纳法，用此方法可成功的证明一些命题.

## 1 一种多元数学归纳法

用数学归纳法证明命题 $P(n)$(变量 $n = n_0, n_0+1, \cdots, N$; $n_0$ 是一个有限数，一般指整数，$N \leqslant +\infty$) 成立，即

(1) 证明 $P(n_0)$ 成立；

(2) 假设 $P(n')$($n'$ 是 $n_0, n_0+1, \cdots, N-1$ 中的任意一个数) 成立，证明 $P(n'+1)$ 成立.

则 $P(n)$ 成立.

下面是对 $n$ 用数学归纳法证明命题 $P(n, m)$(变量 $n = n_0, n_0+1, \cdots, N$; $N \leqslant +\infty$. 变量 $m = m_0, m_0+1, \cdots, M$; $M \leqslant +\infty$) 成立：

(1) 证明 $P(n_0, m)$ 成立；

(2) 假设 $P(n', m)$($n'$ 是 $n_0, n_0+1, \cdots, N-1$ 中的任意一个数) 成立，证明 $P(n'+1, m)$ 成立.

在(2)中我们又对 $m$ 用数学归纳法：

① 证明 $P(n'+1, m_0)$ 成立；

② 假设 $P(n'+1, m')$($m'$ 是 $m_0, m_0+1, \cdots, M-1$ 中的任意一个数) 成立，证明 $P(n'+1, m'+1)$ 成立.

完成了上面的(1)，(2)①，(2)② 三次证明，则 $P(n, m)$ 成立.

以上方法是对两个变量 $n, m$ 都进行归纳，所以是多元数学归纳法.

由此可总结出关于命题 $P(n, m)$(变量 $n = n_0, n_0+1, \cdots, N$; $N \leqslant +\infty$. 变

量 $m=m_0,m_0+1,\cdots,M;M\leqslant+\infty$)的一种数学归纳法:

(1) 证明 $P(n_0,m)$ 和 $P(n,m_0)$ 成立;

(2) 假设 $P(n',m)$($n'$ 是 $n_0,n_0+1,\cdots,N-1$ 中的任意一个数)成立,又假设 $P(n'+1,m')$($m'$ 是 $m_0,m_0+1,\cdots,M-1$ 中的任意一个数)成立,证明 $P(n'+1,m'+1)$ 成立.

则 $P(n,m)$ 成立.

用同样的方法,可把这种多元数学归纳法推广到任意有限个变量的情形.

## 2 素数与组合数的整除性质

下文中表示数的字母均表示整数.

**定理 1** 若 $p$ 是素数,$1\leqslant k\leqslant p-1$,则 $p\parallel C_p^k$($a^l\parallel b$ 指 $a^l\mid b$ 且 $a^{l+1}\nmid b$,$l\geqslant 0$).

**证明** $C_p^k=\dfrac{p(p-1)\cdots[p-(k-1)]}{k!}\triangleq\dfrac{A}{k!}$

由 $p$ 是素数,$1\leqslant k\leqslant p-1$,得 $p\parallel A$,又 $(p,k!)=1$,所以 $p\parallel C_p^k$.

**定理 2** 若 $p$ 是素数,$0\leqslant k\leqslant p-t$,$1\leqslant t<p$,则 $p\mid C_{p-t}^t-(-1)^kC_{t+k-1}^k$.

**证明** 
$$C_{p-t}^k-(-1)^kC_{t+k-1}^k=\frac{1}{k!}\{(p-t)[p-(t+1)]\cdots[p-(t+k-1)]-(-1)^kt(t+1)\cdots(t+k-1)\}\triangleq\frac{pA}{k!}.$$

由 $p$ 是素数,$0\leqslant k\leqslant p-t$,得 $(p,k!)=1$,所以 $p\mid C_{p-t}^k-(-1)^kC_{t+k-1}^k$.

**定理 3** 若 $p$ 是素数,$n\geqslant p\geqslant\dfrac{n}{2}+1$.

(1) 当 $n-(p-1)\leqslant k\leqslant p-1$ 时,$p\parallel C_n^k$;

(2) 当 $0\leqslant k\leqslant n-p$ 或 $p\leqslant k\leqslant n$ 时,$p\nmid C_n^k$.

**证明** (1) $C_n^k=\dfrac{1}{k!}\cdot n(n-1)\cdots[n-(k-1)]\triangleq\dfrac{A}{k!}$.

由 $k\geqslant n-(p-1)$,得 $n-(k-1)\leqslant p$;由 $p\geqslant\dfrac{n}{2}+1$,得 $n\leqslant 2p-2$,所以 $p\parallel A$.

由 $k\leqslant p-1$,得 $(p,k!)=1$,所以 $p\parallel C_n^k$.

(2) $C_n^k=\dfrac{1}{k!}\cdot n(n-1)\cdots[n-(k-1)]\triangleq\dfrac{A}{k!}$.

由 $p\geqslant\dfrac{n}{2}+1$,得 $n\leqslant 2p-2$.当 $0\leqslant k\leqslant n-p$ 时,有 $n-(k-1)\geqslant p+1$,此时有 $p\nmid A$,所以 $p\nmid C_n^k$.

当 $p\leqslant k\leqslant n$ 时,$0\leqslant n-k\leqslant n-p$,所以 $p\nmid C_n^{n-k}$,即 $p\nmid C_n^k$.

注：定理3(1)中 $n=p$ 时的结论，即定理1.

当素数 $p \geqslant \frac{n}{2}+1$ 时，定理3及下面的定理4已完整的给出了 $p$ 与 $C_n^k$ 的整除性质；当素数 $p < \frac{n}{2}+1$ 时，还未得到完整的结论.

**定理4** 若 $p$ 是素数，$0 \leqslant k \leqslant n < p$，则 $p \nmid C_n^k$.

**证明** 由 $p > n$，得 $p \nmid n(n-1)\cdots[n-(k-1)]$，所以 $p \nmid C_n^k$.

**推论1** 当 $2 \leqslant k \leqslant n-2$ 时，$C_n^k$ 是合数.

**证明** 由 $2 \leqslant k \leqslant n-2$，得 $C_n^k > n$.

假设 $C_n^k$ 是素数，则 $C_n^k$ 有大于 $n$ 的素因数，这与定理4矛盾！所以 $C_n^k$ 不是素数，且 $C_n^k > 1$，所以 $C_n^k$ 是合数.

**定理5** 若 $p$ 是素数，则对于任意的正整数 $k \leqslant np(n \in \mathbf{N}^*)$，总存在正整数 $t \in \{1,2,\cdots,n\}$，使 $(t-1)p+1 \leqslant k \leqslant tp$.

(1) 当 $k \neq tp$ 时，设 $p^\alpha \parallel tC_n^t(\alpha \in \mathbf{N}$，下同)，则 $p^{\alpha+1} \parallel C_{np}^k$；

(2) 当 $k = tp$ 时，设 $p^\alpha \parallel C_n^t$，则 $p^\alpha \parallel C_{np}^k$.

**证明** 由 $(t-1)p+1 \leqslant k \leqslant tp$，得

$$(n-t)p+1 \leqslant np-(k-1) \leqslant [n-(t-1)]p$$

$$A \triangleq np(np-1)\cdots[np-(k-1)] = np\cdot(n-1)p\cdot\cdots\cdot[n-(t-1)]p\cdot B = p^t\cdot n(n-1)\cdots[n-(t-1)]B(B\in\mathbf{N}^*, p\nmid B)$$

(1) 当 $k \neq tp$ 时，$k! \triangleq p\cdot 2p\cdot\cdots\cdot(t-1)p\cdot D = p^{t-1}(t-1)!D(D \in \mathbf{N}^*, p\nmid D)$，所以 $C_{np}^k = \frac{A}{k!} = p\cdot tC_n^t\cdot\frac{B}{D}$，又 $p^\alpha \parallel tC_n^t$，所以 $p^{\alpha+1} \parallel C_{np}^k$.

(2) 当 $k = tp$ 时，$k! = p\cdot 2p\cdot\cdots\cdot tp\cdot D = p^t\cdot t!D(D\in\mathbf{N}^*, p\nmid D)$，所以 $C_{np}^k = C_{np}^{tp} = \frac{A}{k!} = C_n^t\cdot\frac{B}{D}$，又 $p^\alpha \parallel C_n^t$，所以 $p^\alpha \parallel C_{np}^{tp}$.

**推论2** (1) 若 $p$ 是素数，$1 \leqslant k \leqslant np-1$，$p\nmid k$，则 $p \mid C_{np}^k$；

(2) 若 $p_1,\cdots,p_t$ 是互不相同的素数，$p_1\cdots p_t \mid n$，$1 \leqslant k \leqslant n-1$，且 $p_i \nmid k$ $(i=1,\cdots,t)$，则 $p_1\cdots p_t \mid C_n^k$.

**定理6** 若 $p$ 是素数，$0 \leqslant k \leqslant n$，$n \in \mathbf{N}^*$，则 $p \mid C_{np}^{kp} - C_n^k$.

**证明** $C_{np}^{kp} - C_n^k = \frac{1}{(kp)!}\{np(np-1)\cdots[np-(kp-1)] - C_n^k(kp)!\} \triangleq \frac{A}{(kp)!}$.

$$A = [(n-k)p+1][(n-k)p+2]\cdots[(n-k)p+kp] - C_n^k(kp)! = [(n-k)p+1]\cdots[(n-k)p+(p-1)][(n-k)p+(p+1)]\cdots[(n-k)p+(kp-1)]\cdot[(n-k)p+p][(n-k)p+2p]\cdots[(n-$$

$k)p+kp] - C_n^k p\cdot 2p\cdot\cdots\cdot kp\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(p-1)(p+1)\cdots(kp-1)=$
$k!C_n^k p^k\{[(n-k)p+1]\cdots[(n-k)p+(p-1)][(n-k)p+(p+$
$1)]\cdots[(n-k)p+(kp-1)]-1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(p-1)(p+1)\cdots(kp-1)\}\triangleq$
$k!C_n^k p^k\cdot PB(kp)! = p\cdot 2p\cdot\cdots\cdot kp\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(p-1)(p+1)\cdots$
$(kp-1);\triangleq$
$k!p^kC,(p,C)=1$

所以
$$C_{np}^{kp}-C_n^k=\frac{A}{(kp)!}=\frac{k!C_n^kp^k\cdot pB}{k!p^kC}=\frac{p\cdot BC_n^k}{C}$$
由$(p,C)=1$,得 $p\mid C_{np}^{kp}-C_n^k$.

**定理7** 若 $p$ 是素数,$k,l,m,n\in\mathbf{N}^*$,$p\nmid k$,$kp^m<np^l$,则

(1) 当 $m<l$ 时,$p\mid C_{np^l}^{kp^m}$;

(2) 当 $m\geqslant l$ 时,$p\mid C_{np^l}^{kp^m}-C_n^{kp^{m-l}}$.

**证明** 由定理6,得

当 $t\leqslant m$ 且 $t\leqslant l$ 时,$p\mid C_{np^l}^{kp^m}-C_{np^{l-t}}^{kp^{m-t}}$.

(1) 由 $m<l$ 知可令 $t=m$,得 $p\mid C_{np^l}^{kp^m}-C_{np^{l-m}}^{k}$.

因为 $l-m\geqslant 1$,$p\nmid k$,所以由推论2(1),得 $p\mid C_{np^{l-m}}^{k}$,$p\mid C_{np^l}^{kp^m}$.

(2) 由 $m\geqslant l$ 知可令 $t=l$,得 $p\mid C_{np^l}^{kp^m},C_n^{kp^{m-l}}$.

**定理8** 若 $p$ 是素数,$l\in\mathbf{N}^*$,$0<k<p^l$,则 $p\mid C_{p^l}^k$.

**证明** 当 $p\nmid k$ 时,由推论2(1)知定理8成立.

当 $p\mid k$ 时,设 $k=k'p^m$,$k',m\in\mathbf{N}^*$,$p\nmid k'$.因为 $k<p^l$,所以 $k'p^m<p^l$,$m<l$.由定理7(1),得 $p\mid C_{p^l}^{k'p^m}$,即 $p\mid C_{p^l}^k$.

**定理9** 若 $p$ 是素数,$l\in\mathbf{N}^*$,$0\leqslant k\leqslant p^l-t$,$1\leqslant t<p^l$,则 $p\mid C_{p^l-t}^k-(-1)^kC_{t+k-1}^k$.

**证明** 我们用本文介绍的一种多元数学归纳法对变量 $t$ 和 $k$ 证明

$$p\mid C_{p^l-t}^k-(-1)^kC_{t+k-1}^k(1\leqslant t\leqslant p^l-1,0\leqslant k\leqslant p^l-t) \quad ①$$

(1)$t=1$ 时,① 即

$$p\mid C_{p^l-1}^k-(-1)^k(0\leqslant k\leqslant p^l-1) \quad ②$$

下面对 $k$ 用数学归纳法证明 ② 成立.

1)$k=0$ 时,显然成立.

2)假设 $k=k'$ 时 ② 成立,即

$$p \mid C_{p^l-1}^{k'} - (-1)^{k'} \quad (0 \leqslant k' \leqslant p^l - 2) \qquad ③$$

有 $1 \leqslant k' + 1 \leqslant p^l - 1$，由定理 8 得 $p \mid C_{p^l}^{k'+1}$，即

$$p \mid C_{p^l-1}^{k'+1} + C_{p^l-1}^{k'} \qquad ④$$

由式③,④,得 $p \mid C_{p^l-1}^{k'+1} - (-1)^{k'+1}$，即 $k = k' + 1$ 时式②成立，所以 $t = 1$ 时式①成立.

(2) 假设 $t = t'$ 时式①成立，即

$$p \mid C_{p^l-t'}^{k} - (-1)^{k} C_{t'+k-1}^{k} \quad (1 \leqslant t' \leqslant p^l - 2) \qquad ⑤$$

又假设 $t = t' + 1, k = k'$ 时式①成立，即

$$p \mid C_{p^l-t'-1}^{k'} - (-1)^{k'} C_{t'+k'}^{k'} \quad (0 \leqslant k' \leqslant p^l - t' - 1) \qquad ⑥$$

因为 $0 \leqslant k \leqslant p^l - t$ 时式⑤成立，又 $0 \leqslant k' \leqslant p^l - t' - 1$，所以 $1 \leqslant k' + 1 \leqslant p^l - t'$，所以 $k = k' + 1$ 时式⑤成立，即

$$p \mid C_{p^l-t'}^{k'+1} - (-1)^{k'+1} C_{t'+k'}^{k'+1} \qquad ⑦$$

$$p \mid C_{p^l-t'-1}^{k'+1} + C_{p^l-t'-1}^{k'} - (-1)^{k'} C_{t'+k'}^{k'} - (-1)^{k'+1} C_{t'+k'+1}^{k'+1} \qquad ⑧$$

由式⑥,⑧,得 $p \mid C_{p^l-t'-1}^{k'+1} + (-1)^{k'+1} C_{t'+k'+1}^{k'+1}$，即 $t = t' + 1, k = k' + 1$ 时①成立.

所以定理 9 成立.

**定理 10**[3] 若 $p$ 是素数，$p \leqslant n$，则 $p \mid C_n^p - \left[\frac{n}{p}\right]$（这里 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 表示不大于 $\frac{n}{p}$ 的最大整数）.

## 参考文献

[1] 黄景辉.关于杨辉三角形中奇偶数的分布[J].湖南数学通讯,1992(1):33-35.
[2] 朱孝璋.数学归纳法的构造[J].数学通报,1991(2):42-45.
[3] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

# $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$的展开式系数的性质

## 1 三个和式的意义

(1)$\{1,2,\cdots,n\}$的所有$k(k\leqslant n)$元子集$\{a_1,\cdots,a_k\}$的全部元素乘积之和为$\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant n}a_1\cdots a_k(i=1,\cdots,k;a_i$两两不等),在不发生混淆时可记为$\sum a_1\cdots a_k$.

和式$\sum a_1\cdots a_k$有性质:

$$\sum_{1\leqslant a_i\leqslant n}a_1\cdots a_k=\sum_{1\leqslant a_i\leqslant n-1}a_1\cdots a_k+n\sum_{1\leqslant a_i\leqslant n-1}a_1\cdots a_{k-1} \qquad ①$$

由此可知$\sum(a_1\cdots a_k)^2=\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^2$的意义.

(2)$\{m,m+1,\cdots,n\}(m\leqslant n)$的所有$k(k\leqslant n-m+1)$元子集$\{a_1,\cdots,a_k\}$的全部元素乘积之和为$\sum\limits_{m\leqslant a_i\leqslant n}a_1\cdots a_k$.

由此可知$\sum\limits_{m\leqslant a_i\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^2$的意义.

(3)$\{1,\cdots,c-1,c+1,\cdots,n\}(c\leqslant n)$的所有$k(k\leqslant n-1)$元子集$\{a_1,\cdots,a_k\}$的全部元素乘积的平方和为$\sum\limits_{\substack{1\leqslant a_i\leqslant n\\ a_i\neq c}}(a_1\cdots a_k)^2=\sum\limits_{a_i\neq c}(a_1\cdots a_k)^2$.

例如,$\sum\limits_{\substack{1\leqslant a_i\leqslant 5\\ (a_i\neq 4)}}(a_1a_2)^2=(1\times 2)^2+(1\times 3)^2+(1\times 5)^2+(2\times 3)^2+(2\times 5)^2+(3\times 5)^2$.

和式$\sum\limits_{a_i\neq c}(a_1\cdots a_k)^2$有性质:

$$\sum_{a_i\neq c}(a_1\cdots a_k)^2=\sum(a_1\cdots a_k)^2-c^2\sum_{a_i\neq c}(a_1\cdots a_{k-1})^2 \qquad ②$$

连续运用式②,得

$$\sum_{a_i\neq c}(a_1\cdots a_k)^2=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^jc^{2j}\sum(a_1\cdots a_{k-j})^2+(-1)^kc^{2k} \qquad ③$$

## 2 $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$ 的展开式系数 $G_n^k$

$$\prod_{i=1}^{n}(x+i)=(x+1)\cdots(x+n)=x^n+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{1\leqslant a_i\leqslant n}a_1\cdots a_k\Big)x^{n-k} \qquad ④$$

其中 $x^{n-k}$ 的系数 $\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant n}a_1\cdots a_k$ 叫做 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x+i)$ 的展开式的第 $k+1$ 项系数，记作 $G_n^k=\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant n}a_1\cdots a_k\,(k=1,2,\cdots,n)$. 又补充定义：$G_n^0=1$；当 $k>n$ 时，$G_n^k=0$. 这样，当 $n\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}$ 时，$G_n^k$ 均有意义（下文中 $G_n^k$ 里的式子 $n,k$ 的取值均在此范围内）.

式④，即

$$\prod_{i=1}^{n}(x+i)=\sum_{k=0}^{n}G_n^k x^{n-k} \qquad ④'$$

还可得

$$\prod_{i=1}^{n}(x+iy)=\sum_{k=0}^{n}G_n^k x^{n-k}y^k \qquad ⑤$$

## 3 $G_n^k$ 的性质

**定理 1** $G_n^k=G_{n-1}^k+nG_{n-1}^{k-1}\,(n\geqslant 2)$ ⑥

**证明** (1) 当 $k=1$ 时，左边 $=G_n^1=\sum\limits_{1\leqslant a_1\leqslant n}a_1=\sum\limits_{i=1}^{n}i$，右边 $=G_{n-1}^1+nG_{n-1}^0=\sum\limits_{i=1}^{n-1}i+n=\sum\limits_{i=1}^{n}i$，左边 = 右边.

(2) 当 $k>1$ 时，由式①知成立.

由式⑥可列出 $G_n^k\,(k=0,1,\cdots,n)$ 数表，叫做 $G_n^k$ 三角：

$G_n^k$ 三角：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_1^k$ | 1 | 1 | | | | |
| $G_2^k$ | 1 | 3 | 2 | | | |
| $G_3^k$ | 1 | 6 | 11 | 6 | | |
| $G_4^k$ | 1 | 10 | 35 | 50 | 24 | |
| $G_5^k$ | 1 | 15 | 85 | 225 | 274 | 120 |
| … | … | … | … | … | … | … |

（相邻两行间：左上数直接下移，右上数 ×2、×3、×4、×5 后相加）

$G_n^k$ 与 $C_n^k$(组合数) 的性质相似,列举如下:

(1) $\prod\limits_{i=1}^{n}(x+i)=\sum\limits_{k=0}^{n}G_n^k x^{n-k},(x+1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}$.

(2) $G_n^k=G_{n-1}^k+nG_{n-1}^{k-1},C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

(3) 当 $n$ 是奇素数时,$n \mid G_n^{n-1}+1,n \mid C_n^{n-1}$.

(4) 当 $n$ 是奇素数时,$k=1,2,\cdots,n-2$ 时,$n \mid G_{n-1}^k,n \mid G_n^k,n \mid C_{n-1}^k-(-1)^k,n \mid C_n^k$.

(5) 当 $n$ 是奇素数时,$n \mid \sum\limits_{i=1}^{t}(-1)^i G_t^i G_{n-t-1}^{k-i},n \mid \sum\limits_{i=0}^{t}C_t^i(C_{n-t-1}^{k-i}-(-1)^k)$.

下面是 $G_n^k$ 的整除性质.

**定理 2** 若 $n$ 是素数,则 $n \mid G_n^{n-1}+1$.

**证明** $G_n^{n-1}+1=G_{n-1}^{n-1}+nG_{n-1}^{n-2}+1=(n-1)!+1+nG_{n-1}^{n-2}$.

由威尔逊素数定理[1]:$n \mid (n-1)!+1$,得 $n \mid G_n^{n-1}+1$.

**定理 3** 若 $n,k$ 是奇数,$k \leqslant n-2$,则 $n \mid G_{n-1}^k,n \mid G_n^k$.

**证明** 由式⑥,只证 $n \mid G_{n-1}^k$.

$G_{n-1}^k=\sum\limits_{1 \leqslant a_i \leqslant n-1} a_1 \cdots a_k$,我们把右边的项两两配对,使每对数之和能被 $n$ 整除,便得 $n \mid G_{n-1}^k$.

配对的方法是这样的:

设 $\sum\limits_{1 \leqslant a_i \leqslant n-1}^{n} a_1 \cdots a_k$ 的任意一项为 $B=b_1 \cdots b_k$,$b_1 \cdots b_k$ 中有且只有 $t$ 对($t=0,1,\cdots,\frac{k-1}{2}$)数的和为 $n$,由乘法交换律,可不妨设

$$b_1+b_k=n,\cdots,b_t+b_{k-t+1}=n$$

这时可证 $B'=b_1 \cdots b_t(n-b_t+1)b_{t+2} \cdots b_k$ 也是 $\sum\limits_{1 \leqslant a_i \leqslant n-1} a_1 \cdots a_k$ 中的项,且 $b_1,\cdots,b_t,n-b_t+1,b_{t+2},\cdots,b_k$ 中也只有同样的 $t$ 对数的和为 $n$.

就让 $B$ 与 $B'$ 配对.

还可证明,按照这种配对法则,$B'$ 也恰与 $B$ 配对.

所以这样的配对可不重不漏的把 $\sum\limits_{1 \leqslant a_i \leqslant n-1} a_1 \cdots a_k$ 的项两两配对相加,且每对数的和能被 $n$ 整除,所以 $n \mid G_{n-1}^k$.

**定理 4** 若 $n$ 是奇素数,$k$ 是偶数,$k \leqslant n-3$,则 $n \mid G_n^k$.

为证明定理 4,先给出几个引理.

**引理 1** $1^2\sum\limits_{a_i \neq 1}(a_1 \cdots a_{t-1})^2+\cdots+m^2\sum\limits_{a_i \neq m}(a_1 \cdots a_{t-1})^2=t\sum\limits_{1 \leqslant a_i \leqslant m}(a_1 \cdots a_t)^2$.

**证明** 我们证明

$$\sum_{a_j\neq 1}(1a_1\cdots a_{t-1})^2+\cdots+\sum_{a_j\neq m}(ma_1\cdots a_{t-1})^2=t\sum_{1\leqslant b_i\leqslant m}(b_1\cdots b_t)^2$$

上式左边的通项是$(b_1\cdots b_t)^2(1\leqslant b_i\leqslant m,i=1,\cdots,t)$，下面求此项的系数.

左边有 $t$ 个和式：

$$\sum_{a_j\neq b_1}(b_1a_1\cdots a_{t-1})^2,\sum_{a_j\neq b_2}(b_2a_1\cdots a_{t-1})^2,\cdots,\sum_{a_j\neq b_t}(b_ta_1\cdots a_{t-1})^2$$

其中每个和式只含一项$(b_1\cdots b_t)^2$，而其余的和式均不含$(b_1\cdots b_t)^2$.

所以$(b_1\cdots b_t)^2$ 的系数是 $t$，要证等式成立.

**引理 2** 若 $2m+1$ 是素数，$k\in\mathbf{N}^*,k<m$，则 $2m+1\mid\sum\limits_{i=1}^{m}i^{2k}$.

**证明** 文献[2]已得

$$\sum_{i=1}^{m}i^{2k}=\frac{A(m)}{2\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k+1)}$$

并且 $2m+1\mid A(m)$.

由 $k<m$，得 $2k+1<2m+1$，所以当 $2m+1$ 是素数时，$(2m+1,2\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k+1))=1$. 得 $2m+1\mid\sum\limits_{i=1}^{m}i^{2k}$.

**引理 3** 若 $2m+1$ 是素数，$t<m$，则 $2m+1\mid\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_t)^2$.

**证明** 当 $t=1$ 时，$\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant m}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{m}i^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$.

由 $m>1$，$2m+1$ 是素数，得 $2m+1\mid\sum\limits_{1\leqslant a_1\leqslant m}a_1^2$，即 $t=1$ 时成立.

当 $t=2$ 时，$\left(\sum\limits_{i=1}^{m}i^2\right)^2=2\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1a_2)^2+\sum\limits_{i=1}^{m}i^4$.

当 $m>2$ 时，由引理 2，得 $2m+1\mid\sum\limits_{i=1}^{m}i^2$，$2m+1\mid\sum\limits_{i=1}^{m}i^4$，所以 $2m+1\mid\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1a_2)^2$.

下证当 $t\geqslant3$ 时成立.

$$(1^2+2^2+\cdots+m^2)\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_{t-1})^2=$$

$$1^2\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_{t-1})^2+\cdots+m^2\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_{t-1})^2=$$

$$1^2\sum_{a_j\neq1}(1a_1\cdots a_{t-2})^2+1^2\sum_{a_j\neq1}(a_1\cdots a_{t-1})^2+\cdots+$$

$$m^2\sum_{a_j\neq m}(ma_1\cdots a_{t-2})^2+m^2\sum_{a_j\neq m}(a_1\cdots a_{t-1})^2=$$

$$\sum_{i=1}^{m}i^4\sum_{a_j\leqslant i}(a_1\cdots a_{t-2})^2+t\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_t)^2(\text{用⑦})=$$

$$t\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_t)^2+\sum_{i=1}^{m}i^4\sum_{j=0}^{t-3}(-1)^j i^{2j}\sum(a_1\cdots a_{t-j-2})^2+$$

$$\sum_{i=1}^{m}i^4(-1)^{t-2}i^{2(t-2)}(\text{用③})=$$

$$t\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}\sum(a_1\cdots a_t)^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{t-3}(-1)^j i^{2j+4}\sum(a_1\cdots a_{t-j-2})^2+(-1)^{t-2}\sum_{i=1}^{m}i^{2t}=$$

$$t\sum_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_t)^2+\sum_{j=2}^{t-1}(-1)^j\Big(\sum_{i=1}^{m}i^{2j}\Big)\sum(a_1\cdots a_{t-j})^2+(-1)^t\sum_{i=1}^{m}i^{2t}$$

即 $$\Big(\sum_{i=1}^{m}i^2\Big)\sum(a_1\cdots a_{t-1})^2=t\sum(a_1\cdots a_t)^2+$$

$$\sum_{j=2}^{t-1}(-1)^j\Big(\sum_{i=1}^{m}i^{2j}\Big)\sum(a_1\cdots a_{t-j})^2+(-1)^t\Big(\sum_{i=1}^{m}i^{2t}\Big) \qquad ⑧$$

由引理 2 知，$2m+1\mid t\sum(a_1\cdots a_t)^2$，从而有 $2m+1\mid\sum(a_1\cdots a_t)^2$.

**定理 4 的证明** 只证 $n\mid G_{n-1}^k$.

设 $G_{n-1}^k=\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant n-1}a_1\cdots a_k$ 的任意一项 $B=b_1,\cdots,b_k$，$b_1\cdots b_k$ 中有且只有 $t\left(t=0,1,\cdots,\frac{k}{2}-1\right)$ 对数的和为 $n$，不妨设

$$b_1+b_k=n,\cdots,b_t+b_{k-t+1}=n$$

同定理3的证明，可让 $B$ 与 $B'=b_1\cdots b_t(n-b_{t+1})b_{t+2}\cdots b_k$ 配对，按此配对法则，$B'$ 恰与 $B$ 配对.

此时，$\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant n-1}a_1\cdots a_k$ 中的这些项可以两两配对，且每对数的和能被 $n$ 整除，剩下的项是：

$a_1,\cdots,a_k$ 中有 $t=\frac{k}{2}$ 对数的和为 $n$. 不妨设 $a_1+a_k=n,\cdots,a_t+a_{t+1}=n$（$a_1,\cdots,a_t$ 均 $\leqslant\frac{n}{2}$；$a_{t+1},\cdots,a_k$ 均 $\geqslant\frac{n}{2}$）.

所以未配对的项是 $\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant n-1}a_1\cdots a_t(n-a_t)\cdots(n-a_1)=A\cdot n+(-1)^t\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_t)^2$（设 $n=2m+1$）.

所以只需证明 $2m+1\mid\sum\limits_{1\leqslant a_j\leqslant m}(a_1\cdots a_t)^2$（便得 $n\mid G_{n-1}^k$），而这正是引理

$3(k=2t \leqslant n-3=2m+1-3$,所以 $t \leqslant m-1, t<m)$.

**定理 5** 若 $n$ 是奇素数,$k \leqslant n-2$,则 $n \mid \sum_{i=0}^{t}(-1)^{i} G_{t}^{i} G_{n-i-1}^{k-i}$.

**证明** 由定理 3,4,得

若 $n$ 是奇素数,$k \leqslant n-2$,则 $n \mid G_{n-1}^{k}$.

对 $t$ 用数学归纳法并用上述结论,可证定理 5.

用 ④′ 还可得 $G_{n}^{k}$ 的如下性质:

$$\sum_{k=0}^{n} G_{n}^{k}=(n+1)!$$

$$\sum_{t=0}^{n}(-1)^{t} G_{n}^{n-t}=0$$

$$(m+n)!=m!\sum_{k=0}^{n} m^{n-k} G_{n}^{k}$$

## 参考文献

[1] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

[2] 刘会成.自然数方幂和的一个性质的证明[J].数学通讯,1994(2):20-22.

# 两类 $n$ 元排列数对模 $n$ 的同余性质

设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $12\cdots n$ 的一个排列，把$\overline{i_1,i_2,\cdots,i_n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} i_{n-k}\cdot 10^k$ 叫做一个 $n$ 元排列数. $k = 0,1,\cdots,n-1$，把排列 $12\cdots n$ 的前 $k$ 个数码移至后面得到的 $n$ 元排列数 $a_k = \overline{k+1,\cdots,n-1,n,1,2,\cdots,k}$，把排列 $n\cdots 21$ 的后 $k$ 个数码移至前面得到的 $n$ 元排列数 $b_k = \overline{k,\cdots,2,1,n,n-1,\cdots,k+1}$.

本文研究 $a_k,b_k$ 这两类 $n$ 元排列数对模 $n$ 的同余性质，并提出一些尚未解决的问题.

把 $a_k,b_k(k = 0,1,\cdots,n-1)$ 这两类 $n$ 元排列数写成数阵

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

当且仅当 $A_n$ 中的元素 $a_k \equiv a'_k \pmod n$，$b_k \equiv b'_k \pmod n$ 时，记

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & \cdots & a'_{n-1} \\ b'_0 & b'_1 & \cdots & b'_{n-1} \end{pmatrix} \pmod n$$

记此同余式右边的数阵为 $A'_n$，得

$$A_n \equiv A'_n \pmod n$$

$A'_n$ 叫做 $A_n$ 对模 $n$ 的同余数阵.

本文要用到同余意义下相等的说法(这种说法使本文叙述的同余性质简洁方便)，当且仅当 $a \equiv b \pmod n$ 时，说 $a,b$ 在模 $n$ 的同余下相等. 比如，在模 5 的同余下，$-2 = 3 = 8; 2+4 = 1; 1-2 = 4; 1,2,3,-1$ 是公差为 1 的等差数列.

特别约定，本文中未注明的相等，均指在模 $n$ 的同余下相等，所以可以说，$A_n$ 的同余数阵是唯一确定的，为 $A_n = A'_n$，$a_k = a'_k$，$b_k = b'_k$. 请读者在阅读或引用下文时，注意理解这一点，或把相等换成同余的说法.

先看一些 $A'_n$ 的例子.

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A'_4=\begin{pmatrix}2&1&0&3\\1&0&3&2\end{pmatrix};$$

$$A'_5=\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\1&2&3&4&0\end{pmatrix};$$

$$A'_6=\begin{pmatrix}0&3&0&3&0&3\\3&0&3&0&3&0\end{pmatrix};$$

$$A'_7=\begin{pmatrix}5&6&0&1&2&3&4\\3&4&5&6&0&1&2\end{pmatrix};$$

$$A'_8=\begin{pmatrix}6&5&4&3&2&1&0&7\\1&0&7&6&5&4&3&2\end{pmatrix};$$

$$A'_9=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix};$$

$$A'_{10}=\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&8&9\\1&2&3&\cdots&9&0\end{pmatrix};$$

$$A'_{11}=\begin{pmatrix}6&7&8&\cdots&4&5\\6&7&8&\cdots&4&5\end{pmatrix};$$

$$A'_{12}=\begin{pmatrix}6&3&0&9&6&3&0&9&6&3&0&9\\3&0&9&6&3&0&9&6&3&0&9&6\end{pmatrix};$$

$$A'_{13}=\begin{pmatrix}4&5&6&\cdots&2&3\\10&11&12&\cdots&8&9\end{pmatrix};$$

$$A'_{14}=\begin{pmatrix}6&3&0&\cdots&12&9\\5&2&13&\cdots&11&8\end{pmatrix};$$

$$A'_{15}=\begin{pmatrix}0&6&12&3&9&0&\cdots&3&9\\6&12&3&9&0&6&\cdots&9&0\end{pmatrix};$$

$$A'_{16}=\begin{pmatrix}6&13&4&\cdots&8&15\\1&8&15&\cdots&3&10\end{pmatrix}.$$

读者由此一定能看出 $A'_n$ 的一些性质,并可用以上例子验证以下诸定理.

**定理1** 若 $n=3^{\alpha}n_1(\alpha\in\mathbf{N}^*,3\nmid n_1)$(非同余意义),则 $A'_n$ 的两行均以 $n_1$ 为一个周期出现.

**证明** 即证(1) $a_k\equiv a_{n_1+k}(\bmod\ n)$;(2) $b_k\equiv b_{n_1+k}(\bmod\ n)$.

(1) 即证 $n\mid a_{n_1+k}-a_k$,只证

$$n\mid\overline{n_1+k+1,\cdots,n-1,n,n+1,\cdots,n+n_1+k}-\overline{k+1,\cdots,n-1,n,n+1,\cdots,n+k}$$

(后面多次用到这种方法),即 $n\mid n_1\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n\text{个}1}$.

因为 $n=3^{\alpha}n_1$,所以只证 $3^{\alpha}\mid\underbrace{1\cdots1}_{3^{\alpha}n_1\text{个}1}$,$3^{\alpha+2}\mid10^{3^{\alpha}n_1}-1$,只证 $3^{\alpha+2}\mid10^{3^{\alpha}}-1$.

这可对 $\alpha$ 用数学归纳法证其成立. 所以结论(1)成立.

(2) 同理可证

**定理2**　在 $A'_n$ 中,若 $a'_l = b'_0$,则把排列 $a'_0a'_1\cdots a'_{n-1}$ 的前 $l$ 个数码移至后面得到的排列 $a'_la'_{l+1}\cdots a'_{n-1}a'_0a'_1\cdots a'_{l-1}$ 就是排列 $b'_0b'_1\cdots b'_{n-1}$(显然 $l$ 由 $n$ 确定).

**证明**　即证当 $a'_l \equiv b'_0 (\mathrm{mod}\ n)$ 时, $a'_l \equiv b'_0, a'_{l+1} \equiv b'_1, \cdots, a'_{n-1} \equiv b'_{n-1-l}, a'_0 \equiv b'_{n-l}, a'_1 \equiv b'_{n+1-l}, \cdots, a'_{l-1} \equiv b'_{n-1} (\mathrm{mod}\ n)$.

我们证明,若 $n \mid a_l - b_0$,则 $a_{l+h} - b_h (h = 0,1,\cdots,n-1-l), n \mid a_{h'} - b_{n-1+h'} (h' = 0,1,\cdots,l-1)$.

用定理1的方法,可证 $n \mid (a_{l+h} - a_l) - (b_h - b_0), n \mid (a_l - a_{h'}) - (b_{n-l+h'} - b_0)$,所以要证结论成立,定理2成立.

**问题1**　对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,求出 $l(0 \leqslant l \leqslant n-1)$,使 $n \mid a_l - b_0$.

因为 $n \mid a_l - b_0 \Leftrightarrow n \mid \overline{l+1, l+2, \cdots, n+l} - \overline{n, \cdots, 2, 1} \Leftrightarrow n \mid \sum\limits_{i=0}^{n-1}(n+l-i)\cdot 10^i - \sum\limits_{i=0}^{n-1}(i+1)\cdot 10^i \Leftrightarrow n \mid \frac{1}{81}[(9l+10)(10^n-1)-9n] - \frac{1}{81}[(9n-1)\cdot 10^n + 1] \Leftrightarrow n \mid (l+1)\cdot \underbrace{1\cdots1}_{n个1} + \frac{2}{9}(\underbrace{1\cdots1}_{n个1} - n)$,所以问题1,即

**问题1′**　对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,求出 $l(0 \leqslant l \leqslant n-1)$,使 $n \mid (l+1)\cdot \underbrace{1\cdots1}_{n个1} + \frac{2}{9}(\underbrace{1\cdots1}_{n个1} - n)$.

**定理3**　当 $n \geqslant 2$ 时, $A'_n$ 的两行均成等差数列,且这两个等差数列的公差相同.

**证明**　只证(1) $n \mid (a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k)$;(2) $n \mid (b_{k+2} - b_{k+1}) - (b_{k+1} - b_k)$;(3) $n \mid (a_{k+1} - a_k) - (b_{k+1} - b_k)$. 这可由定理1的方法证得.

**定义**　当 $n \geqslant 2$ 时, $A'_n$ 的第一行或第二行的公差叫做 $A'_n$ 的公差,用 $d_n$ 表示,有 $d_n = \overline{2,3,\cdots,n,1} - \overline{1,2,\cdots,n} = \underbrace{1\cdots1}_{n个1}$.

**定理4**　若 $n$ 是素数, $(3,n) = 1$,则 $d_n = 1$.

**证明**　只证 $n \mid \underbrace{1\cdots1}_{n个1} - 1$,这是成立的.

因为 $9 \mid 10^n - 10, n \mid 10^n - 10$(Fermat小定理), $(3,n) = 1$,所以 $9n \mid 10^n - 10, n \mid \frac{1}{9}(10^n - 10), n \mid \underbrace{1\cdots1}_{n个1} - 1$.

注:把定理4中的条件"$n$ 是素数"减弱为"$n \mid 10^n - 10$",得到的结论也成

立,以下推论 1,2,定理 5,6,8,9 均可如此减弱条件.

**问题 2** 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,求出$\underbrace{1\cdots1}_{n个1}$对模 $n$ 的最小非负剩余(即 $d_n$).

**推论 1** 若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,则 $A'_n$ 中第一(二)行的第 $k+l+1$ 个数等于第 $l+1$ 个数 $+k$.

**定理 5** 若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,则 $A'_n$ 中第一行两数之和为 1.

**证明** 即证 $n \mid a_0+b_0-1$,这是成立的.

因为 $a_0+b_0-1 \equiv \overline{1,2,\cdots,n}+\overline{n,\cdots,2,1}-1 \equiv 0 \pmod n$(末步见定理 4 的证明).

可把定理 5 推广为

**推论 2** 若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,则

(1)$n \mid \overline{i_1\cdots i_n}+\overline{n+1-i_1,\cdots,n+1-i_n}-1$;

(2)$n \mid a_k+b_{n-k}-1$.

**定理 6** 若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,则 $A'_n$ 中第 $k+1$ 列两数之和为 $2k+1$.

**证明** 由推论 1 和定理 5 可得.

**定理 7** $A'_n$ 中第一列两数之和为 $d_n$,第 $k+1$ 列两数之和为$(2k+1)d_n$.

**证明** 因为 $d_n=\underbrace{1\cdots1}_{n个1}$,所以 $a'_0+b'_0=\overline{1,2,\cdots,n}+\overline{n,\cdots,2,1}=d_n$,即 $A'_n$ 中第一列两数之和为 $d_n$.由定理 3 和此结论可得:$A'_n$ 中第 $k+1$ 列两数之和为$(2k+1)d_n$.

**定理 8** $h_m=6\left[\frac{m+1}{2}\right]+(-1)^m$($h_m$ 是一列所有从小到大的 $6m\pm1$ 形数,所有大于 3 的素数都可表示为 $h_m$ 的形式),若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,$n=h_m$(非同余意义),则 $b'_0=\sum\limits_{i=1}^{m} i$.

**证明** 即证 $n \mid \overline{n,\cdots,2,1}-\sum\limits_{i=1}^{m} i$.

前面已求得$\overline{n,\cdots,2,1}=\frac{1}{81}[(9n-1)\cdot10^n+1]$,所以 $81 \mid (9n-1)\cdot10^n+1$.

$$h_{2m}=6m+1,h_{2m-1}=6m-1$$

当 $n=6m+1$ 时,即证 $81(6m+1) \mid [9(6m+1)-1]\cdot10^{6m+1}+1-81m(2m+1)$,只证 $6m+1 \mid [9(6m+1)-1]\cdot10^{6m+1}+1-81m(2m+1)$,而这可由$6m+1 \mid 10^{6m+1}-10$ 得到,所以 $n=6m+1$ 时结论成立,同样可证 $n=6m-1$ 时也成立.

还可证明:对于任意的 $m \in \mathbf{N}^*$,均有 $h_m \mid 9\sum\limits_{i=1}^{m} i+1$.

若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,则 $n\mid 9b_0+1, n\mid 9a_0-10$.

由定理 5,8,得

**定理 9** 在定理 8 的条件下,$a'_0=1-\sum\limits_{i=1}^{m} i$.

**问题 3** 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,求出 $\overline{n,\cdots,2,1}$ 对模 $n$ 的余数.

因为 $\overline{n,\cdots,2,1}=\frac{1}{81}[(9n-1)\cdot 10^n+1]=n\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n个1}-\frac{1}{9}(\underbrace{1\cdots1}_{n个1}-n)=\frac{1}{9}(n-\underbrace{1\cdots1}_{n个1})$,所以问题 3,即

**问题 3′** 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,求出 $\frac{1}{9}(n-\underbrace{1\cdots1}_{n个1})$ 对模 $n$ 的最小非负剩余.

**说明** 当 $n\mid 10^n-10,(3,n)=1$ 时,由定理 8 可得数值较小的 $b'_0$,再由定理 5 得 $a'_0$,再由定理 4 得 $A'_n$,这样写出数阵 $A'_n$ 是容易的.

把 $d_n$ 限定为 $0\leqslant d_n\leqslant n-1$,则 $d_n$ 的值是唯一确定的(非同余意义),可知当 $n=3,5,7,9,10,11,13,15,16,17,19$ 时,$0\leqslant d_n<\frac{n}{2}$;当 $n=2,6,18$ 时,$d_n=\frac{n}{2}$;当 $n=4,8,12,14$ 时,$d_n>\frac{n}{2}$.

**问题 4** 把 $d_n$ 限定为 $0\leqslant d_n\leqslant n-1$,分别求出所有的 $n$,使(1)$0\leqslant d_n<\frac{n}{2}$;(2)$d_n=\frac{n}{2}$;(3)$\frac{n}{2}<d_n\leqslant n-1$.

若已解决问题 2,就解决了问题 4.

**定理 10** 若 $n$ 是素数,$(3,n)=1$,则 $A'_n$ 的两行完全一致的充要条件是 $n=11$.

**证明** 只证必要性,即证

若 $n\mid a'_0-b'_0$,$n$ 是素数,$(3,n)=1$,则 $n=11$.

可设 $n=h_m$(非同余意义).当 $n=h_{2m}=6m+1$ 时(非同余意义),$b'_0=\sum\limits_{i=1}^{2m} i$,$a'_0=1-\sum\limits_{i=1}^{2m} i$,$a'_0-b'_0=1-2\sum\limits_{i=1}^{2m} i=1-2m(2m+1)$,

所以 $6m+1\mid 1-2m(2m+1)$,$6m+1\mid m+2$,$m$ 不存在.

当 $n=h_{2m-1}=6m-1$(非同余意义),$b'_0,a'_0,a'_0-b'_0$ 全同上,所以 $6m-1\mid 1-2m(2m+1)$,$6m-1\mid m-1$,得 $m=1,n=11$,定理 10 成立.

可把定理 10 推广为

**定理 10′** 若 $n\mid 10^n-10,(3,n)=1$,$n$ 可表示成定理 8 中的 $h_m$,则当且仅当 $n=11$ 时 $A'_n$ 的两行完全一致.

**问题 5** 求出使 $A'_n$ 中两行完全一致的所有 $n(n\geqslant 2)$.

问题5中所求的 $n$ 满足的充要条件是 $n \mid \overline{1,2,\cdots,n}-\overline{n,\cdots,2,1} \Leftrightarrow n \mid \overline{1,3,5,\cdots,2n-1} \Leftrightarrow n \mid \frac{1}{81}[11(10^n-1)-18n] \Leftrightarrow n \mid \underbrace{1\cdots1}_{n个1}+\frac{2}{9}(\underbrace{1\cdots1}_{n个1}-n)$.

如果彻底解决了问题2,3′,也就容易解决问题5′.

最后,笔者提出

**猜想** 当 $(3,n)=1$ 时,所有的 $n$ 元排列数集合 $\{\overline{i_1,\cdots,i_n} \mid \overline{i_1,\cdots,i_n}=\sum_{k=0}^{n-1} i_{n-k}\cdot 10^k, i_1\cdots i_n$ 是 $1\cdots n$ 的一个排列$\}$ 中对模 $n$ 的余数为 $0,1,\cdots,n-1$ 的元素个数相同,均为 $(n-1)!$ 个.

**注** (1) 可以验证猜想在 $n=1,2,3,4,5,10$ 时成立.

(2) 笔者认为当 $n=10^j (j\in \mathbf{N}^*)$ 时,证明以上猜想成立要容易些.

# 两个和式的求法及整除性质

本文中未注明范围的字母均表示正整数,有时也注明字母可取零.

## 1 两个和式的意义与记号

(1)$\{m,m+1,\cdots,n\}(m\leqslant n)$的所有$k(k\leqslant n-m+1)$元子集$\{a_1,\cdots,a_k\}$的全部元素乘积的$l$次幂之和为$\sum\limits_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^l$,它是$C_{n-m+1}^k$项和,记为$\sum\limits_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^l=A(k,m,n,l)$.约定$A(0,m,n,l)=1$.

还有$A(k,1,n,1)=\sum\limits_{m\leqslant a_j\leqslant n}a_1\cdots a_k=G_n^k$(见文献[1]).

$A(k,m,n,l)=A(k,m,n-1,l)+n^lA(k-1,m,n-1,l)(k\in\mathbf{N}^*)$ ①

(2)$\{m,\cdots,c-1,c+1,\cdots,n\}(m\leqslant c\leqslant n)$的所有$k(k\leqslant n-m)$元子集$\{a_1,\cdots,a_k\}$的全部元素乘积的$l$次幂之和为$\sum\limits_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq c)}}(a_1\cdots a_k)^l=B(k,m,n,c,l)$.约定$B(0,m,n,c,l)=1$.

$$A(k,m,n,l)=B(k,m,n+1,n+1,l)$$

$$B(k,m,n,c,l)=A(k,m,n,l)-c^lB(k-1,m,n,c,l) \quad ②$$

$$B(k,m,n,c,l)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^tc^{lt}A(k-t,m,n,l) \quad ③$$

(用式②并对$k$用数学归纳法可证式③成立)

(3)和式的另外意义:为展开式的系数.

$\prod\limits_{i=1}^{n}(x+i^l)=\sum\limits_{k=0}^{m}A(k,1,n,l)x^{n-k}$;

$\prod\limits_{i=m}^{n}(x+i^l)=\sum\limits_{k=0}^{n-m+1}A(k,m,n,l)x^{n-m-k+1}$;

$\prod\limits_{\substack{i=1\\(i\neq c)}}^{n}(x+i^l)=\sum\limits_{k=0}^{n-m}B(k,m,n,c,l)x^{n-m-k}$.

可得$\sum\limits_{k=0}^{n}A(k,1,n,l)=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+i^l)$等式子.

## 2 $A(k,m,n,l)=\sum\limits_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^l$ 的求法

**引理 1** $$m^l\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq m)}}(a_1\cdots a_{k-1})^l+\cdots+n^l\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq n)}}(a_1\cdots a_{k-1})^l=$$
$$\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq m)}}(ma_1\cdots a_{k-1})^l+\cdots+\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq n)}}(na_1\cdots a_{k-1})^l=$$
$$k\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^l \quad ④$$

**证明** 同文献[1]引理 1 的证明可证.

记号 $S(k,m,n)=\sum\limits_{i=m}^{n}i^k(m\leqslant n),S(k,1,n)=\sum\limits_{i=1}^{n}i^k$.

**定理 1** $$kA(k,m,n,l)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}S(lt,m,n)\cdot A(k-t,m,n,l) \quad ⑤$$

**证明** 当 $k=1$ 时成立:$A(1,m,n,l)=\sum\limits_{m\leqslant a_1\leqslant n}a_1^l=S(l,m,n)$.

当 $k=2$ 时也成立:

因为 $S(l,m,n)A(1,m,n,l)=(m^l+\cdots+n^l)^2=(m^{2l}+\cdots+n^{2l})+2\sum\limits_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1a_2)^l$;

所以 $2A(2,m,n,l)=S(l,m,n)A(1,m,n,l)-S(2l,m,n)$.

下证当 $k\geqslant 3$ 时成立,当 $k\geqslant 3$ 时:

$$(m^l+\cdots+n^l)\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_{k-1})^l=$$
$$m^l\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_{k-1})^l+\cdots+n^l\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_{k-1})^l=$$
$$m^l\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq m)}}(ma_1\cdots ma_{k-2})^l+m^l\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq m)}}(a_1\cdots a_{k-1})^l+\cdots+$$
$$n^l\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq n)}}(na_1\cdots a_{k-2})^l+n^l\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq n)}}(a_1\cdots a_{k-1})^l=$$
$$\sum_{i=m}^{n}i^{2l}\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq i)}}(a_1\cdots a_{k-2})^l+k\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^l(\text{用式④})=$$
$$\sum_{i=m}^{n}i^{2l}B(k-2,m,n,i,l)+kA(k,m,n,l)=$$
$$kA(k,m,n,l)+\sum_{i=m}^{n}i^{2l}\sum_{t=0}^{k-2}(-1)^t i^{lt}A(k-t-2,m,n,l)(\text{用式③})=$$

$kA(k,m,n,l)+\sum_{i=m}^{n}\sum_{t+2=2}^{k}(-1)^{t+2}i^{l(t+2)}A(k-(t+2),m,n,l)=$

$kA(k,m,n,l)+\sum_{i=m}^{n}\sum_{t=2}^{k}(-1)^{t}i^{lt}A(k-t,m,n,l)=$

$kA(k,m,n,l)+\sum_{t=2}^{k}(-1)^{t}(\sum_{i=m}^{n}i^{lt})A(k-t,m,n,l)$

得 $kA(k,m,n,l)=S(l,m,n)A(k-1,m,n,l)+\sum_{t=2}^{k}(-1)^{t-1}S(lt,m,n)A(k-t,m,n,l)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}S(lt,m,n)\cdot A(k-t,m,n)$.

定理 1 成立.

当 $m=1$ 时,即

$$kA(k,1,n,l)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}S(lt,1,n)A(k-t,1,n,l) \quad ⑥$$

**定理 2** $A(k,m,n,l)=A(k,1,n,l)-\sum_{t=2}^{m}(t-1)^{l}A(k-1,t,n,l)$ $(m\geqslant 2)$ ⑦

**证明** $A(k,1,n,l)=\sum_{1\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^{l}=\sum_{2\leqslant a_j\leqslant n}(1a_1\cdots a_{k-1})^{l}+\sum_{3\leqslant a_j\leqslant n}(2a_1\cdots a_{k-1})^{l}+\cdots+\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}((m-1)a_1\cdots a_{k-1})^{l}+\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^{l}=\sum_{t=2}^{m}(t-1)^{l}\sum_{t\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_{k-1})^{l}+\sum_{m\leqslant a_j\leqslant n}(a_1\cdots a_k)^{l}$,从而可得式 ⑦ 成立.

如 $A(k,2,n,l)=A(k,1,n,l)-A(k-1,2,n,l)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}A(k-t,1,n,l)$;

$A(k,3,n,l)=A(k,1,n,l)-A(k-1,2,n,l)-2^{l}A(k-1,3,n,l)=A(k,2,n,l)-2^{l}A(k-1,3,n,l)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}A(k-t,1,n,l)-2^{l}A(k-1,3,n,l)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}2^{il}\sum_{t=0}^{k-i}(-1)^{t}A(k-t-i,1,n,l)$.

## 3 $B(k,m,n,c,l)=\sum_{\substack{m\leqslant a_j\leqslant n\\(a_j\neq c)}}(a_1\cdots a_k)^{l}$ 的求法

见式 ②,③,⑤,⑦.

## 4 多项式 $A(k,m,n,l)$，$B(k,m,n,c,l)$ 的整除性质

下面的整除均指多项式的整除.

**引理 2**[2] (1) $S(k,m,n)$ 是 $n$ 的 $k+1$ 次多项式，首项(最高次项)为 $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$；

(2) $n(n+1) \mid S(k,1,n)$，$n(n+1)(2n+1) \mid S(2k,1,n)$.

**定理 3** $A(k,m,n,l)$ 和 $B(k,m,n,c,l)$ 都是 $n$ 的 $k(l+1)$ 次多项式，首项为 $\frac{1}{k!(l+1)^k}n^{k(l+1)}$(其中 $k,m,c,l$ 是与 $n$ 无关的常数).

**证明** (1) 证明关于 $A(k,m,n,l)$ 的结论.

由式⑤得，$A(k,m,n,l)=\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}S(lt,m,n)\cdot A(k-t,m,n,l)$.

先证 $A(k,m,n,l)$ 的次数是 $l+1$，即 $k=1$ 时成立.

假设 $1,\cdots,k-1$ 时成立，得和式 $A(k,m,n,l)$ 的一般项 $\frac{1}{k}(-1)^{t-1}S(lt,m,n)A(k-t,m,n,l)$ 的次数是 $lt+1+(k-t)(l+1)=k(l+1)-t+1$(包括 $k=t$).

由 $1\leqslant t\leqslant k$，得 $A(k,m,n,l)$ 的首项($t=1$ 时)是 $\frac{1}{k}S(l,m,n)A(k-1,m,n,l)$ 的首项，次数是 $k(l+1)$，得 $k$ 时也成立.

再求首项系数.

可设 $A(k,m,n,l)$ 的首项是 $a_kn^{k(l+1)}$，得 $a_k=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{l+1}a_{k-1}$，所以 $a_k=\frac{1}{k!(l+1)^k}$.

(2) 证明关于 $B(k,m,n,c,l)$ 的结论.

由③得，$B(k,m,n,c,l)$ 的一般项 $(-1)^tc^{lt}A(k-t,m,n,l)$ 的次数是 $(k-t)(l+1)$，所以 $B(k,m,n,c,l)$ 的次数是 $k(l+1)$，首项是 $A(k,m,n,l)$ 的首项，为 $\frac{1}{k!(l+1)^k}n^{k(l+1)}$.

**定理 4** (1) $n(n+1) \mid A(k,1,n,l)$；

(2) 当 $l$ 为偶数时，$n(n+1)(2n+1) \mid A(k,1,n,l)$.

**证明** 由引理 2 及式⑥可得.

**推论** 多项式 $G_n^k$ 的首项是 $\frac{1}{k!2^k}n^{2k}$，$n(n+1) \mid G_n^k$.

例如，$G_n^1=\frac{1}{2}n(n+1)$；

$G_n^2 = \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$;

$G_n^3 = \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)$.

应当研究多项式 $G_n^k$ 的求法及性质.

## 5 数 $A(k,1,n,l)$ 的整除性质

以下整除均指数的整除.

**引理 3**[2] (1) 若 $n > 2k+1$, $n$ 是素数, 则 $n \mid S(2k,1,n)$;

(2) 若 $n > 2k$, $n+1$ 是素数, 则 $n+1 \mid S(2k,1,n)$;

(3) 若 $n > k$, $2n+1$ 是素数, 则 $2n+1 \mid S(2k,1,n)$.

**定理 5** 若 $l$ 是奇数, $n$ 是素数, 则 $n \mid A(n-1,1,n,l)+1$.

**证明** 由 ①, 得

$A(n-1,1,n,l)+1 = A(n-1,1,n-1,l) + n^l A(n-2,1,n-1,l) + 1 = ((n-1)!)^l + 1 + n^l A(n-2,1,n-1,l)$,

因为 $n \mid (n-1)!+1$(威尔逊素数定理), $(n-1)!+1 \mid ((n-1)!)^l + 1$, 所以 $n \mid A(n-1,1,n,l)+1$.

**定理 6** 若 $l,k,n$ 是奇数, $k = 1,3,\cdots,n-2$, 则 $n \mid A(k,1,n,l)$, $n \mid A(k,1,n-1,l)$.

**证明** 同文献[1]定理 3 的配对法可证.

还可用同样的配对法, 证得

**定理 7** 若 $l,k,m+n$ 是奇数, 则 $m+n \mid A(k,m,n,l)$.

**定理 8** 若 $l$ 是奇数, $n$ 是奇素数, $k$ 是偶数, $k = 2,4,\cdots,n-3$, $n > lk+1$, 则 $n \mid A(k,1,n,l)$, $n \mid A(k,1,n-1,l)$.

**证明** 由式 ①, 只证 $n \mid A(k,1,n-1,l)$.

同文献[1]定理 4 的配对法证明, 只需证

$2n_1+1 \mid \sum\limits_{1 \le a_j \le n_1} (a_1 \cdots a_{k_1})^{2l}$, 即 $2n_1+1 \mid A(k_1,1,n_1,2l)$, 其中 $2n_1+1 = n$, $2k_1 = k$.

由式 ⑥, 得 $k_1 A(k_1,1,n_1,2l) = \sum\limits_{t=1}^{k_1} (-1)^{t-1} S(2lt,1,n_1) A(k_1-t,1,n_1,2l)$.

因为 $n > lk+1$, 所以 $n_1 > lk_1$, 又 $k_1 \geqslant t$, 所以 $n_1 > lt$. 由引理 3(3), 得 $2n_1+1 \mid S(2lt,1,n_1)$, 所以 $2n_1+1 \mid k_1 A(k_1,1,n_1,2l)$.

因为 $k \leqslant n-3$, 所以 $k_1 < 2n_1+1$, 又 $2n_1+1$ 是素数, 所以 $2n_1+1 \mid A(k_1,$

$1,n_1,2l)$.

**定理9** (1) 若 $n > 2lk+1$, $n$ 是素数,则 $n \mid A(k,1,n,2l)$;

(2) 若 $n > 2lk$, $n+1$ 是素数,则 $n+1 \mid A(k_1,1,n,2l)$;

(3) 若 $n > lk$, $2n+1$ 是素数,则 $2n+1 \mid A(k,1,n,2l)$.

**证明** 由式⑥,得

$$kA(k,1,n,2l) = \sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}S(2lt,1,n)A(k-t,1,n,2l)$$

又由引理3,得

(1) 由 $n > 2lk+1$,得 $n > 2lt+1$, $n \mid S(2lt,1,n)$,所以 $n \mid kA(k,1,n,2l)$.

又由 $n > 2lk+1$,得 $k < n$,所以 $n \mid A(k,1,n,2l)$.

(2) 由 $n > 2lk$,得 $n > 2lt$, $n+1 \mid S(2lt,1,n)$,所以 $n+1 \mid kA(k,1,n,2l)$, $n+1 \mid A(k,1,n,2l)$.

(3) 由 $n > lk$,得 $n > lt$, $2n+1 \mid S(2lt,1,n)$,所以 $2n+1 \mid kA(k,1,n,2l)$, $2n+1 \mid A(k,1,n,2l)$.

## 参考文献

[1] 甘志国. $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$ 的展开式系数的性质[C] // 博海伦. 中国教育优秀论文集. 天津:天津社会科学院出版社,1998:392-396.

[2] 刘会成. 自然数方幂和的一个性质的证明[J]. 数学通讯,1994(2):20-22.

# 定义 $R(N)$ 的推广

文献[1]定义了 $R(n)$:把正整数 $n$ 的各位数字相加得 $n_1$,再把 $n_1$ 的各位数字相加得 $n_2,\cdots$,直至得到一位数 $n_k$ 为止,定义 $R(n)=n_k$.

本文又定义:当 $n$ 为正整数时,$R(-n)=-R(n)$; $R(0)=0$.

这样,对于任一整数 $z$,$R(z)$ 都有定义,且 $R(z)$ 是一位整数,$z$ 与 $R(z)$ 同号.显然,$z\equiv R(z)(\bmod 9)$.

**定理** 若 $a,b\in \mathbf{Z}^*$,$a\equiv b(\bmod 9)$,则

$$R(a)=\begin{cases}R(b) & (ab>0)\\ R(b)+9 & (a>0,b<0,R(a)\neq 9)\\ R(b)-9 & (a<0,b>0,R(a)\neq -9)\end{cases}$$

**推论** 设 $A_i\in \mathbf{Z}^*$,$R(A_i)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

(1)$R(A_1A_2\cdots A_n)=R(a_1a_2\cdots a_n)$;

(2)$R(A_1^k)=a_1^k$;

$$(3)R\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\begin{cases}R\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) & \left(\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)>0\right)\\ R\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+9 & \left(\sum_{i=1}^{n}A_i>0,\sum_{i=1}^{n}a_i<0,R\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\neq 9\right)\\ R\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)-9 & \left(\sum_{i=1}^{n}A_i<0,\sum_{i=1}^{n}a_i>0,R\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\neq -9\right)\end{cases}$$

**例** 是否存在正整数 $m,n,l$,使得 $4^m+5^n=31^l$?

**解** 当 $m,n,l\in \mathbf{N}^*$ 时,$R(4^m)\in\{4,1,7\}$,$R(5^n)\in\{7,8,4,2,1,5\}$,$R(31^l)=R(4^l)\in\{4,1,7\}$,

由此可以证明 $R(4^m)+R(5^n)\neq R(31^l)$,所以不存在正整数 $m,n,l$,使得 $4^m+5^n=31^l$.

## 参考文献

[1] 甘志国.$\{R(n^m)\}$ 的周期性[J].数学通讯,1994(2):24.

# 素数列的研究

全体素数按从小到大的顺序排成一列：

$$2,3,5,7,\cdots$$

此数列就叫做素数列，记为$\{p_n\}$.

**定理1** 若正整数 $p$ 无约数$p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$，且 $p$ 不为完全平方数，则 $p$ 是合数$\Leftrightarrow p\left|\left[\frac{p}{p_n}\right]!\right.$.

**证明** $\Rightarrow$得 $p$ 是合数，$p$ 最小的素因数$a\geqslant p_n$，设 $a=p_{n+i}(i\in\mathbf{N})$，$p=ab$.

得 $b$ 的任一个素因数$b'\geqslant p_{n+i}$，即 $b\geqslant b'$，$b\geqslant p_{n+i}$，但 $p$ 不为完全平方数，所以 $b>p_{n+i}$.

还有 $b>a$，$\left[\frac{p}{p_n}\right]=\left[\frac{p_{n+i}\cdot b}{p_n}\right]\geqslant b$，所以 $b!\left|\left[\frac{p}{p_n}\right]!\right.$.

因为 $p=ab$，$b>a$，所以 $ab\mid b!$，$p\mid b!$，$p\left|\left[\frac{p}{p_n}\right]!\right.$.

$\Leftarrow$假设 $p$ 是素数，可设$\left[\frac{p}{p_n}\right]=p-d(d\in\mathbf{N}^*)$，得 $p\mid(p-d)!$，这与 $p$ 是素数矛盾！所以 $p$ 是合数.

**定理2** 若正整数 $p$ 无约数$p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$，且 $p$ 不为完全平方数，则 $p$ 是素数$\Leftrightarrow p\nmid\left[\frac{p}{p_n}\right]!$.

**定理3** 若正整数 $p$ 无约数$p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$，且 $p$ 为$k(k\geqslant2)$个不同素因数的乘积，则 $p\left|\left[\frac{p}{p_np_{n+1}\cdots p_{n+k-2}}\right]!\right.$.

**证明** 设 $p=a_1a_2\cdots a_k(a_1<a_2<\cdots<a_k$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为素数$)$，有

$$a_1\geqslant p_n,a_2\geqslant p_{n+1},a_{k-1}\geqslant p_{n+k-2}$$

所以
$$\left[\frac{p}{p_np_{n+1}\cdots p_{n+k-2}}\right]=\left[\frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{p_np_{n+1}\cdots p_{n+k-2}}\cdot a_k\right]\geqslant a_k$$

$$a_k!\left|\left[\frac{p}{p_np_{n+1}\cdots p_{n+k-2}}\right]!\right..$$

又 $a_1a_2\cdots a_k\mid a_k!$，所以 $p\left|\left[\frac{p}{p_np_{n+1}\cdots p_{n+k-2}}\right]!\right.$.

# 威尔逊素数定理的简化及素数的一条性质

## 1 威尔逊素数定理的简化

1733年拉格朗日证明了英国数学家威尔逊提出的一条关于素数的猜想(现在就称作威尔逊素数定理):大于1的整数 $p$ 为素数的充要条件是 $(p-1)!+1\equiv 0(\bmod p)$.本文将把此定理简化成

**定理1** (1) $4n+1(n\in \mathbf{N}^*)$ 为素数的充要条件是 $[(2n)!]^2+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$;

(2) $4n-1(n\in \mathbf{N}^*)$ 为素数的充要条件是 $(2n-1)!+1\equiv 0$ 或 $(2n-1)!-1\equiv 0(\bmod 4n-1)$.

**证明** (1) 由 $4n\equiv -1,4n-1\equiv -2,4n-2\equiv -3,\cdots,2n+1\equiv -2n(\bmod 4n+1)$,得

$$4n(4n-1)(4n-2)\cdots(2n+1)\equiv(-1)(-2)(-3)\cdots(-2n)=(2n)!(\bmod 4n+1)$$

$$(4n)!\equiv[(2n)!]^2(\bmod 4n+1)$$

再由威尔逊素数定理,立得结论(1)成立.

(2) 同(1)的证明,可得 $(4n-2)!\equiv -[(2n-1)!]^2(\bmod 4n-1)$.

再由威尔逊素数定理,得 $[(2n-1)!]^2-1\equiv 0(\bmod 4n-1)$,即结论(2)成立.

## 2 素数的一条性质

**定理2** (1) 当 $p$ 为 $8k\pm 1(k\in \mathbf{N}^*)$ 形素数时,$p\mid 2^{\frac{p-1}{2}}-1$;

(2) 当 $p$ 为 $8k\pm 3(k\in \mathbf{N})$ 形素数时,$p\mid 2^{\frac{p-1}{2}}+1$.

**证明** 若 $4n+1(n\in \mathbf{N}^*)$ 为素数,则

$$(4n)!+1\equiv 0,[(2n)!]^2+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

所以

$$(4n)!-[(2n)!]^2\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

$$2^{2n}(2n)!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot\cdots\cdot(4n-3)\cdot(4n-1)-[(2n)!]^2\equiv 0$$

$$(4n-1)\cdot(4n-3)\cdot\cdots\cdot(2n+1)\equiv(-2)\cdot(-4)\cdot\cdots\cdot$$

$$(-2n) = (-1)^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)$$

$$2^{2n} \cdot (-1)^n \cdot [(2n)!]^2 - [(2n)!]^2 \equiv 0$$

$$2^{2n} \cdot (-1)^n - 1 \equiv 0 (\bmod 4n+1)$$

当 $n = 2k$ 时，$8k+1 \mid 2^{4k} - 1$；当 $n = 2k-1$ 时，$8k-3 \mid 2^{4k-2} + 1$.

同理还可得 $8k-1 \mid 2^{4k-1} - 1$；$8k+3 \mid 2^{4k+1} + 1$（$8k-1$，$8k+3$ 均为素数）.

即定理 2 成立.

## 3 关于素数的一条猜想

由定理 2 立得费马(Fermat,1601—1665,法国著名数学家)小定理：若 $p$ 是素数，则 $p \mid 2^{p-1} - 1$.

但定理 2 的逆命题不成立，反例：$1\,729 \mid 2^{864} - 1$，但 $1\,729 = 7 \times 13 \times 19$.

**猜想** (1) 当 $p$ 为 $12k \pm 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 形素数时，$p \mid 3^{\frac{p-1}{2}} - 1$；

(2) 当 $p$ 为 $12k \pm 5 (k \in \mathbf{N})$ 形素数时，$p \mid 3^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

# 相似数的整除

首先约定,本文中的字母均表示自然数.

**定义** 称自然数 $u\cdot 10^m+v(m\in\mathbf{N}^*,v<10^m)$ 与 $u\cdot 10^n+v(m,n\in\mathbf{N}^*,v<10^m$ 且 $v<10^n)$ 互为相似,记作 $u\cdot 10^m+v\backsim u\cdot 10^n+v$.如 $35\backsim 305$.

两个数互为相似时,有如下性质:

(1)$a\backsim a$;

(2)若 $a\backsim b$,则 $b\backsim a$;

(但数的相似不具有传递性,如 $1\,023\backsim 123$, $123\backsim 1\,203$,但 1 023 与 1 203 不相似.)

(3)若 $a\backsim b$,则 $a$ 与 $b$ 的各位数字之和相等.

本文研究:何时 $u\cdot 10^m+v\mid u\cdot 10^n+v$?

不妨设 $n>m\geqslant 1,u,v\in\mathbf{N}^*$,又限定 $(u\cdot 10^m+v,10)=(v,10)=1$(因为 $(v,10)\neq 1$ 时可转化成这一情形).

$u\cdot 10^m+v\mid u\cdot 10^n+v\Leftrightarrow u\cdot 10^m+v\mid(u\cdot 10^n+v)-(u\cdot 10^m+v)\Leftrightarrow u\cdot 10^m+v\mid u\cdot 10^m(10^{n-m}-1)\Leftrightarrow u\cdot 10^m+v\mid 10^{n-m}-1$

由此,得

**定理 1** 若 $n>m\geqslant 1,u,v\in\mathbf{N}^*$, $(v,10)=1$, 则 $u\cdot 10^m+v\mid u\cdot 10^n+v\Leftrightarrow u\cdot 10^m+v\mid 10^{n-m}-1$.

由定理 1,还可证得

**定理 2** 若 $n>m\geqslant 1,u,v\in\mathbf{N}^*$, $(v,10)=1$, 且 $u\cdot 10^m+v\mid u\cdot 10^n+v$,则 $k\in\mathbf{N}^*$ 时,$u\cdot 10^m+v\mid u\cdot 10^{(n-m)k}+v$.

**定理 3** 若$(n,10)=1$,则存在正整数 $k$,使 $n\mid\underbrace{11\cdots 1}_{k\text{个}1}$.

# 关于“$p \mid x^3+y^3$”的一个定理

**定理 1** 若 $p$ 是2,3或 $6n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 形素数,且 $p\mid x^3+y^3$,则 $p\mid x+y$.

**证明** 我们只需证明:

若 $p$ 是 $6n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 形素数,且 $p\mid x^2-xy+y^2$,则 $p\mid x,p\mid y$.

设 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 是一列所有从小到大的 $6n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 形素数,即5,11,17,23,29,41,…,我们用数学归纳法证明:

若 $p_n\mid x^2-xy+y^2$,则 $p_n\mid x,p_n\mid y$.

(1) 当 $n=1$ 时,易证成立.

(2) 假设 $n<k$ 时成立.

当 $n=k$ 时,设 $x=p_ka+r_1,y=p_kb+r_2,r_1,r_2\in\left(-\frac{p_k}{2},\frac{p_k}{2}\right)$.假设 $r_1$,$r_2$ 中有一个不为0,得它们均不为0,且 $p_k\mid r_1^2r_2^2-r_1r_2,r_1^2+r_2^2-r_1r_2<r_1^2+r_2^2<p_k\cdot\frac{p_k}{2}$.设 $(r_1,r_2)=r_0,r_1=r_0u,r_2=r_0v,(u,v)=1;r_1,r_2\in(r_0,p_k)$.

由 $p_k$ 是素数,得 $(r_0,p_k)=1,p_k\mid r_0^2(u^2+v^2-uv),p_k\mid u^2+v^2-uv$.

下面证明 $u^2+v^2-uv$ 除有约数 $p_k$ 外,还有比 $p_k$ 小的 $6n-1$ 形素因数(注意 $(u,v)=1$).

$u^2+v^2-uv$ 可能为 $6l\pm1,6m\pm2,6q+3$ 形数.

① $u^2+v^2-uv$ 不会是 $6l-1$ 形数,否则 $6\mid u^2+v^2-uv+1$.

设 $u=6a+s_1,v=6b+s_2,s_1,s_2\in\{0,\pm1,\pm2,3\}$,得 $6\mid s_1^2+s_2^2-s_1s_2+1$,可证明这是不可能的!

② 证明 $u^2+v^2-uv$ 不会是 $6m\pm2$ 形数.

③ 若 $u^2+v^2-uv=6q+3=3(2q+1)$,得 $p_k\mid 2q+1$,$6n-1$ 形素数 $p_k$ 是 $2k+1$ 形素因数.

假设 $u^2+v^2-uv$ 没有除 $p_k$ 外的 $6n-1$ 形素因数,得

$$u^2+v^2-uv=3^\alpha(6n_k-1)(6w_1+1)\cdots(6w_i+1)=$$
$$3^\alpha(6w-1)=(u+v)^2-3uv(\alpha\in\mathbf{N}^*)$$

当 $\alpha=1$ 时,得 $3\mid u+v$.设 $u=3a+1,v=3b-1$,得

$$3(a+b)^2-9ab-3a+3b+1=6w-1$$

得$3\mid 2$,还不可能!

所以$\alpha\geqslant 2$,得$3\mid u+v$,$3\mid uv$,所以$3\mid u$,$3\mid v$,与$(u,v)=1$矛盾!,所以$u^2+v^2-uv$有除$p_k$外的$6n-1$形素因数$p$,且$p<p_k$(因为$u^2+v^2-uv<r_1^2+r_2^2-r_1r_2<p_k\cdot\frac{p_k}{2}$).

④若$u^2+v^2-uv=6l+1$,同理可证$u^2+v^2-uv$,还有比$p_k$小的$6n-1$形素因数$p$.

综上所述,得

$u^2+v^2-uv$还有比$p_k$小的$6n-1$形素因数,设为$p_l(l<k)$,由题设,得$p_l\mid u$,$p_l\mid v$,与$(u,v)=1$矛盾!所以前面的$r_1,r_2$中有一个为0,得它们均为0,即$p_k\mid x$,$p_k\mid y$,得$n=k$时结论也成立.所以定理成立.

**猜想1** 若$p$是$6n+1(n\in\mathbf{N}^*)$形素数,则存在$r,s\in\mathbf{N}^*$,$(r,s)=1$,使得$p\mid r^2+rs+s^2$.

**定理2** 若$p$是$6n+1(n\in\mathbf{N}^*)$形素数,$p\mid r^2+rs+s^2$,$p\mid x^2+xy+y^2(r,s,x,y\in\mathbf{N}^*)$,则$p\mid rx-sy$或$p\mid sx-ry$.(读者易证)

**猜想2** 若$p$是素数且不是$10n+1(n\in\mathbf{N}^*)$形,且$p\mid x^5+y^5(x,y\in\mathbf{N}^*)$,则$p\mid x+y$.

**猜想3** 若$p$是素数且不是$2nk+1(n,k\in\mathbf{N}^*,k$已知$)$形,且$p\mid x^k+y^k(x,y\in\mathbf{N}^*)$,则$p\mid x+y$.

# 已知一边的勾股数的求法及组数

若三个正整数 $a,b,c$ 满足 $a^2+b^2=c^2$,则称 $\langle a,b,c\rangle$ 是一组勾股数,满足 $(a,b,c)=1$ 的勾股数 $\langle a,b,c\rangle$ 叫做互素勾股数.要注意,$\langle a,b,c\rangle$ 与 $\langle b,a,c\rangle$ 是同一组勾股数.文献[1] ~ [3]给出了关于已知一边的勾股数的求法及组数的一些结论,但不够简洁,本文再给出这方面的一些结论.

**定理 1**[4] (1) 当 $2\nmid a$ 且 $a>1$ 时:

存在以 $a$ 为一条直角边的勾股数,全部勾股数为 $\langle a,\frac{1}{2}(m-n),\frac{1}{2}(m+n)\rangle$,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,$mn=a^2$,$n<a$,此时勾股数的组数为 $\sigma_0(a^2)$;

也存在以 $a$ 为一条直角边的互素勾股数,全部互素勾股数为 $\langle a,\frac{1}{2}(m-n),\frac{1}{2}(m+n)\rangle$,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,$mn=a^2$,$n<a$,$(m,n)=1$,此时互素勾股数的组数是 $2^{k-1}$($k$ 表示 $a$ 的全部素因数的个数).

(2) 当 $2\mid a$ 且 $a>2$ 时,存在以 $a$ 为一条直角边的勾股数,全部勾股数为 $\langle a,m+n,m-n\rangle$,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,$mn=\frac{1}{4}a^2$,$n<\frac{1}{2}a$,此时勾股数的组数是 $\sigma_0(\frac{1}{4}a^2)$;

当 $4\mid a(a\in\mathbf{N}^*)$ 时,存在以 $a$ 为一条直角边的互素勾股数,全部互素勾股数为 $\langle a,m+n,m-n\rangle$,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,$mn=\frac{1}{4}a^2$,$n<\frac{1}{2}a$,$(m,n)=1$,此时互素勾股数的组数是 $2^{k-1}$($k$ 表示 $a$ 的全部素因数的个数).

(3) 当且仅当 $a=1,2$ 时,不存在以 $a$ 为一条直角边的勾股数;

当且仅当 $a=1$,或($2\mid a$ 但 $4\nmid a$)时,不存在以 $a$ 为一条直角边的互素勾股数.

(其中 $\sigma_0(r)$ 表示正整数 $r$ 的全部小于 $\sqrt{r}$ 的正约数的个数,设 $r=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$,$i=1,2,\cdots,k$),则 $\sigma_0(r)=\left[\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)\right]$,这里 $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分.)

**定理 2**[5] (1) 勾股数均可表示为 $\langle 2tmn,t(m^2-n^2),t(m^2+n^2)\rangle$,其中 $t$,

$m,n\in \mathbf{N}^*,m>n,2\nmid m+n,(m,n)=1$;

(2) 互素勾股数均可表示为$\langle 2mn,m^2-n^2,m^2+n^2\rangle$,其中 $m,n\in \mathbf{N}^*$, $m>n,2\nmid m+n,(m,n)=1$.

由定理 2 可以用试验的方法求出已知斜边的全部勾股数及互素勾股数.关于已知斜边的勾股数的组数,有以下完整的结论:

**定理 3**[6] 斜边 $c=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{l}q_j^{\beta_j}$($\alpha,\alpha_i,\beta_j\in \mathbf{N},k,l\in \mathbf{N}^*$,$p_i$ 是互不相同的 $4n+1$ 形素数,$q_j$ 是互不相同的 $4n-1$ 形素数)的勾股数的组数是 $\frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)-1\right]$.

已知斜边的互素勾股数的组数,笔者尚未见到文献给出.

## 参考文献

[1] 张文忠.一直角边为定值的勾股形的个数[J].数学通讯,1996(7):25-27.
[2] 李建章.勾股数组知多少?[J].数学通讯,1996(11):34.
[3] 纪锋.已知弦数的勾股数组的求法[J].中学数学月刊,1997(10):38-39.
[4] 甘志国.自然数的(互素)平方差分拆[J].中学数学月刊,1997(11):15-16.
[5] 杜德利 U.基础数论[M].周仲良,译.上海:上海科学技术出版社,1980.
[6] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.

# whc 165 及回归数问题的解决情况

**定义 1** 记 $G_k=\{a\mid a$ 是十进制正整数，$a>1$，$a$ 的各位数字 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 次幂之和等于 $a\}$，$g_k=|G_k|$（即集合 $G_k$ 的元素个数）.

易证 $G_1=\{2,3,\cdots,9\}$，$g_1=8$.

文献[1]介绍的猜想 whc165，即

**whc165** 当 $k\geqslant 3$ 时，$G_k\neq\varnothing$.

**定理 1**[2] 若 $k>1$，$a\in G_k$，$a$ 是 $n$ 位正整数，则 $1+[k\lg 2]\leqslant n\leqslant 1+[k\lg 9+\lg(k-1)]$.（这里 $[x]$ 表示不大于 $x$ 的最大整数，下同）

**推论 1** 若 $k>1$，$a\in G_k$，$a$ 是 $n$ 位正整数，则

(1) $k\lg 2<n<k\lg 9+\lg(k-1)+1$;

(2) $\dfrac{n-\lg n-1}{\lg 9}<k<\dfrac{n}{\lg 2}$.

**证明** (1) 由定理 1，只需证

$$[k\lg 9+\lg(k-1)]<k\lg 9+\lg(k-1)$$

即

$$[\lg(9^k\cdot(k-1))]<\lg(9^k\cdot(k-1))$$

这是因为 $9^k\cdot(k-1)\neq 10^m(m\in\mathbf{Z})$.

(2) 由(1)只需证 $\dfrac{n-\lg n-1}{\lg 9}<k$.

设 $a=\overline{a_n\cdots a_2a_1}$，可得

$$10^{n-1}\leqslant a=a_n^k+\cdots+a_2^k+a_1^k\leqslant 9^kn$$

所以 $10^{n-1}<9^kn$，两边取常用对数，可得要证结论成立.

**定理 2** 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\{0,1,\cdots,9\}$，$a_n\neq 0$，$k\in\mathbf{N}^*$，$x=\overline{a_n\cdots a_2a_1}=a_n\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 10+a_1$，$x\in G_k$，则

(1) 当 $k>1$ 时，$k\lg 2<n<k\lg 9+\lg(k-1)+1$.

(2) $\dfrac{n-\lg n-1}{\lg 9}<k<\dfrac{n}{\lg 2}$.

**证明** (1) 先证 $n>k\lg 2$，即证

$$10^n>2^k \quad ①$$

可证 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不能均为 0 或 1 ②

假设式②不成立，可得

$$n \geqslant a_n^k + \cdots + a_1^k = x = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 \geqslant 10^{n-1} \quad ③$$

因为 $n \geqslant 2$ 时,$n < 10^{n-1}$,所以由式③得 $n = 1$.又由③得 $x = 1$,这与定义中 $x > 1$ 矛盾!所以式②成立.

由式②得 $10^n > x = a_n^k + \cdots + a_1^k \geqslant 2^k$,即式①成立.

再证 $n < k\lg 9 + \lg(k-1) + 1$.

只需证明 $n \geqslant k\lg 9 + \lg(k-1) + 1$,即 $10^{n-1} \geqslant 9^k(k-1)$,也即

$$10^{n-1} > 9^k(k-1)$$

$$10^{n-1} - 1 \geqslant 9^k(k-1) \quad ④$$

成立时,有

$$a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 > a_n^k + \cdots + a_1^k \quad ⑤$$

先证 $n < k$ 时,式⑤成立.

由 $n < k$,得 $k - 1 \geqslant n$,所以 $a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 \geqslant a_n \cdot 10^{n-1} > a_n \cdot 9^k(k-1)$(用式④)$\geqslant 9^k n \geqslant a_n^k + \cdots + a_1^k$,即 $n < k$ 时式⑤成立.

再证 $n \geqslant k$ 时式⑤成立.

当 $2 \leqslant a_n \leqslant 9$ 时,$(a_n - 1)(k-1) \cdot 9^k \geqslant 9^k \geqslant a_n^k$,所以 $a_n(k-1) \cdot 9^k - a_n^k \geqslant (k-1) \cdot 9^k$,又由式④可得

$$a_n \cdot 10^{n-1} - a_n^k \geqslant (k-1) \cdot 9^k \quad ⑥$$

又由式④可得,当 $1 \leqslant a_n \leqslant 9$ 时,式⑥均成立,即 $a_n(10^{n-1} - a_n^{k-1}) \geqslant 9^k(k-1)$,又 $9^k(k-1) > a_{k-1}^k + \cdots + a_1^k - (a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1)$,所以

$$a_n(10^{n-1} - a_n^{k-1}) + a_{n-1}(10^{n-2} - a_{n-1}^{k-2}) + \cdots + a_k(10^{k-1} - a_k^{k-1}) >$$
$$a_{k-1}^k + \cdots + a_1^k - (a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1)$$

由此式可得要证的式⑤成立.

(2) 由(1)只需证 $\dfrac{n - \lg n - 1}{\lg 9} < k$.

可得 $10^{n-1} \leqslant x = a_n^k + \cdots + a_1^k \leqslant 9^k n$,所以 $10^{n-1} \leqslant 9^k n$,$10^{n-1} < 9^k n$,从而可得要证结论成立.

**推论 2** 若 $x = \overline{a_n \cdots a_1}$,$x \in G_k$,则

(1) 当 $k > 1$ 时,$[k\lg 2] + 1 \leqslant n \leqslant [k\lg 9 + \lg(k-1)] + 1$.

(2) $\left[\dfrac{n - \lg n - 1}{\lg 9}\right] + 1 \leqslant k \leqslant \left[\dfrac{n}{\lg 2}\right]$.

**推论 3** $G_2 = \varnothing$.

文献[2]用计算机求出了 $k \leqslant 10$ 的所有 $G_k$ 及 $G_{11}$ 的部分元素:

$G_3 = \{153, 370, 371, 407\}$,

$G_4 = \{1\ 634, 8\ 208, 9\ 474\}$,

$G_5$ = {4 150,4 151,54 748,92 727,93 084,194 979},

$G_6$ = {548 834},

$G_7$ = {1 741 725,4 210 818,9 800 817,9 926 315,14 459 929},

$G_8$ = {24 678 050,24 678 051,88 593 477},

$G_9$ = {146 511 208,472 335 975,534 494 836,912 985 153},

$G_{10}$ = {4 679 307 774},

$G_{11}$ = {32 164 049 650,32 164 049 651,40 028 394 225,42 678 290 603, 44 708 635 679,49 388 550 606,82 693 916 578,94 204 591 914} ∪ {$a$ | $a$是12位正整数,$a$ 的各位数字的 11 次幂的和等于 $a$}.

**定义2** 记 $F_n$ = {$a$ | $a$是$n$位正整数,$a$的各位数字的$n$次幂的和等于$a$},把 $F_n$ 中的元素叫做$n$位$n$次幂回归数,本文简称为回归数.

显然 $F_1 = \{1,2,\cdots,9\}$,当 $n \geqslant 2$ 时,$F_n \subseteq G_n$.文献[3]已得,$F_2 = \varnothing$,但文献[3]把 $F_8$ 漏掉了 88 593 477,还可得 $F_9 = G_9$,$F_{10} = G_{10}$,$F_{11}$ = {$G_{11}$ 中列出的八个 11 位数},所以 $n \leqslant 11$ 的 $F_n$ 已全部求出.文献[3]已证得:当 $n > 60$ 时,$F_n = \varnothing$.所以还应求出 $n = 12 \sim 60$ 的 $F_n$.

## 参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.
[2] 杨作立.自然数等于它的各位同次幂之和的解[J].汕头大学学报(自然科学版),1992(1):47-50.
[3] 贺贤孝.数学中的未解之谜[M].长沙:湖南教育出版社,1998.

# 半缩小(半扩大)变换的黑洞

文献[1]叙述了数学黑洞的有关概念,定义1[1]给出了(半)缩小变换,(半)扩大变换的概念,定理4[1],6[1]分别是缩小变换与扩大变换的黑洞的重要定理,本文再给出半缩小变换与半扩大变换的黑洞的结论(本文所用到的有关定义及记号请读者参看文献[1]).

**定理1** 集合$M,M_0$同定义1[1],$F$是$M$的半缩小变换,$F(x)=x$在$x\in M$内的解集是$M_1$,则

(1) $\forall x\in M_1$,由$x$可生成$F$的一个黑洞,此黑洞的周长为1,$h(x)=0$;

(2) $\forall x\in M$,由$x$可生成$F$的一个黑洞;

(3) $FM=\{F$的由$M_0$的元素生成的黑洞$\}\cup M_1$.

**证明** (1)显然成立.

(2)设$M'=\complement_M M_1,M'_0=\complement_{M_0}M_1$,有$M'_0\subseteq M'$.

由定义1[1]可得$F$是$M'$的缩小变换(因为$F$是$M'$的变换,$\forall x\in\complement_{M'}M'_0$,有$F(x)<x$).

又由定理4(1)[1]得,$\forall x\in M'$,由$x$可生成$F$的一个黑洞,而$x\in M_1$时,由$x$也可生成$F$的一个黑洞(即结论(1)),所以(2)成立.

(3)可得$FM'=\{F$的由$M'_0$的元素生成的黑洞$\}$,$FM_1=M_1$.

所以$FM=\{F$的由$M'_0$的元素生成的黑洞$\}\cup M_1=\{F$的由$M_0$的元素生成的黑洞$\}\cup M_1$.

**定理2** 集合$M,M_0$同定义1[1],$F$是$M$的半扩大变换,$F(x)=x$在$x\in M$内的解集是$M_1$,则

(1) $\forall x\in\complement_M^{(M_0\cup M_1)}$,由$x$均不能生成$F$的黑洞;

(2) $FM=\{F$的由$M_0$的元素生成的黑洞$\}\cup M_1$.

**证明** (1)设$M'=\complement_M M_1,M'_0=\complement_{M_0}M_1$,有$M'_0\subseteq M'$.

由定义1[1]可得,$F$是$M'$的扩大变换(因为$F$是$M'$的变换,$\forall x\in M'$且$x\notin M'_0$,即$x\in\complement_M(M_0\cup M_1)$,有$F(x)>x$).

又由定理6(1)[1],得

$\forall x\in\complement_M^{(M_0\cup M_1)}$,由$x$均不能生成$F$的黑洞.

(2)显然$M_1$的元素都是$F$的黑洞,$FM=\{F$的由$(\complement_M(M_0\cup M_1))\cup(M_0$

$\cup M_1$)的元素生成的黑洞} = {F 的由$\complement_M(M_0 \cup M_1)$的元素生成的黑洞} ∪ {F 的由 $M_0$ 的元素生成的黑洞} ∪ {F 的由 $M_1$ 的元素生成的黑洞}.

所以 $FM$ = {F 的由 $M_0$ 的元素生成的黑洞} $\cup M_1$.

下面举例说明半缩小变换黑洞的运用.

**定义** 设 $m$ 的标准分解式为 $\prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$, $i = 1,2,\cdots,t$),定义 $p(m) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i p_i$. 可以证明 $m \geqslant 5$时,$p(m) \geqslant 5$. 所以 $p$ 是 $M$ = {不小于 5 的正整数} 的一个变换. 还设 $p^0(m) = m, p^k(m) = p(p^{k-1}(m))(k \in \mathbf{N}^*)$.

**定理 3** $\forall m \in M$($M$ = {不小于 5 的正整数}),由 $m$ 至多经过 $k$($k > \log_2^{(n-4)} - 1$,$k$ 是满足此的最小自然数)步 $p$ 变换可生成关于$M$的$p$ 变换的一个黑洞 $q$,且 $q$ 是素数,$5 \leqslant q \leqslant m$.

为证明定理 3,先给出以下引理.

**引理 1** 若 $m = \prod_{i=1}^{k} a_i > 4, a_i \geqslant 2(i = 1,2,\cdots,k), k \geqslant 2$,则 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 2 + \frac{m}{2}$.

**证明** 当 $a \geqslant 2, b \geqslant 2$时,$(a-2)(b-2) \geqslant 0$,所以 $a + b \leqslant 2 + \frac{1}{2}ab$(当且仅当 $a = b = 2$ 时取等号) ①

由 ① 知 $k = 2$ 时引理 1 成立.

当 $k \geqslant 3$时,$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \leqslant a_1 + \prod_{i=1}^{k} a_i \leqslant 2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} a_i$(最后一步由 ① 得).

最后一步若取等号,则 $a_1 = \prod_{i=2}^{k} a_i = 2$,这与 $a_i \geqslant 2$ 且 $k \geqslant 3$ 矛盾!所以 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} a_i = 2 + \frac{m}{2}$. 即 $k \geqslant 3$ 时,引理 1 也成立.

**引理 2** 若 $m$ 是合数且 $m \geqslant 5$,则 $p(m) < 2 + \frac{m}{2}$.

**证明** 设 $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$(标准分解式),由引理 1,得 $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i p_i < 2 + \frac{m}{2}$,即 $p(m) < 2 + \frac{m}{2}$.

**引理 3** 若 $m$ 是素数且 $m \geqslant 5, k \in \mathbf{N}$,则 $p^k(m) = m$.

**引理 4** 若 $m \in \mathbf{N}^*, m \geqslant 5, k \in \mathbf{N}$,则 $5 \leqslant p^k(m) \leqslant m$.

**证明** 当 $k=0$ 时成立.

由引理 2,3 可知当 $k=1$ 时成立.

由 $k=1$ 时成立知 $k\in\mathbf{N}^*$ 时成立.

**引理 5** 若 $m,k\in\mathbf{N}^*,m\geqslant 5,p^{k-1}(m)$ 为合数,则 $p^k(m)\leqslant 4+\dfrac{m-4}{2^k}$.

**证明** 对 $k$ 用数学归纳法来证.

由引理 2 知 $k=1$ 时成立.

假设 $k$ 时成立,下证 $k+1$ 时成立.

当 $p^k(m)$ 为合数时,由引理 2,得

$$p^{k+1}(m)=p(p^k(m))\leqslant 2+\frac{1}{2}p^k(m)\leqslant 2+\frac{1}{2}\left(4+\frac{m-4}{2^k}\right)=4+\frac{m-4}{2^{k+1}}$$

即 $k+1$ 时成立,所以引理 5 成立.

**定理 3 的证明** 当 $p^i(m)(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 中有素数时,不妨就设 $p^i(m)$ 是素数,由引理 3,得 $p^k(m)=p^{k-i}(p^i(m))=p^i(m)$,此时由 $m$ 经过 $i(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 步 $p$ 变换可生成黑洞 $p^i(m)$,$p^i(m)$ 是素数,由引理 4 知,$5\leqslant p^i(m)\leqslant m$.

当 $p^i(m)(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 全是合数时,由引理 5,得 $p^k(m)\leqslant 4+\dfrac{m-4}{2^k}$.

由 $k>\log_2^{(m-4)}-1$,得 $m-4<2^{k+1}$,$p^k(m)<6$.又由引理 4,得 $p^k(m)\geqslant 5$,所以 $p^k(m)=5$.此时由 $m$ 经过 $k$ 步 $p$ 变换可生成黑洞 5.

总之,定理 3 成立.

对于变换 $p$,若补充定义 $p(0)=p(1)=0$,得 $p$ 是关于 $D=\{0,1,\cdots,n\}$ 的一个变换,可将定理 3 改为下述结论:

$\forall m\in D$,由 $m$ 至多经过 $k(k>\log_2^{(n-4)}-1$,$k$ 是满足此的最小自然数,且 $n\geqslant 5)$ 步 $p$ 变换可生成关于 $D$ 的 $p$ 变换的一个黑洞 $q$,且 $q\in\{0,4\}\cup\{$不大于 $n$ 的素数$\}$.

当 $n=200$ 时,得 $p^7(m)\in\{0,4\}\cup\{$200 以内的素数$\}$,此结论比文献[2]的结论"$p^{100}(m)\in\{0,4\}\cup\{$200 以内的素数$\}$"要强得多.笔者经过直接验证还得到:此时,$p^6(m)\in\{0,4\}\cup\{$200 以内的素数$\}$.

以上结论给出了文献[2]未提出的问题:

$\forall m\in D$,整数 $k$ 至少是多少时,$p^k(m)\in\{0,4\}\cup\{n$ 以内的素数$\}$

的一个初步解答(还没有解决"至少").

由引理 2,还可得

**定理 4** $p(m)$ 是 $M=\{$不小于 5 的正整数$\}$ 的半缩小变换:$\forall m\in M$,有 $p(m)\leqslant m$,$p(m)=m$ 在 $m\in M$ 内的解集是 $\{M$ 中的素数$\}$.

文献[1]有几处印刷错误,这里给予更正:文献[1]定理 7 及其证明中的两

处“$10^{m_0-m_0}$”均应改为“$10^{m_0}-m_0$”；定理18后面的$T_4A$中最后一个“→”应改为“，”；定义6中的“$2^\alpha \mid x+g$”应改为“$2^\alpha \parallel x+g$”（指$2^\alpha \mid x+g$且$2^{\alpha+1} \nmid x+g$）.

## 参考文献


[1] 甘志国.缩小变换黑洞[J].高等函数学报(自然科学版),1997(4):56-59.

[2] 徐学文.有限集上的复合函数[J].数学通讯,1995(12):33-35.

# 关于居加猜想的一个结论

1950年,居加(G.Giuga)猜想:$m$ 为素数的充要条件是 $m \mid \sum_{i=1}^{m-1} i^{m-1}+1$.

关于此猜想(至今尚未证明),文献[1]得到:若 $m \mid \sum_{i=1}^{m-1} i^{m-1}+1$,则 $m$ 为素数,或 $m=p_1p_2\cdots p_s$($p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是相异的奇素数,$s\geqslant 3$),且 $p_i(p_i-1)\left|\dfrac{m}{p_i}-1\right.(i=1,2,\cdots,s)$.

因为文献[1]中说 $p_i^2\left|\dfrac{m-1}{p_i-1}-1\right.$,所以 $p_i^2(p_i-1)\mid m-p_i$,即 $p_i(p_i-1)\left|\dfrac{m}{p_i}-1\right.(i=1,2,\cdots,s)$.由此可得 $m$ 是绝对伪素数.

本文将证明上述结论中的 $s\geqslant 4$,即 $s\neq 3$.

**证明** 假设 $s=3$,得 $m=p_1p_2p_3$($p_1,p_2,p_3$ 是互不相同的奇素数,不妨设 $p_1<p_2<p_3$,得 $p_2<p_3-1$).

则由上述结论,可得 $p_3(p_3-1)\mid p_1p_2-1$,所以

$p_1p_2-1\geqslant p_3(p_3-1),p_2^2>p_1p_2>p_3(p_3-1)>(p_3-1)^2,p_2>p_3-1$

这与 $p_2<p_3-1$ 矛盾!得要证结论成立.

## 参考文献

[1] 杨仕椿.绝对伪素数与居加猜想[J].数学通讯,1993(4):17-18.

# 对两道习题的研究

文献[1]第66页有两道习题：

78.求证：$3^n \mid 2^{3^n}+1(n\in \mathbf{N})$.

81.设 $a_n=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$，求证：$(a_m,a_n)=1\Leftrightarrow(m,n)=1$.

笔者发现以上结论均可加强并推广.

约定：下文中的字母均表示整数.

**定理1** 若 $p$ 是奇素数，$n\in\mathbf{N}$，则 $p^{n+1}\parallel(p-1)^{p^n}+1$.

（对 $n$ 用数学归纳法及二项式定理可证）

**定理2** 若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，$p\geqslant 2$，则

$$\left(\frac{q}{p-1}(p^m-1),\frac{q}{p-1}(p^n-1)\right)=\frac{q}{p-1}(p^{(m,n)}-1)$$

**证明** 先证 $(p^m-1,p^n-1)=p^{(m,n)}-1$.

显然 $p^{(m,n)}-1\mid(p^m-1,p^n-1)$，再证 $(p^m-1,p^n-1)\mid p^{(m,n)}-1$.

存在 $x,y\in\mathbf{N}^*$，使 $mx=ny+(m,n)$.

所以 $(p^m-1,p^n-1)\mid(p^{mx}-1,p^{ny}-1)$，又 $(p^{mx}-1,p^{ny}-1)=(p^{ny}\cdot p^{(m,n)}-1,p^{ny}-1)=(p^{(m,n)}-1,p^{ny}-1)=p^{(m,n)}-1$，得 $(p^m-1,p^n-1)\mid p^{(m,n)}-1$.

所以 $(p^m-1,p^n-1)=p^{(m,n)}-1$.

还可证：$(ka,kb)=k(a,b)$，$\frac{1}{k}(ka,kb)=(a,b)$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，$a,b$ 不同时为0，可得

$$\left(\frac{q}{p-1}(p^m-1),\frac{q}{p-1}(p^n-1)\right)=q\left(\frac{p^m-1}{p-1},\frac{p^n-1}{p-1}\right)=$$

$$\frac{q}{p-1}(p^m-1,p^n-1)=\frac{q}{p-1}(p^{(m,n)}-1)$$

即定理2成立.

在定理2中，当 $p=10,q=1$ 时，即为第81题的加强结论：

$$(\underbrace{11\cdots1}_{m个1},\underbrace{11\cdots1}_{n个1})=\underbrace{11\cdots1}_{(m,n)个1}$$

# 参考文献

[1] 余元希,田万海,毛宏德.初等代数研究(上册)[M].北京:高等教育出版社,1988.

# 2 关于 1 093,3 511 的基本重数均为 2

文献[1]给出以下定义和结论(本文中的字母均表示整数):

**定义 1** 满足 $n \mid a^{n-1}-1(a \geqslant 2)$ 的合数 $n$ 叫做以 $a$ 为底的伪素数,以 2 为底的伪素数简称伪素数.

注意,由定义 1 知,若 $n$ 是以 $a$ 为底的伪素数,则 $a \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*$.

**定义 2** 若 $p$ 是素数,$p \nmid a$,则由 Fermat 小定理知 $p \mid a^{p-1}-1$,所以存在最小的正整数 $\alpha$,使 $p \mid a^{\alpha}-1$(由引理 1 可证 $\alpha \mid p-1$),这个 $\alpha$ 就叫做 $a$ 关于 $p$ 的方次数.此时,若 $p^{k_0} \| a^{\alpha}-1$(指 $p^{k_0} \mid a^{\alpha}-1$ 但 $p^{k_0+1} \nmid a^{\alpha}-1$),则 $k_0$ 叫做 $a$ 关于 $p$ 的基本重数(显然,基本重数是正整数).

注意,由定义 2 知,若 $a$ 关于 $p$ 的次数是 $\alpha$,则必有“$p$ 是素数,$p \nmid a$”;若 $p \mid a$,则 $a$ 关于 $p$ 的方次数不存在,基本重数也不存在.

文献[1]的引理 9 即“2 关于 1 093,3 511 的方次数分别是 364,3 510,基本重数均大于 1”.

下面再证明文献[1]提出的“猜想 $1\,093^3 \nmid 2^{364}-1, 3\,511^3 \nmid 2^{3\,510}-1$”成立.

这是因为用电脑上的计算器可以验证:

$$(2^{100})^3 \equiv 1\,120\,548\,769^3 \equiv 598\,856\,161 \pmod{1\,093^3}$$

$$2^{64} \equiv 468\,909\,222 \pmod{1\,093^3}$$

$$2^{364} \equiv 598\,856\,161 \times 468\,909\,222 = -241\,319\,097 \pmod{1\,093^3}$$

$$2^{364}-1 \equiv -241\,319\,098 \pmod{1\,093^3}$$

$$241\,319\,098 = 1\,093^2 \times 202$$

所以 $1\,093^3 \nmid 2^{364}-1$.

$$(2^{100})^3 \equiv 11\,813\,497\,415^3 \equiv 14\,462\,408\,714 \pmod{3\,511^3}$$

$$(2^{100})^9 \equiv 14\,462\,408\,714^3 \equiv -20\,494\,396\,932 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{2\,700} = (2^{100})^{27} \equiv -20\,494\,396\,932^3 \equiv -3\,368\,020\,068 \pmod{3\,511^3}$$

$$(2^{106})^3 \equiv 20\,294\,963\,433^3 \equiv -10\,200\,907\,291 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{636} = (2^{106})^6 \equiv 10\,200\,907\,291^2 \equiv -1\,419\,060\,761 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{68} \equiv 335\,474\,215 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{174} = 2^{68} \times 2^{106} \equiv 335\,474\,215 \times 20\,294\,963\,433 \equiv -19\,870\,661\,588 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{810} = 2^{636} \times 2^{174} \equiv 1\,419\,060\,761 \times 19\,870\,661\,588 \equiv -3\,753\,678\,428 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{3\,510}=2^{2\,700}\times 2^{810}\equiv 3\,368\,020\,068\times 3\,753\,678\,428\equiv 628\,683\,172 \pmod{3\,511^3}$$

$$2^{3\,510}-1\equiv 628\,683\,171 \pmod{3\,511^3}$$

$$628\,683\,171=3\,511^2\times 51$$

所以 $3\,511^3 \nmid 2^{3\,510}-1$. 从而,可得

**定理 1** 2 关于 1 093,3 511 的方次数分别是 364,3 510,基本重数均为 2.

由文献[1]开头的结论(4)及推论 1,2 共给出了五类"$1\,093^2\,m$ 型"伪素数:

(1) $\dfrac{2^{7\cdot 13\cdot 2^k}-1}{2^{13\cdot 2^k}-1}(k\in\mathbf{N}^*)$, $\dfrac{2^{7\cdot 13\cdot 2^k}-1}{2^{7\cdot 2^k}-1}(k\in\mathbf{N})$, $\dfrac{2^{7\cdot 13\cdot 2^k}-1}{2^{2^k}-1}(k\in\mathbf{N}^*)$ 均是伪素数,且 $k\geqslant 2$ 时,它们均含有因数 $1\,093^2$;

(2) $\dfrac{2^{2^l\cdot 7\cdot 13^k}-1}{2^{2^l\cdot 13^k}-1}$, $\dfrac{2^{2^l\cdot 7^k\cdot 13}-1}{2^{2^l\cdot 7^k}-1}(k,l\in\mathbf{N})$ 是伪素数,当 $l\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*$ 时,它们均含有因数 $1\,093^2$.

恳请读者能尽快找到含有因数 $3\,511^2 m(m\geqslant 2)$ 的伪素数.

## 参考文献

[1] 甘志国. 初等数学研究(Ⅰ)[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.

# 印度奇妙数组的推广

印度数学家J.V.Chaudhari和M.N.Deshpande在1996年2月发现了完全平方数的一种奇妙性质：当正整数 $k = 956 \sim 968$ 时，$k^2$ 均为六位数，把它的前三位数与后三位数相加，得到的和也是完全平方数(例如由 $967^2 = 935\ 089$ 得 $935 + 89 = 1\ 024 = 32^2$)，并且这些完全平方数的算术平方根恰好是正整数 $43 \sim 31$.[1]

美国数学家 Owen Thomas 在1996年9月也发现了这样的完全平方数：当正整数 $k = 9\ 859 \sim 9\ 900$ 时，$k^2$ 均为八位数，把它的前四位数与后四位数相加，得到的和也是完全平方数，并且这些完全平方数的算术平方根恰好是正整数 $140 \sim 99$.[2]

实际上，由1998年10月笔者发表的拙文《几类双色完全平方数》[3] 中的定理1也可得上述结论.

中国陕西省的王凯成老师对上述问题作了比较深入的研究(见文献[4] ~ [7])，文献[6] 的定理给出了 $k^{2m}(k, m \in \mathbf{N}^*)$ 的上述性质，文献[8] 推广了此性质，并给出了 $k^{2m+1}(k, m \in \mathbf{N}^*)$ 的类似性质，其中定理1,2内涵丰富，推论1 ~ 4简洁明快. 由推论1的第一个结论可立得(把 $\overline{c_1 \cdots c_k} + \overline{c_{k+1} \cdots c_{2k}}$ 叫做 $2k(k \in \mathbf{N}^*)$ 位正整数 $\overline{c_1 \cdots c_k c_{k+1} \cdots c_{2k}}$ 的对半和，也叫二等折和，类似的还可理解三等折和、四等折和 …… 的含义)：

**定理1** 设 $a, k, m \in \mathbf{N}^*$，$k \geqslant 2m\lg C_{2m}^m + (2m - 1)\lg(m + 1)$，$10^k - \sqrt[2m]{(m + 1) \times 10^k} < a \leqslant 10^k - \sqrt[2m]{m \times 10^k}$，则 $a^{2m}$ 是 $2mk$ 位数，且 $a^{2m}$ 的 $2m$ 等折扣的 $2m$ 次算术根是 $10^k - 1 - a$.

近日笔者又研读了文献[9]，该文的主要结论可以简洁地表述为：

**定理2** 设 $a, k \in \mathbf{N}^*$，$10^k - \sqrt{2 \times 10^k} < a \leqslant 10^k - \sqrt{10^k}$，则 $a^2$ 是 $2k$ 位数，且 $a^2$ 的二等折和的算术平方根是 $10^k - 1 - a$.

**定理2′** 设 $a, k \in \mathbf{N}^*$，$10^k - \sqrt{2 \times 10^k} < a \leqslant 10^k - \sqrt{10^k}$，则

$$\left[\frac{a^2}{10^k}\right] + \left(a^2 - 10^k\left[\frac{a^2}{10^k}\right]\right) = (10^k - 1 - a)^2$$

(这里“[ ]”表示取整，下同)

**猜想** 若 $k \in \mathbf{N}^*$，$a = [10^k - \sqrt{2 \times 10^k}]$ 或 $[10^k - \sqrt{10^k}] + 1$，则 $a^2$ 的二

等折和不是完全平方数.(即由定理2得到的连续正整数组{$a$}及{$10^k-1-a$}均是个数最多的:当$k$是奇数时得到的组数是$[\sqrt{2\times10^k}]-[\sqrt{10^k}]$,当$k$是偶数时得到的组数是$[\sqrt{2\times10^k}]-[\sqrt{10^k}]+1$.文献[9]关于此有印刷错误)

实际上,在定理1中令$m=1,2,3$立得定理2及下面的结论:

**推论1** 设$a,k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant5,10^k-\sqrt[4]{3\times10^k}<a\leqslant10^k-\sqrt[4]{2\times10^k}$,则$a^4$是$4k$位数,且$a^4$的四等折和的四次算术根是$10^k-1-a$.

**推论2** 设$a,k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant11,10^k-\sqrt[6]{4\times10^k}<a\leqslant10^k-\sqrt[6]{3\times10^k}$,则$a^6$是$6k$位数,且$a^6$的六等折和的六次算术根是$10^k-1-a$.

在推论1,2中分别令$k=5,6,7;11,12,13$,得

当正整数$a=99\,977,99\,978$时,$a^4$的四等折和的四次算术根分别是22,21;当正整数$a=999\,959\sim999\,962$时,$a^4$的四等折和的四次算术根分别是40 ~ 37;当正整数$a=9\,999\,926\sim9\,999\,933$时,$a^4$的四等折和的四次算术根分别是73 ~ 66.

当正整数$a=99\,999\,999\,915\sim99\,999\,999\,918$时,$a^6$的六等折和的六次算术根分别是84 ~ 81;当正整数$a=9\,999\,999\,999\,875\sim9\,999\,999\,999\,879$时,$a^6$的六等折和的六次算术根分别是124 ~ 120;当正整数$a=9\,999\,999\,999\,816\sim9\,999\,999\,999\,823$时,$a^6$的六等折和的六次算术根分别是183 ~ 176.

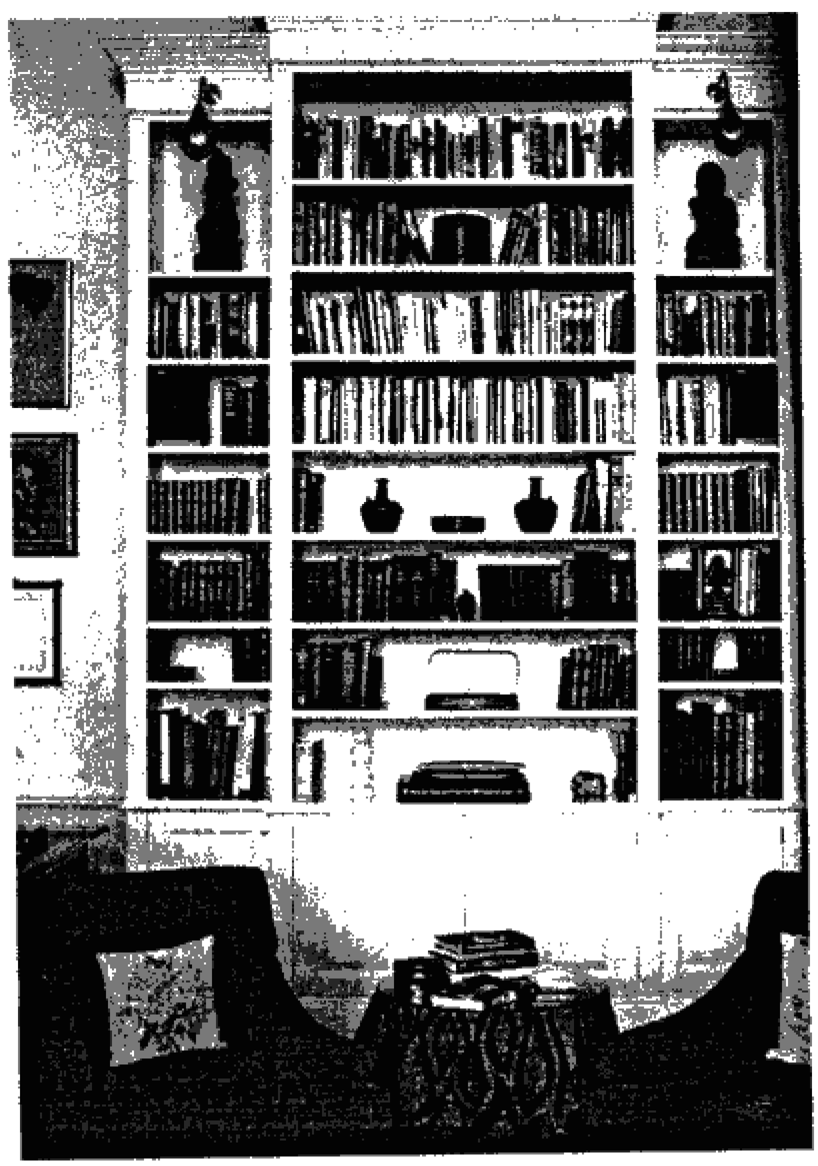
对于定理1还可作出类似于猜想的一系列猜想.

定理1给出的是正整数的偶数次幂的有趣性质;由文献[8]的推论2 ~ 4还可给出正整数的奇数次幂的这种有趣性质,只不过结论要复杂些.

## 参考文献

[1] 戴宏图.一个有趣的连续数组[J].小学数学教师,1996(6):17-18.
[2] 将秀章.有趣的连续数组的再发现[J].小学数学教师,1997(2):17-18.
[3] 甘志国.几类双色完全平方数[J].中学数学月刊,1998(10):40.
[4] 王凯成,罗运纶.数论中的"漏网之鱼"[J].中学数学教学参考,1998(8 ~ 9):60-61.
[5] 王凯成.完全平方数对半和的几个性质[J].数学通报,1999(12):28-30.
[6] 王凯成.$k^2$的一个有趣性质的推广[J].中学数学教学参考,2000(10):58-59.
[7] 王凯成.完全平方数对半和性质的推广[J].中学数学教学参考,2001(7):60-61
[8] 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.
[9] 何灯.关于印度奇妙数组三个性质的证明[J].中学数学(高中),2008(11):44-45.

# 不定方程



# 有理数集上不存在四连贯的二次多项式

杨仕椿同志在本刊文献[1]中给出：

**定义**　若数集 $K$ 上的多项式 $f(x)$ 与 $f(x)+1$ 均在 $K$ 上可约(指能表成 $K$ 上的两个次数低一些的多项式的积)，则称 $f(x)$ 为 $K$ 上的连贯多项式，若 $K$ 上的多项式 $f(x),\cdots,f(x)+n-1$(整数 $n\geqslant 2$) 均在 $K$ 上可约，则称 $f(x)$ 在 $K$ 上的 $n$ 连贯多项式，二连贯多项式即指连贯多项式.

文献[1]研究了整数集 $\mathbf{Z}$ 上的 $n(n\geqslant 2)$ 连贯多项式，并提出两条猜想：

(1) 不存在四连贯的二次多项式.

(2) 不存在 $(n+2)$ 连贯的 $n$ 次多项式.

这两个猜想显然是对整数集而言. 本文证得在 $Q$(或更小的集) 上不存在四连贯及四以上连贯的二次多项式，这就完全解决了猜想 1.

**定理 1**　方程 $x^2+y^2=2z^2$($x,y,z$ 两两互质，$x>y$) 的正整数解得

$$\begin{cases} x = m^2-n^2+2mn \\ y = |m^2-n^2-2mn| \\ z = m^2+n^2 \end{cases}$$

其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$m>n$，$2\nmid m+n$，$(m,n)=1$.

**证明**　有 $2\mid x^2+y^2$，因为 $(x,y)=1$，所以 $x,y$ 均奇(指均为奇数，下同).

由 $x>y$ 知，可设 $\begin{cases} x+y=2a \\ x-y=2b \end{cases}$，$a,b\in\mathbf{N}^*$.

所以 $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$，因为 $(x,y)=1$，所以 $(a,b)=1$，把 $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=2z^2$，得 $a^2+b^2=z^2$，因为 $(a,b)=1$，所以 $a,b,z$ 两两互质，由文献[2]第 268 页定理 7.4-1 得

$$\begin{cases} a = 2mn \\ b = m^2-n^2 \\ z = m^2+n^2 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a = m^2-m^2 \\ b = 2mn \\ z = m^2+n^2 \end{cases}$$

其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$m>n$，$2\nmid m+n$，$(m,n)=1$. 所以

$$\begin{cases} x = m^2-n^2+2mn \\ y = |m^2-n^2-2mn| \\ z = m^2+n^2 \end{cases}$$

**定理 2** (两对互质数的积相等的条件)若$(a,b)=(c,d)=1,ab=cd$,则可设$a=a_1d_1,b=c_1d_2,c=c_1d_1,d=a_1d_2$,且$a_1,c_1,d_1,d_2$两两互质.(定理 2 中的字母均为整数)

**证明** 当$a=c=0$时,因为$(a,b)=(c,d)=1$,所以$b=d=1$,选$a_1=c_1=d_2=1,d_1=0$,可满足定理.

当$a,c$不全为 0 时,可设$(a,c)=d_1,a=a_1d_1,c=c_1d_1,(a_1,c_1)=1$.

由$ab=cd$,得$a_1b=c_1d$,所以$c_1\mid b$,可设$b=c_1d_2,d=a_1d_2$.因为$(a,b)=(c,d)=1$,所以$a_1,c_1,d_1,d_2$两两互质.

**定理 3** 方程组$\begin{cases}r^2+r_2^2=2r_1^2\\ r_1^2+r_3^2=2r_2^2\end{cases}$只有$|r|=|r_1|=|r_2|=|r_3|$的有理解.

**证明** 只证原方程组只有$r=r_1=r_2=r_3$的正整数解.

(定理 3 下面的证明中,未注明的字母均表示正整数)

原方程组即

$$r^2-r_1^2=r_1^2-r_2^2=r_2^2-r_3^2(r\geqslant r_1\geqslant r_2\geqslant r_3)$$

或

$$r_3^2-r_2^2=r_2^2-r_1^2=r_1^2-r^2(r_3\geqslant r_2\geqslant r_1\geqslant r)$$

所以原方程组有$r\geqslant r_1\geqslant r_2\geqslant r_3$的正整数解$(r,r_1,r_2,r_3)$,当$r,r_1,r_2,r_3$中有两个相等时,得$r=r_1=r_2=r_3$.假设方程组有$r=r_1=r_2=r_3$之外的解,得它有$r>r_1>r_2>r_3$的解,并设各组正整数解中$r$最小的一组是$(r,r_1,r_2,r_3)$,得$r,r_1,r_2$和$r_1,r_2,r_3$均两两互质:

设$(r,r_1)=d$,有$d^2\mid r_2^2,d\mid r_2,\left(\frac{r}{d}\right)^2+\left(\frac{r_2^2}{d}\right)^2=2\left(\frac{r_1}{d}\right)^2\left(\frac{r}{d},\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d}\in\mathbf{N}^*\right)$,有$\left(\frac{r}{d},\frac{r_1}{d}\right)=1$,所以$\frac{r}{d},\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d}$两两互质,所以$(r_1,r_2)=d$,由此同理可得,$\left(\frac{r_1}{d}\right)^2+\left(\frac{r_3}{d}\right)^2=2\left(\frac{r_2}{d}\right)^2\left(\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d},\frac{r_3}{d}\in\mathbf{N}^*\right),\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d},\frac{r_3}{d}$两两互质,所以原方程组有$\left(\frac{r}{d},\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d},\frac{r_3}{d}\right)$,因为$r\leqslant\frac{r}{d}$,所以$d=1,\frac{r}{d},\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d}$和$\frac{r_1}{d},\frac{r_2}{d},\frac{r_3}{d}$均两两互质,即$r,r_1,r_2$和$r_1,r_2,r_3$均两两互质.

因为$r>r_1>r_2>r_3$,所以由定理 1,得

$$\begin{cases}r=m^2-n^2+2mn\\ r_1=m^2+n^2=p^2-q^2+2pq\\ r_2=|m^2-n^2-2mn|=p^2+q^2\end{cases}$$

其中$m>n,2\nmid m+n,p>q,2\nmid p+q,(m,n)=(p,q)=1$.得

$$\begin{cases}m^2+n^2=p^2-q^2+2pq\\ -m^2+n^2+2mn=p^2+q^2\end{cases}$$

或
$$\begin{cases} m^2+n^2=p^2-q^2+2pq \\ m^2-n^2-2mn=p^2+q^2 \end{cases}$$
即
$$\begin{cases} n(m+n)=p(p+q) \\ m(m-n)=q(p-q) \end{cases}$$
或
$$\begin{cases} m(-n+m)=p(p+q) \\ -n(-n-m)=q(p-q) \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} n(m+n)=p(p+q) \\ m(m-n)=q(p-q) \end{cases}$，由定理 2 得

$$\begin{cases} n=a_1d_1 \\ m+n=c_1d_2 \\ p=c_1d_1 \\ p+q=a_1d_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m=a'_1d'_1 \\ m-n=c'_1d'_2 \\ q=c'_1d'_1 \\ p-q=a'_1d'_2 \end{cases}$$

其中 $a_1,c_1,d_1,d_2$ 两两互质，$a'_1,c'_1,d'_1,d'_2$ 两两互质. 因为 $m,n,m\pm n,p,q,p\pm q\in\mathbf{N}^*$，所以可选 $a_1,c_1,d_1,d_2,a'_1,c'_1,d'_1,d'_2\in\mathbf{N}^*$. 因为 $2\nmid m\pm n$，$2\nmid p\pm q$，所以 $a_1,c_1,d_2,a'_1,c'_1,d'_2$ 均奇（后面证 $d_1$ 奇，$d'_1$ 偶）. 可得

$$\begin{cases} a'_1d'_1=c_1d_2-a_1d_1=a_1d_1+c'_1d'_2 \\ c'_1d'_1=a_1d_2-c_1d_1=c_1d_1-a'_1d'_2 \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases} a_1d_1=a'_1d'_1-c'_1d'_2=c_1d_2-a'_1d'_1 \\ c_1d_1=a'_1d'_2+c'_1d'_1=a_1d_2-c'_1d'_1 \end{cases} \quad ②$$

由 ① 得

$$\begin{cases} a'_1d'_2=2c_1d_1-a_1d_2 \\ c'_1d'_2=c_1d_2-2a_1d_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d'_2(a'_1-c'_1)=(c_1+a_1)(2d_1-d_2) \\ d'_2(a'_1+c'_1)=(c_1-a_1)(2d_1+d_2) \end{cases}$$

所以
$$a_1<c_1$$

$$d'^2_2(a'^2_1-c'^2_1)=(c_1^2-a_1^2)(4d_1^2-d_2^2) \quad ③$$

$$\frac{a'_1d'_1}{c'_1d'_1}=\frac{c_1d_2-a_1d_1}{a_1d_2-c_1d_1}=\frac{a'_1d'_2}{c'_1d'_2}=\frac{2c_1d_1-a_1d_2}{a_1d_2-2a_1d_1}$$

$$(a_1^2+c_1^2)(2d_1^2+d_2^2)=6a_1c_1d_1d_2$$

因为 $d_2$ 奇，$(d_2,d_1)=1$，所以 $(d_2,2d_1^2+d_2^2)=(d_2,2d_1^2)=1$，可得 $(d_1d_2,2d_1^2+d_2^2)=1$，所以 $d_1d_2\mid a_1^2+c_1^2$，同理 $a_1c_1\mid 2d_1^2+d_2^2$.

设 $a_1^2+c_1^2=kd_1d_2$，$2d_1^2+d_2^2=la_1c_1$，$kl=6$，$3\nmid k$（因为 $(a_1,c_1)=1$ 时，$3\nmid a_1^2+c_1^2$），$2\nmid l$，所以 $k=2$，$l=3$，即

$$\begin{cases}a_1^2+c_1^2=2d_1d_2\\2d_1^2+d_2^2=3a_1c_1\end{cases}\quad ④$$

$a_1^2+c_1^2=2d_1d_2$，$a_1$，$c_1$ 均奇，所以 $2\parallel a_1^2+c_1^2$，得 $d_1$ 奇．还有

$$\begin{cases}a'_1d'_1=a_1d_1+c'_1d'_2\\c'_1d'_1=c_1d_1-a'_1d'_1\end{cases}\qquad\begin{cases}d'_1=\dfrac{d_1(a_1a'_1+c_1c'_1)}{a'^2_1+c'^2_1}\\d'_2=\dfrac{d_1(a'_1c_1-a_1c'_1)}{a'^2_1+c'^2_1}\end{cases}\quad ⑤$$

由②得

$$\begin{cases}a_1d_1=c_1d_2-a'_1d'_1\\c_1d_1=a_1d_2-c'_1d'_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_1+c_1)(d_2-d_1)=d'_1(c'_1+a'_1)\\(a_1-c_1)(d_2+d_1)=d'_1(c'_1-a'_1)\end{cases}$$

因为 $a_1<c_1$，所以 $a'_1>c'_1$．

$$d'^2_1(c'^2_1-a'^2_1)=(a_1^2-c_1^2)(d_2^2-d_1^2)\quad ⑥$$

还得

$$\begin{cases}d_1=\dfrac{d'_1(a'_1a_1-c'_1c_1)}{c_1^2-a_1^2}\\d_2=\dfrac{d'_1(a'_1c_1-a_1c'_1)}{c_1^2-a_1^2}\end{cases}\quad ⑦$$

由②得

$$\frac{a_1d_1}{c_1d_1}=\frac{a'_1d'_1-c'_1d'_2}{a'_1d'_2+c'_1d'_1}=\frac{a_1d_2}{c_1d_2}=\frac{a'_1d'_2+2c'_1d'_1}{2a'_1d'_1-c'_1d'_2}$$

$$(a'^2_1-c'^2_1)(2d'^2_1-d'^2_2)=6a'_1c'_1d'_1d'_2$$

所以 $a'_1c'_1\mid 2d'^2_1-d'^2_2$，$d'_1d'_2\mid a'^2_1-c'^2_1$(用到 $d'_2$ 奇)．

设 $2d'^2_1-d'^2_2=ka'_1c'_1(k\in\mathbf{Z})$，$a'^2_1-c'^2_1=ld'_1d'_2$(因为 $a'_1>c'_1$，所以 $l>0$)．$kl=6$，因为 $l>0$，所以 $k>0$．得 $2\nmid k$，$3\nmid k$，所以 $k=1$，$l=6$．即

$$\begin{cases}a'^2_1-c'^2_1=6d'_1d'_2\\2d'^2_1-d'^2_2=a'_1c'_1\end{cases}\quad ⑧$$

在 $a'^2_1-c'^2_1=6d'_1d'_2$ 中，$4\mid a'^2_1-c'^2_1$，所以 $2\mid d'_1$，$d'_1$ 偶．

由⑤，⑦得

$$\frac{d_1}{d'_1}=\frac{a_1a'_1-c_1c'_1}{c_1^2-a_1^2}=\frac{a'^2_1+c'^2_1}{a_1a'_1+c_1c'_1}$$

所以
$$c_1^2-a_1^2\mid(a_1a'_1)^2-(c_1c'_1)^2$$

得 $$c_1^2 - a_1^2 \mid a'^2_1 - c'^2_1 \quad ⑨$$

把⑤中 $d'_1, d'_2$ 代入⑧,得

$$6d_1^2(a_1a'_1 + c_1c'_1)(a'_1c_1 - a_1c'_1) = (a'^2_1 - c'^2_1)(a'^2_1 + c'^2_1)^2$$

$$d_1^2[2(a_1a'_1 + c_1c'_1)^2 - (a'_1c_1 - a_1c'_1)^2] = a'_1c'_1(a'^2_1 + c'^2_1)^2$$

设 $u$ 是 $d_1$ 的任一质因数,得

$$u \mid a'^2_1 - c'^2_1$$

或 $$u \mid a'^2_1 + c'^2_1$$

且 $u \mid a'_1$,或 $u \mid c'_1$,或 $u \mid a'^2_1 + c'^2_1$.

假设 $u \mid a'_1$,或 $u \mid c'_1$,又 $u \mid a'^2_1 \pm c'^2_1$,所以 $u \mid a'_1$,且 $u \mid c'_1$,与$(a'_1, c'_1) = 1$ 矛盾!所以 $u \nmid a'_1$ 且 $u \nmid c'_1$,$(u, a'_1c'_1) = 1$,所以$(d_1, a'_1c'_1) = 1$,得 $d_1 \mid a'^2_1 + c'^2_1$.所以 $a'^2_1 - c'^2_1 \mid 6(a_1a'_1 + c_1c'_1)(a'_1c_1 - a_1c'_1)$,可得 $a'^2_1 - c'^2_1 \mid 6(c_1^2 - a_1^2)$.

又由⑨$c_1^2 - a_1^2 \mid a'^2_1 - c'^2_1$,得 $a'^2_1 - c'^2_1 = k(c_1^2 - a_1^2)(k \in \mathbf{Z})$,$k \mid 6$,因为 $a'_1 > c'_1$,$a_1 < c_1$,所以 $k > 0$,$k = 1,2,3,6$.

又由③$d'^2_2(a'^2_1 - c'^2_1) = (c_1^2 - a_1^2)(4d_1^2 - d_2^2)$,得 $kd'^2_2 = 4d_1^2 - d_2^2$.因为 $d_2$ 奇,所以 $k$ 奇,$k = 1,3$.

当 $k = 1$ 时,得 $4 \mid d'^2_1 + d_2^2$,此不成立.

所以 $k = 3$,得 $4d_1^2 - d_2^2 = 3d'^2_2$,$a'^2_1 - c'^2_1 = 3(c_1^2 - a_1^2)$,又由⑥$d'^2_1(c'^2_1 - a'^2_1) = (a_1^2 - c_1^2)(d_2^2 - d_1^2)$ 得,$d_2^2 - d_1^2 = 3d'^2_1$.

所以 $$\begin{cases} d_2^2 - d_1^2 = 3d'^2_1 \\ 4d_1^2 - d_2^2 = 3d'^2_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1^2 = d'^2_1 + d'^2_2 \\ d_2^2 = 4d'^2_1 + d'^2_2 \end{cases}$$

又由④⑧,得

$$\begin{cases} 2d_1^2 + d_2^2 = 3a_1c_1 & ⑩ \\ a_1^2 + c_1^2 = 2d_1d_2 & ⑪ \\ a'^2_1 - c'^2_1 = 6d'_1d'^2_2 & ⑫ \\ 2d'^2_1 - d'^2_2 = a'_1c'_1 & ⑬ \\ d_1^2 = d'^2_1 + d'^2_2 & ⑭ \\ d_2^2 = 4d'^2_1 + d'^2_2 & ⑮ \\ a'^2_1 - c'^2_1 = 3(c_1^2 - a_1^2) & ⑯ \end{cases}$$

由⑫,⑯得 $c_1^2 - a_1^2 = 2d'_1d'_2$,与⑪得

$$\begin{cases} a_1^2 = d_1d_2 - d'_1d'_2 \\ c_1^2 = d_1d_2 + d'_1d'_2 \end{cases}$$

由⑫,⑬得 $a'^2_1$, $-c'^2_1$ 是关于 $x$ 的方程 $x^2-6d'_1d'_2x-(2d'^2_1-d'^2_2)=0$ 的两个根

$$x=3d'_1d'_2\pm\sqrt{9d'^2_1d'^2_2+(2d'^2_1-d'^2_2)^2}=$$
$$3d'_1d'_2\pm\sqrt{(4d'^2_1+d'^2_2)(d'^2_1+d'^2_2)}$$

由⑭,⑮得 $x=3d'_1d'_2\pm d_1d_2$.所以

$$\begin{cases}a'^2_1=d_1d_2+3d'_1d'_2\\c'^2_1=d_1d_2-3d'_1d'_2\end{cases}\quad a'^2_1+c'^2_1=2d_1d_2$$

由⑪得 $a'^2_1+c'^2_1=a_1^2+c_1^2$,又由⑯得

$$\begin{cases}a'^2_1+a_1^2=2c_1^2\\c_1^2+c'^2_1=2a_1^2(a'_1>c_1>a_1>c'_1)\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}r^2+r_2^2=2r_1^2\\r_1^2+r_3^2=2r_2^2\end{cases}\quad(r>r_1>r_2>r_3)$$

还有解 $(r,r_1,r_2,r_3)=(a'_1,c_1,a_1,c'_1)$,且 $r=m^2-n^2+2mn>mn\geqslant m=a'_1d'_1\geqslant a'_1$,得 $r>a'_1$,与 $r$ 最小矛盾!所以此时原方程组只有 $r=r_1=r_2=r_3$ 的正整数解.

$$(2)\begin{cases}m(-n+m)=p(p+q)\\-n(-n-m)=q(p-q)\end{cases}$$

由定理2得

$$\begin{cases}m=a_1d_1\\-n+m=c_1d_2\\p=c_1d_1\\p+q=a_1d_2\end{cases}\qquad\begin{cases}-n=a'_1d'_1\\-n-m=c'_1d'_2\\q=c'_1d'_1\\p-q=a'_1d'_2\end{cases}$$

其中 $a_1,c_1,d_1,d_2$ 两两互质,$a'_1,c'_1,d'_1,d'_2$ 两两互质,可使 $a_1,c_1,d_1,d_2,a'_1,d'_2\in\mathbf{N}^*$,$c'_1,d'_1\in\mathbf{Z}_-$,$a_1,c_1,d_2,a'_1,c'_1,d'_2$ 均奇(后面证 $d_1$ 奇,$d'_1$ 偶).

下面的证明仿照前面(1)部分的证明,少有不同.

可得①,②两组等式在这里成立,而(1)部分的证明全由①,②两个等式及①,②中的字母均为正整数进行证明的,所以(1)的证明中一切与“$c'_1<0$,$d'_1<0$”无关的结论在这里均成立,证明过程简写如下:

由②得

$$\begin{cases}(a_1+c_1)(d_2-d_1)=d'_1(c'_1+a'_1)\\(a_1-c_1)(d_2+d_1)=d'_1(c'_1-a'_1)\end{cases}$$

因为 $c'_1<0,d'_1<0,a'_1>0$,所以 $(a_1-c_1)(d_2+d_1)=d'_1(c'_1-a'_1)>0$,

所以 $a_1 > c_1$. 得 ⑥,⑦ 成立.

由 ① 得

$$\begin{cases} d'_2(a'_1 - c'_1) = (c_1 + a_1)(2d_1 - d_2) \\ d'_2(a'_1 + c'_1) = (c_1 - a_1)(2d_1 + d_2) \end{cases}$$

因为 $a_1 > c_1$,所以 $a'_1 + c'_1 < 0$,得 $a'^2_1 - c'^2_1 < 0$. ③,④,⑤ 成立.

由 ② 得 $(a'^2_1 - c'^2_1)(2d'^2_1 - d'^2_2) = 6a'_1c'_1d'_1d'_2$.

可设 $2d'^2_1 - d'^2_2 = ka'_1c'_1(k \in \mathbf{Z})$, $a'^2_1 - c'^2_1 = ld'_1d'_2(l_1 \in \mathbf{Z})$, $kl = 6$. 因为 $a'^2_1 - c'^2_1 < 0$, $d'_1d'_2 < 0$,所以 $l > 0$,得 $k > 0$,所以 ⑧ 成立,⑨ 成立.

同(1) 证得 $a'^2_1 - c'^2_1 = 6(c^2_1 - a^2_1)$,又由 ⑨$c^2_1 - a^2_1 \mid a'^2_1 - c'^2_1$,得 $a'^2_1 - c'^2_1 = k(c^2_1 - a^2_1)(k \in \mathbf{Z})$, $k \mid 6$. 因为 $a'^2_1 - c'^2_1 < 0$, $c^2_1 - a^2_1 < 0$,所以 $k = 1,2,3,6$.

以后的证明全同(1),直到最后,把

$$\begin{cases} a'^2_1 + a^2_1 = 2c^2_1 \\ c^2_1 + c'^2_1 = 2a^2_1 \end{cases} \quad (a'_1 > c_1 > a_1 > c'_1)$$

改为

$$\begin{cases} (-c'_1)^2 + c^2_1 = 2a^2_1 \\ a^2_1 + a'^2_1 = 2c^2_1 \end{cases} \quad (-c' > a_1 > c_1 > a'_1)$$

所以
$$\begin{cases} r^2 + r^2_2 = 2r^2_1 \\ r^2_1 + r^2_3 = 2r^2_2 \end{cases} \quad (r > r_1 > r_2 > r_3)$$

还有解 $(r, r_1, r_2, r_3) = (-c'_1, a_1, c_1, a'_1)$,且 $r = m^2 - n^2 + 2mn > m^2 + (2n^2 - n^2) \geqslant m + n = -c'_1d'_2 \geqslant -c'_1$,得 $r > -c'_1$,与 $r$ 最小矛盾!所以此时原方程组也只有 $r = r_1 = r_2 = r_3$ 的正整数解. 定理 3 成立.

**定理 4** 在有理数集(或更小的数集)上不存在四连贯及四以上连贯的二次多项式.

**证明** 只证在有理数集 $\mathbf{Q}$ 上不存在四连贯的二次多项式.

假设 $y = ax^2 + bx + c(a, b, c \in \mathbf{Q}, a \neq 0)$ 四连贯,得 $y, y+1, y+2, y+3$ 均在 $\mathbf{Q}$ 上可约.

所以 $b^2 - 4ac = r^2$, $b^2 - 4ac - 4a = r^2_1$, $b^2 - 4ac - 8a = r^2_2$, $b^2 - 4ac - 12a = r^2_3$, $r, r_1, r_2, r_3 \in \mathbf{Q}$. 得

$$4a = r^2 - r^2_1 = r^2_1 - r^2_2 = r^2_2 - r^2_3$$

所以
$$\begin{cases} r^2 + r^2_2 = 2r^2_1 \\ r^2_1 + r^2_3 = 2r^2_2 \end{cases}$$

由定理 3,得 $|r| = |r_1| = |r_2| = |r_3|$,所以 $4a = 0$,与 $a \neq 0$ 矛盾!定理 4 成立.

# 参考文献

[1] 杨仕椿.关于 whc78,whc79 的解决[J].数学通讯,1995(2):19-20.
[2] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

# 任意正整数的全部平方差分拆及其组数

文献[1]的定理1给出了正整数方幂的部分平方差分拆公式及其应用,本文给出任意正整数的全部平方差分拆及其组数,这样文献[1]的所有定理都是本文定理的明显推论,文献[1]中有欠完整的地方也可得到补充.

## 1 自然数的平方差分拆

**定理1** 设 $n$ 为任意正整数,则方程

$$n = x^2 - y^2 \quad ①$$

的全部正整数解(如果存在)为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\frac{n}{b} + b) \\ y = \frac{1}{2}(\frac{n}{b} - b) \end{cases} \quad ②$$

其中 $b \in \mathbf{N}^*, b < \sqrt{n}$,并且当 $2 \nmid n$ 时,$b \mid n$;当 $2 \mid n$ 时,$2 \mid b$ 且 $2b \mid n$.

**证明** 先就 $2 \nmid n$ 证明②是①的全部正整数解.

容易验证②满足①,并且②是①的正整数解.事实上,因为 $b \mid n, 2 \nmid n$,所以 $\frac{n}{b}$ 与 $b$ 均为正奇数,所以 $2 \mid \frac{n}{b} \pm b$.又 $b \in \mathbf{N}^*, b < \sqrt{n}$,所以 $\frac{n}{b} - b > 0$,得 $x, y \in \mathbf{N}^*$,所以②是①的正整数解.

还须证明①的正整数解均可表为②的形式.由题设,$(x+y)(x-y) = n$,设 $x - y = b$,则 $b \mid n$.因为 $x, y, n \in \mathbf{N}^*$,所以 $x - y = b, b \in \mathbf{N}^*$,得 $b(b + 2y) = n, y = \frac{1}{2}(\frac{n}{b} - b), x = y + b = \frac{1}{2}(\frac{n}{b} + b)$.因为 $y > 0$,所以 $b < \sqrt{n}$,所以当 $2 \nmid n$ 时,①的正整数解均可表为②的形式.

现在就 $2 \mid n$ 证明②是①的全部正整数解.

首先②是①的正整数解:因为 $2 \mid b, 2b \mid n$,所以 $\frac{n}{b}$ 与 $b$ 均为正偶数,所以 $2 \mid \frac{n}{b} \pm b$,同上得 $x, y \in \mathbf{N}^*$.所以②是①的正整数解.

其次,①的正整数解均可表为②的形式.①可写成 $(x+y)(x-y) = n$.设 $x - y = b$,同上有 $b \mid n, b \in \mathbf{N}^*, y = \frac{1}{2}(\frac{n}{b} - b), x = \frac{1}{2}(\frac{n}{b} + b), b < \sqrt{n}$.

因为 $2\mid n$,$(x+y)(x-y)=n$,所以 $x+y=\frac{n}{b}$ 与 $x-y=b$ 均为偶数,所以 $2\mid b$,$2b\mid n$,所以 $2\mid n$ 时,① 的正整数解均可表为 ② 的形式.

## 2 引理

本文用 $\sigma(a)$ 表示 $a$ 的全部正约数的个数.用 $\sigma_0(a)$ 表示 $a$ 的全部小于$\sqrt{a}$ 的正约数的个数.

**引理 1**[2] 设 $a\in\mathbf{N}^*$,$a\geqslant 2$,若 $a$ 的标准分解式为 $a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$,$i=1,\cdots,k$),则 $\sigma(a)=(\alpha_1+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_k+1)$.约定 $\sigma(1)=1$.

**引理 2** 若 $a\in\mathbf{N}^*$,$a\geqslant 2$,则 $\sigma_0(a)=\left[\frac{1}{2}\sigma(a)\right]$.

**证明** 把 $a$ 的全部正约数从小到大排列为:

$$a_1<a_2<\cdots<a_{\sigma(a)} \tag{③}$$

把 $a$ 表示为所有的两个正整数积的形式,则 $a=a_i\cdot a_{\sigma(a)+1-i}$,$i=1,2,\cdots,\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]$:

$$a=a_1a_{\sigma(a)}=\cdots=a_{\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}a_{\sigma(a)+1-\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]} \tag{④}$$

因为

$$\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]\leqslant\frac{\sigma(a)+1}{2}$$

所以

$$\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]\leqslant\sigma(a)+1-\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]\quad(\text{当且仅当 }2\mid\sigma(a)+1\text{ 时取等号}) \tag{⑤}$$

所以

$$a_1<\cdots<a_{\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}\leqslant a_{\sigma(a)+1-\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}<\cdots<a_{\sigma(a)}$$

当 $2\mid\sigma(a)+1$ 时,由 ⑤ 得 $a_{\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}=a_{\sigma(a)+1-\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}$,又由 ④ 得 $a_{\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}=\sqrt{a}$.再由 ③,得 $\sigma_0(a)=\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]-1=\frac{\sigma(a)+1}{2}-1=\frac{\sigma(a)-1}{2}=\left[\frac{1}{2}\sigma(a)\right]$(因为 $2\nmid\sigma(a)$)

当 $2\mid\sigma(a)$ 时,由⑤得 $a_{\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}<a_{\sigma(a)+1-\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}$,又由④得,$a_{\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}<\sqrt{a}$,$a_{\sigma(a)+1-\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]}>\sqrt{a}$.再由 ③ 得 $\sigma_0(a)=\left[\frac{\sigma(a)+1}{2}\right]=\frac{1}{2}\sigma(a)=\left[\frac{1}{2}\sigma(a)\right]$(因为 $2\mid\sigma(a)$).

## 3 平方差分拆的组数

**定理 2** (1) 当 $n=1$ 时,① 没有正整数解;

(2) 当 $n \geqslant 2$ 且 $2 \nmid n$ 时,① 的正整数解的组数为 $\sigma_0(n)$;

(3) 当 $2 \mid n$ 但 $4 \nmid n$ 时,① 没有正整数解;

(4) 当 $4 \mid n$ 时,① 的正整数解的组数为 $\sigma_0\left(\frac{1}{4}n\right)$.

(其中 $\sigma_0(n)$ 可由引理 1,2 得到)

**证明** (1) 由定理 1 可知 ① 没有正整数解.

(2) 由定理 1($2 \nmid n$ 的情形),只需证明:对于满足条件:$b \in \mathbf{N}^*, b \mid n, b < \sqrt{n}$ 的 $b_1, b_2$,若 $b_1 \neq b_2$,则得到的正整数解

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{b_1} + b_1\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{b_1} - b_1\right) \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{b_2} + b_2\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{b_2} - b_2\right) \end{cases}$$

是两组不同的解.

假设得到的两组解相同,则 $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{b_1} + b_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{b_2} + b_2\right)$,$(b_1 - b_2)(b_1b_2 - n) = 0$,$b_1b_2 < n$,所以 $b_1 = b_2$,这与 $b_1 \neq b_2$ 矛盾!所以应得到两组不同的解. 结论(2) 成立.

(3) 由定理 1($2 \mid n$ 的情形) 可得.

(4) 在定理 1($2 \mid n$ 的情形) 中,可设 $b = 2c$,从而可把这时的定理 1 改述为:

当 $2 \mid n$ 时,① 的全部正整数解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2c} + 2c\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2c} - 2c\right) \end{cases}$$

其中 $c \in \mathbf{N}^*, c \mid \frac{1}{4}n, c < \frac{1}{2}\sqrt{n}$.

据此,要证结论(4) 成立,只需证明:

对于满足条件 $c \in \mathbf{N}^*, c \mid \frac{1}{4}n, c < \frac{1}{2}\sqrt{n}$ 的 $c_1, c_2$,若 $c_1 \neq c_2$,则得到的正整数解

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2c_1} + 2c_1\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2c_1} - 2c_1\right) \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2c_2} + 2c_2\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2c_2} - 2c_2\right) \end{cases}$$

是两组不同的解.而它的证明几乎全同(2)的证明,所以结论(4)成立.

## 4 正整数方幂的平方差分拆

由定理1,2可得以下各推论.

**推论1** 设 $m,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2$.

(1) 若 $2\nmid n,0\leqslant i<\frac{m}{2}$,则

$$n^m=\left(\frac{n^{m-i}+n^i}{2}\right)^2-\left(\frac{n^{m-i}-n^i}{2}\right)^2 \quad ⑥$$

此时式⑥给出了 $n^m$ 的 $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ 组平方差分拆;

(2) 若 $2\mid n,m\geqslant 3,1\leqslant i<\frac{m}{2}$,则式⑥成立,此时式⑥给出了 $n^m$ 的 $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ 组平方差分拆.

**证明** 用 $n^m$ 代替定理1中的 $n$,令 $b=n^i$($i$ 满足相应的条件)可证.

由推论1易得文献[1]的定理1,并且定理1[1]中的条件"$n$ 非某自然数幂"可以去掉.

**推论2** 当且仅当 $n$ 是素数时,$n^m(m\geqslant 2)$ 无异于推论1的平方差分拆.

**证明** 由推论1的条件 $n\geqslant 2$,所以可设 $n$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$),得 $n^m=p_1^{\alpha_1 m}\cdots p_k^{\alpha_k m}$.

(1) 在推论1(1)的条件下,由定理2(2)得,$n^m$ 的平方差分拆的组数为 $\sigma_0(n^m)=\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 m+1)\cdots(\alpha_k m+1)\right]$,此时 $n^m$ 无异于推论1(1)的平方差分拆的充要条件是

$$\sigma_0(n^m)=\left[\frac{m+1}{2}\right] \quad ⑦$$

(2) 在推论1(2)的条件下,因为 $2\mid n$,所以不妨设 $p_1=2$,由定理2(4),得 $n^m$ 的平方差分拆的组数为

$$\sigma_0\left(\frac{1}{4}n^m\right)=\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 m-1)(\alpha_2 m+1)\cdots(\alpha_k m+1)\right]$$

此时 $n^m$ 无异于推论1(2)的平方差分拆的充要条件是

$$\sigma_0\left(\frac{1}{4}n^m\right)=\left[\frac{m-1}{2}\right] \quad ⑧$$

可证⑦,⑧成立的充要条件均为 $k=\alpha_1=1$,即 $n$ 为素数.关于⑦的结论,假设 $k\geqslant 2$,则

$$\sigma_0(n^m)\geqslant\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 m+1)\times 2\right]=\alpha_1 m+1\geqslant m+1>$$

$$\frac{m+1}{2} \geqslant \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

所以 $k = 1$. 又假设 $\alpha_1 \geqslant 2$,则

$$\sigma_0(n^m) \geqslant \left[\frac{1}{2}(2m+1)\right] = m > \frac{m+1}{2}(\text{因为 } m \geqslant 2) \geqslant \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

所以 $\alpha_1 = 1$. 同理可证关于 ⑧ 的结论.

**推论 3** ① 没有正整数解的充要条件是 $n = 1,4$,或 $2 \mid n$,但 $4 \nmid n$.

**证明** 由定理 2 得.

由推论 3 可得文献[1] 定理 2,3,4(前半部分) 成立.

**推论 4** (1) 当 $n = 2^{2k+1} \cdot p(k \in \mathbf{N}^*, p$ 为奇数) 时,$n = (2^{2k-i} \cdot p + 2^{i-1})^2 - (2^{2k-i} \cdot p - 2^{i-1})^2$,其中 $i \in \mathbf{N}^*, 1 \leqslant i < \min\{2k+1, k+\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{p}\}$.

(2) 当 $n = 2^{2k} \cdot p(k \in \mathbf{N}^*, p$ 为奇数) 时,$n = [2^{k-i}(p + 2^{2(i-1)})]^2 - [2^{k-i}(p - 2^{2(i-1)})]^2$,其中 $i \in \mathbf{Z}, 2-k \leqslant i < \min\{\log_2\sqrt{p}+1, k+1\}$.

**证明** 在定理 1($2 \mid n$ 的情形) 中,分别选 $b = 2^i, 2^{k-1+i}$($i$ 满足相应的条件) 可证.

推论 4 比文献[1] 的定理 4 更完整,且定理 4② 有误,反例:当 $k = 1, p = 25$ 时,$[1 + \log_2\sqrt{p}] = 3, i = 3$ 时,由文献[1] 定理 4② 得 $100 = \left(\frac{41}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2$,而这不是平方差分拆.

**例** 求方程 $1\,993^{1\,993} + y^2 = x^2$ ⑨

的全部正整数解.

**解** 因为 1 993 是素数,所以由推论 2 得,⑨ 的全部正整数解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(1\,993^{1\,993-i} + 1\,993^i) \\ y = \frac{1}{2}(1\,993^{1\,993-i} - 1\,993^i) \end{cases} \quad i = 0,1,\cdots,996$$

所以方程 ⑨ 有且仅有 997 组正整数解,而文献[1] 的例 4 只得到 ⑨ 的正整数解的组数至少为 997. 其实此结论可由文献[1] 定理 1 末的"注" 得到.

另外,文献[3] 给出 $x^2 - y^2 = a^3(a \in \mathbf{Z})$ 的全部整数解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a(a+1) \\ y = \frac{1}{2}a(a-1) \end{cases}$$

容易看出 $a = 0$ 时此结论是错误的,文献[1] 也给出了反例(文献[1] 第 19 页左栏第二行"$x^2 - y^2 = a^2$" 应为"$x^2 - y^2 = a^3$"),在本文的定理 1 中,令 $n = a^3$, $b = a$ 可得上述结论.

# 参考文献

[1] 李建章.自然数方幂的平方差分拆[J].数学通讯,1994(2):18-20.
[2] 魏万迪.整数入门[J].成都:四川教育出版社,1988.
[3] 李迪.正整数的立方化成平方差[J].数学通讯,1957(7):17-18.

# 正整数的互素平方差分拆

## 1 正整数的平方差分拆

文献[1]给出了任意正整数的全部平方差分拆及其组数，即求出了

$$n = x^2 - y^2(n\text{ 是已知的任意正整数}) \quad ①$$

的全部正整数解及其组数，但定理结论的叙述有些零乱，可把文献[1]的定理1,2及推论3综述为

**定理1** (1) 当 $2 \nmid n$ 且 $n > 1$ 时，① 有正整数解，且全部正整数解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a+b) \\ y = \frac{1}{2}(a-b) \end{cases}$$

其中 $a, b \in \mathbf{N}^*, ab = n, b < \sqrt{n}$，解的组数为 $\sigma_0(n)$；

(2) 当 $4 \mid n$ 且 $n > 4$ 时，① 有正整数解，且全部正整数解为 $\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases}$，其中 $a, b \in \mathbf{N}^*, ab = \frac{1}{4}n, b < \sqrt{\frac{1}{4}n}$，此时解的组数为 $\sigma_0\left(\frac{1}{4}n\right)$；

(3) 当且仅当 $n = 1, 4$，或 $2 \mid n$ 但 $4 \nmid n$ 时，① 没有正整数解.

其中 $\sigma_0(n)$ 表示 $n$ 的全部小于 $\sqrt{n}$ 的正约数的个数，设 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$（$p_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i \in \mathbf{N}^*, i = 1, \cdots, k$），则

$$\sigma_0(n) = \left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)\right]$$

## 2 正整数的互素平方差分拆

这里再给出任意正整数的全部互素平方差分拆及其组数，即要求出

$$n = x^2 - y^2(n\text{ 是已知的任意正整数}, (x, y) = 1) \quad ②$$

的全部正整数解及其组数.

为求出组数，先给出一个定义和引理.

**定义** 若 $a \in \mathbf{N}^*, a \mid n, \left(a, \frac{n}{a}\right) = 1$，则把 $a$ 叫做 $n$ 的一个互素正约数.

**引理** 设正整数 $n (n \geqslant 2)$ 的全部素因数个数为 $k (k \in \mathbf{N}^*)$，则

(1) $n$ 的全部互素正约数个数为 $2^k$；

(2) $n$ 的全部小于$\sqrt{n}$ 的互素正约数个数为 $2^{k-1}$.

**证明** (1) 可设 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$，$i = 1,\cdots,k$)，则 $a$ 是 $n$ 的互素正约数 $\Leftrightarrow a = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}\cdots p_{i_s}^{\alpha_{i_s}}$，$\{i_1,\cdots,i_s\} \subseteq \{1,\cdots,k\}$，或 $a = 1$.

所以 $n$ 的全部互素正约数的个数为 $C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k = 2^k$.

(2) 由定义可知，$a$ 是 $n$ 的互素正约数，则$\dfrac{n}{a}$ 也是 $n$ 的互素正约数，且 $a \neq \dfrac{n}{a}$.

所以 $a$ 与$\dfrac{n}{a}$ 中有一个是小于$\sqrt{n}$ 的互素正约数，另一个是大于$\sqrt{n}$ 的互素正约数，即 $n$ 的小于$\sqrt{n}$ 的互素正约数与 $n$ 的大于$\sqrt{n}$ 的互素正约数各占 $n$ 的互素正约数的一半，为 $2^{k-1}$ 个.

**定理 2** (1) 当 $2 \nmid n$ 且 $n > 1$ 时，② 有正整数解，且全部正整数解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(a+b) \\ y = \dfrac{1}{2}(a-b) \end{cases}$$

其中 $a,b \in \mathbf{N}^*$，$(a,b) = 1$，$ab = n$，$b < \sqrt{n}$，此时解的组数为 $2^{k-1}$($k$ 表示 $n$ 的全部素因数的个数)；

(2) 当 $8 \mid n$ 时，② 有正整数解，且全部正整数解为$\begin{cases} x = (a+b) \\ y = (a-b) \end{cases}$，其中 $a,b \in \mathbf{N}^*$，$(a,b) = 1$，$ab = \dfrac{1}{4}n$，$b < \sqrt{\dfrac{1}{4}n}$，解的组数为 $2^{k-1}$($k$ 表示 $n$ 的全部素因数的个数)；

(3) 当且仅当 $n = 1$ 或($2 \mid n$，但 $8 \nmid n$) 时，② 没有正整数解.

**证明** (1) 先证关于"全部正整数解" 的结论. 由定理 1(1)，只需证明：$(x,y) = 1 \Leftrightarrow (a,b) = 1$.

先证"$\Rightarrow$"：因为 $(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}(a+b),\dfrac{1}{2}(a-b)\right) = 1$，所以 $(a+b,a-b) = 2$. 因为 $(a,b) \mid (a+b,a-b)$，所以 $(a,b) = 1$ 或 2. 因为 $ab = n$，$2 \nmid n$，所以 $2 \nmid a$，$2 \nmid b$，所以 $(a,b) = 1$.

再证"$\Leftarrow$"：因为 $(a,b) = 1$，所以 $(a+b,b) = 1$. 所以 $(a+b,a-b) = (a+b,2b) = (a+b,2) = 2$(因为 $2 \nmid a$，$2 \nmid b$)，所以 $(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}(a+b),\dfrac{1}{2}(a-b)\right) = 1$.

再证关于解的组数的结论.

由引理(2),只需证明:

对于满足条件:$a,b\in\mathbf{N}^*,(a,b)=1,ab=n,b<\sqrt{n}$ 的两对不全相同的数$(a_1,b_1),(a_2,b_2)$,得到的正整数解

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(a_1+b_1)\\ y=\dfrac{1}{2}(a_1-b_1)\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(a_2+b_2)\\ y=\dfrac{1}{2}(a_2-b_2)\end{cases}$$

是两组不同的解,这是容易获证的.

由解的组数知,此时 ② 有正整数解.

(2) 先证关于"全部正整数解"的结论.

由定理 1(2),只需证明:$(x,y)=1\Leftrightarrow(a,b)=1$.

先证"$\Rightarrow$":因为$(x,y)=(a+b,a-c)=1$,所以$(a,b)=1$.

再证"$\Leftarrow$":因为$(a,b)=1$,所以$(2a,2b)=2$.可得$(a+b,a-b)\mid(2a,2b)$,所以$(a+b,a-b)=1$,或 2.因为 $ab=\dfrac{1}{4}n,8\mid n$,所以 $2\mid ab$.又$(a,b)=1$,所以 $2\nmid(a+b)$,所以$(a+b,a-b)=1$,即$(x,y)=1$.

再证关于解的组数的结论.

可知 $k$ 也表示$\dfrac{1}{4}n$ 的全部素因数的个数,所以由引理(2),只需证明:

对于满足条件:$a,b\in\mathbf{N}^*,(a,b)=1,ab=\dfrac{1}{4}n,b<\sqrt{\dfrac{1}{4}n}$ 的两对不全相同的数$(a_1,b_1),(a_2,b_2)$,得到的正整数解

$$\begin{cases}x=a_1+b_1\\ y=a_1-b_1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=a_2+b_2\\ y=a_2-b_2\end{cases}$$

是两组不同的解,这也是容易获证的.

由解的组数知,此时 ② 也有正整数解.

(3) 由本定理(1),(2) 及定理 1(3),只需证明:当 $2\mid n$,但 $8\nmid n$ 时,② 没有正整数解.

假设此时 ② 有正整数解,则它满足定理 1(2),且$(a+b,a-b)=1$,所以 $2\nmid a+b$,得 $2\mid ab$,即 $2\mid\dfrac{1}{4}n,8\mid n$,与 $8\nmid n$ 矛盾!说明此时 ② 没有正整数解.

## 3 运用

三边长度均为正整数的直角三角形叫做勾股形,三边互素的勾股形叫做基本勾股形,运用前面的结论,易得一条直角边为定值的(基本)勾股形的求法及个数(下面只给出关于个数的结论):

**定理 3** (1) 当 $2\nmid n$ 且 $n>1$ 时,存在以 $n$ 为一条直角边的勾股形及基本勾股形,勾股形的个数为 $\sigma_0(n^2)$,基本勾股形的个数为 $2^{k-1}$($k$ 表示 $n$ 的全部素因数的个数).

(2) 当 $2\mid n$ 且 $n>2$ 时, 存在以 $n$ 为一条直角边的勾股形, 个数为 $\sigma_0\left(\frac{1}{4}n^2\right)$;

当 $4\mid n$ 时,存在以 $n$ 为一条直角边的基本勾股形,基本勾股形的个数为 $2^{k-1}$($k$ 表示 $n$ 的全部素因数的个数);

(3) 当且仅当 $n=1,2$ 时,不存在以 $n$ 为一条直角边的勾股形;

当且仅当 $n=1$ 或($2\mid n$,但 $4\nmid n$)时,不存在以 $n$ 为一条直角边的基本勾股形.

(其中 $\sigma_0(n)$ 见定理 1 未的括号)

定理 3 与文献[2] 的结论是一致的.

## 参考文献

[1] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31.
[2] 张文忠.一直角边为定值的勾股形的个数[J].数学通讯,1996(7):25-27.

# 整边正三角形的二剖分

三边长度均为整数的三角形叫做整边三角形,三边都相等的整边三角形叫做整边正三角形.

如图1,点 $D$ 在整边正 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上,若线段 $AD$ 把 $\triangle ABC$ 分成的两个三角形($\triangle ABD$,$\triangle ACD$)都是整边三角形,则称整边正 $\triangle ABC$ 能二剖分,这种剖分叫做整边正三角形的二剖分.在图1中,若 $p,q,p-q,z\in \mathbf{N}^*$(可证 $q\neq p-q$),就记作此时把边长为 $p$ 的整边正 $\triangle ABC$ 二剖分成 $(p,q,z)$,$(p,p-q,z)$.

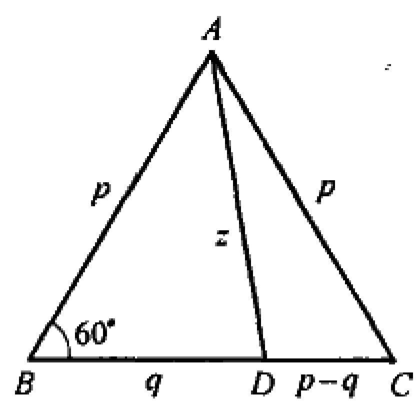



图1

关于整边正三角形的二剖分,文献[1]已得到:

**定理1** 边长为 $k^2+2k(k\in \mathbf{N}^*,k>1)$ 的整边正三角形可二剖分成 $(k^2+2k,k^2-1,k^2+k+1)$,$(k^2+2k,2k+1,k^2+k+1)$.

**定理2** 边长为素数的整边正三角形不能二剖分.

本文将深入研究"整边正三角形的二剖分"问题.

**定理3** 边长为 $p$ 的整边正三角形能二剖分的充要条件是关于 $p,q,z$ 的不定方程

$$p^2-pq+q^2=z^2(p>q) \qquad ①$$

有正整数解.

**证明** 必要性:如图1,设边长为 $p$ 的整边正 $\triangle ABC$ 能二剖分成 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$.在整边 $\triangle ABD$ 中设 $AD=z$,$BD=q$,有 $p,q,z\in \mathbf{N}^*$,$p>q$,$\angle B=60°$,由余弦定理,得 $p^2-pq+q^2=z^2$,即方程①有正整数解.

充分性:方程①有正整数解,所以图1中边长为 $p$ 的整边正 $\triangle ABC$ 内存在一条线段 $AD$(点 $D$ 在边 $BC$ 上),使得 $\triangle ABD$ 是整边三角形(从而 $\triangle ACD$ 也是整边三角形),其三边为 $(p,q,z)$($\triangle ACD$ 的三边为 $(p,p-q,z)$).

**定理4** 方程①的全部正整数解是(下面的 $a,b,c\in \mathbf{N}$,$(a,b)=1$,$b<a<2b$):

$$\begin{cases}p=c(2ab-b^2)\\q=c(a^2-b^2)\\z=c(a^2-ab+b^2)\end{cases}\quad(\text{其中 }2\nmid a+b)$$

或

$$\begin{cases}p=\dfrac{1}{3}c(2ab-b^2)\\q=\dfrac{1}{3}c(a^2-b^2)\\z=\dfrac{1}{3}c(a^2-ab+b^2)\end{cases}\quad(\text{其中 }3\mid a+b)$$

**证明** 因为 $p^2-pq+q^2=z^2, p>q, p,q,z\in\mathbf{N}^*$.所以

$$p(p-q)=(z+q)(z-q), p-q>0, z+q>0$$

所以可设 $\dfrac{p}{z+q}=\dfrac{z-q}{p-q}=\dfrac{b}{a}, a,b\in\mathbf{N}^*,(a,b)=1$,得

$$\begin{cases}ap-bq-bz=0\\bp+(a-b)q-az=0\end{cases}$$

所以 $$p:q:z=(2ab-b^2):(a^2-b^2):(a^2-ab+b^2)$$

设 $d=(2ab-b^2,a^2-b^2,a^2-ab+b^2)$,可以证得:当 $3\nmid a+b$ 时,$d=1$;当 $3\mid a+b$ 时,$d=3$,从而可得定理4成立.

在定理4的第二组解中,设 $\begin{cases}a+b=3u\\b=u+v\end{cases}$,可把定理4的第二组解变为

$$\begin{cases}p=c(u^2-v^2)\\q=c(u^2-2uv)\\z=c(u^2-uv+v^2)\end{cases}$$

(其中 $u,v,c\in\mathbf{N}^*,(u,v)=1,u>2v,3\nmid u+v$),从而可把定理4改为

**定理4′** 方程 ① 的全部正整数解是(下面的 $a,b,c\in\mathbf{N}^*,(a,b)=1$, $3\nmid a+b$):

$$\begin{cases}p=c(2ab-b^2)\\q=c(a^2-b^2)\\z=c(a^2-ab+b^2)\end{cases}\quad(\text{其中 }b<a<2b)$$

或

$$\begin{cases}p=c(b^2-a^2)\\q=c(b^2-2ab)\\z=c(a^2-ab+b^2)\end{cases}\quad(\text{其中 }b>2a)$$

由此可以得到如下的

**定理5** 边长为 $p$ 的整边正三角形能二剖分的充要条件是以下(1)或(2)成立(下面的 $a,b,c\in\mathbf{N}^*,(a,b)=1,3\nmid a+b$):

(1) 存在 $a,b,c,b<a<2b$，使 $p=bc(2a-b)$（此时的剖分为 $(p,q,z)$，$(p,p-q,z)$，其中 $q=c(a^2-b^2)$，$z=c(a^2-ab+b^2)$）.

(2) 存在 $a,b,c,b>2a$，使 $p=c(b-a)(b+a)$（此时的剖分为 $(p,q,z)$，$(p,p-q,z)$，其中 $q=c(b^2-2ab)$，$z=c(a^2-ab+b^2)$）.

**定理6** 边长为 $q^i$（$q$ 是素数，$i\in\mathbf{N}$）的整边正三角形能二剖分的充要条件是 $q=2$ 且 $i=j+3$（$j\in\mathbf{N}$），且此时的剖分为 $(2^{j+3},5\times2^j,7\times2^j)$，$(2^{j+3},3\times2^j,7\times2^j)$.

**证明** 用定理5来证.

(1) 存在 $a,b,c\in\mathbf{N}^*$，$(a,b)=1$，$3\nmid a+b$，$b<a<2b$，使 $q^i=bc(2a-b)$.

因为 $q$ 是素数，所以 $c=q^j(j\in\mathbf{N},j\leqslant i)$，$b(2a-b)=q^{i-j}$.

可证 $(b,2a-b)=(b,2)=1$ 或 2（当且仅当 $2\nmid b$ 时为1），又 $b<2a-b$，所以：

当 $2\nmid b$ 时，$b=1$，又 $b<a<2b$，得 $1<a<2$，这与 $a\in\mathbf{N}^*$ 矛盾！

当 $2\mid b$ 时，$q=2$，$b=2$，又 $b<a<2b$，所以 $a=3$，得 $p=2^{j+3}$，$q=5\times2^j$，$z=7\times2^j$.

(2) 存 $a,b,c\in\mathbf{N}^*$，$(a,b)=1$，$3\nmid a+b$，$b>2a$，使 $q^i=c(b-a)(b+a)$. 得 $c=q^j(j\in\mathbf{N},j\leqslant i)$，$(b-a)(b+a)=q^{i-j}$.

可证 $(b-a,b+a)=1$ 或 2（当且仅当 $2\nmid b-a$ 时为1），又 $b-a<b+a$，所以：

当 $2\nmid b-a$ 时，$b-a=1$，$b=a+1$ 与 $b>2a$，$a\in\mathbf{N}^*$，矛盾！

当 $2\mid b-a$ 时，$q=2$，$b-a=2$，又 $b>2a$，所以 $a=1$，得 $p=2^{j+3}$，$q=3\times2^j$，$z=7\times2^j$.

在定理5中选 $a=k+1$，$b=k$，$c=1$ 可得定理1成立；在定理6中选 $i=1$ 时可得定理2成立.

最后，本文提出如下较难解决的问题.

(1) 求边长为 $p$ 的整边正三角形的二剖分种数（即不定方程①的正整数解的组数）$G(p)$.

(2) 求边长为 $p$ 的整边正三角形的互素二剖分（指剖分成的两个整边三角形的三边长均互素）种数（即不定方程①满足 $(p,q,z)=1$ 的正整数解的组数）$G_0(p)$.

(3) 求出所有的 $p$，使 $G(p)=0$.

(4) 求出所有的 $p$，使 $G_0(p)=0$.

## 参考文献

[1] 胡久强.整边正三角形剖分[J].中学数学月刊,1998(11):18-19.

# 又一广义勾股数组

**定义**[1] 设 $a_1 < a_n, a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 是连续正整数，若 $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^2$，则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一个广义勾股数组，记作

$$(a_1, \cdots, a_k \mid a_{k+1}, \cdots, a_n)$$

拉钦斯基得到的广义勾股数组是：

$$(2l^2 + l, \cdots, 2l^2 + 2l \mid 2l^2 + 2l + 1, \cdots, 2l^2 + 3l)(l \in \mathbf{N}^*)$$

文献[1]得到$(18, \cdots, 34 \mid 35, \cdots, 42)$；

文献[2]得到$(12, \cdots, 50 \mid 51, \cdots, 63)$；$(60, \cdots, 110 \mid 111, \cdots, 135)$.

笔者还得到$(4, \cdots, 38 \mid 39, \cdots, 48)$.

请读者由这 4 个广义勾股数组发现出更一般的结论.

## 参考文献

[1] 刘正军. 一个新的广义勾股数组[J]. 中学数学教学参考,2003(8):60.
[2] 吴波. 两个新的广义勾股数组[J]. 中学数学教学参考,2004(8):61.

# 所有形如 $a^2=b+c$ 的勾股数组 $(a,b,c)$

文献[1]给出了勾股数组(3,4,5),(5,12,13)满足的规律:$3^2=4+5$,$5^2=12+13$.能否求出所有形如 $a^2=b+c$ 的勾股数组 $(a,b,c)$ 呢?这是一个有趣的问题.

即求方程组

$$\begin{cases} a^2=b+c \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \quad (a,b,c\in \mathbf{N}^*)$$

的解.

由消元法极易解决:

可得 $$a^2=b+c=c^2-b^2=(b+c)(c-b)$$

即 $$c-b=1$$

所以 $$c=b+1, a^2=b+c=2b+1$$

得 $$b=\frac{a^2-1}{2}, c=\frac{a^2+1}{2}$$

所求的解为 $$(a,b,c)=\left(a,\frac{a^2-1}{2},\frac{a^2+1}{2}\right)$$

其中 $a$ 为奇数且 $a>1$.令 $a=3,5$ 便得文献[1]举出的勾股数组(3,4,5),(5,12,13).

## 参考文献

[1] 张珊娜.课堂探索活动应该怎样去组织——两个案例的比较研究[J].中学数学,2005(7):17.

# 二次不定方程有理解的结构与整数解

从丢番图(约 246—330)时期至今,乃至以后,不定方程都是数学研究的内容,数论中的很多著名世界难题,如 Fermat 猜想,华林问题,$3x+1$ 问题(见文献[1]),都是不定方程问题.不定方程的研究包括两个方面:一是判定是否有整数解;二是有整数解时,怎样求出全部整数解.对于一次不定方程,这两方面都有完整的结论和方法;而二次不定方程,这两方面都不完整,并且一般性的结论也很少.本文在较大的范围——有理数集内研究二次不定方程($n$ 元),已得到:已知二次不定方程的一组有理解时,可求出其全部有理解(有时还要求未知数个数少一些的二次不定方程的有理解,就又要知道这个未知数少一些的二次不定方程的一组有理解),由此又研究了一般二次不定方程整数解的求法,得到全部整数解应满足的充要条件,已知二次不定方程的有理解时(一组或全部),就可得相应的齐二次不定方程的无数组整数解(不一定是全部整数解).

为了叙述简便,本文用到了矩阵表示.

## 1 矩阵的两个运算性质

高校教材《高等代数》[2] 定义了矩阵的加、减、乘及数乘运算,这些运算满足多条运算律,如矩阵可进行如下混合运算(大写字母 $A,B,\cdots$ 表矩阵,小写字母 $k,l$ 表示数).

$klABC=(kA)B(lC)$;

$(kA+B)C(lD+E)=kAC(lD+E)+BC(lD+E)=klACD+kACE+lBCD+BCE$

再给出两个本文用到的矩阵的运算性质:

$$(1)\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0\end{pmatrix}=$$

$$(b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1})\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1} \quad 0)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$(b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1})\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 若 $A_n$ 是对称阵，则 $(b_1 \quad \cdots \quad b_n)A_n\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_1 \quad \cdots \quad c_n)A_n\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

它们的证明略去.

## 2　二元二次不定方程的有理解

二元二次不定方程 $(x_1x_21)A_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$，其中

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad ①$$

(一般地，本文记号 $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，本文中的字母未指明范围时，均表示有理数).

设 $(k_1, k_2)$ 是 ① 的一组有理解，下面求 ① 异于此解的有理解 $(x_1, x_2)$.

(1) 当 $x_2 \neq k_2$ 时，设 $\dfrac{x_1 - k_1}{x_2 - k_2} = m_1$，得 $m_1 \in \mathbf{Q}$，$x_1 = m_1x_2 + k_1 - k_2m_1$.

$$(x_1x_21) = x_2(m_1 \quad 1 \quad 0) + (k_1 - k_2m_1 \quad 0 \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 - k_2m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

代入①,得

$$x_2^2(m_1 \quad 1 \quad 0)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2((m_1 \quad 1 \quad 0)A_3\begin{pmatrix} k_1 - k_2m_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$(k_1 - k_2m_1 \quad 0 \quad 1)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + (k_1 - k_2m_1 \quad 0 \quad 1)A_3\begin{pmatrix} k_1 - k_2m_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

运用性质(2),得

$$x_2^2(m_1 \quad 1 \quad 0)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2(m_1 \quad 1 \quad 0)A_3\begin{pmatrix} 2k_1 - 2k_2m_1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$$

$$(k_1 - k_2m_1 \quad 0 \quad 1)A_3\begin{pmatrix} k_1 - k_2m_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

此时方程①有解 $x_2 = k_2$,所以$(x_2 - k_2) \mid$ 上式左边,但这里求的解 $x_2 \neq k_2$,得商式为0,即

$$x_2(m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} 2k_1 - k_2m_1 \\ k_2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

(1) 当$(m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$时,$(m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} 2k_1 - k_2m_1 \\ k_2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$,此时的解为

$$\begin{cases} x_1 = m_1x_2 + k_1 - k_2m_1 \\ x_2 = \text{有理数(指任意有理数,下同)} \end{cases}$$

(2) 当$(m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$时

$$x_2 = \frac{(m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} k_2m_1 - 2k_1 \\ -k_2 \\ -2 \end{pmatrix}}{(m_1\,1\,0)A_3\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

得 $x_1 = m_1x_2 + k_1 - k_2m_1 =$

$$\frac{(m_1\ 1\ 0)A_3\begin{pmatrix}k_2m_1^2-2k_1m_1\\-k_2m_1\\-2m_1\end{pmatrix}+(m_1\ 1\ 0)A_3\begin{pmatrix}m_1(k_1-k_2m_1)\\1(k_1-k_2m_1)\\0(k_1-k_2m_1)\end{pmatrix}}{(m_1\ 1\ 0)A_3\begin{pmatrix}m_1\\1\\0\end{pmatrix}}=$$

$$\frac{(m_1\ 1\ 0)A_3\begin{pmatrix}-k_1m_1\\k_1-2k_2m_1\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ 1\ 0)A_3\begin{pmatrix}m_1\\1\\0\end{pmatrix}}=$$

$$\frac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k_1m_1\\k_1-2k_2m_1\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)A_2\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}\text{(用性质(1))}$$

此时解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k_1m_1\\k_1-2k_2m_1\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)A_2\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}\\[2ex]x_2=\dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2m_1-2k_1\\-2k_2\\-2\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)A_2\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}\end{cases}$$

($m_1\in\mathbf{Q}$,当然要使 $x_1,x_2$ 有意义,下同)

(2) 当 $x_2=k_2$ 时,得

$$a_{11}x_1^2+a_{22}k_2^2+2a_{12}x_1k_2+2a_{13}x_1+2a_{23}k_2+a_{33}=0$$

$$a_{11}k_1^2+a_{22}k_2^2+2a_{12}k_1k_2+2a_{13}k_1+2a_{23}k_2+a_{33}=0$$

所以

$$a_{11}(x_1+k_1)+2a_{12}k_2+2a_{13}=0$$

1) 当 $a_{11}=0$ 时，$a_{12}k_2+a_{13}=0$，此时的解为$\begin{cases}x_1=\text{有理数}\\x_2=k_2\end{cases}$.

2) 当 $a_{11}\neq 0$ 时，$\begin{cases}x_1=-\dfrac{a_{11}k_1+2a_{12}k_2+2a_{13}}{a_{11}}\\x_2=k_2\end{cases}$

综合，得

**定理 1** 若$\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=k_2\end{cases}$是方程①$(x_1\ x_2\ 1)A_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}=0$的一组有理解，则①的全部有理解为

$$\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=k_2\end{cases},\begin{cases}x_1=-\dfrac{a_{11}k_1+2a_{12}k_2+2a_{13}}{a_{11}}\\x_2=k_2\end{cases}\quad(\text{当 } a_{11}\neq 0 \text{ 时})$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k_1m_1\\k_1-2k_2m_1\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)A_2\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}\\[2ex] x_2=\dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2m_1-2k_1\\-k_2\\-2\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)A_2\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}\end{cases}$$

当 $a_{11}=a_{12}k_2+a_{13}=0$ 时，还有解$\begin{cases}x_1=\text{有理数}\\x_2=k_2\end{cases}$

当$(m_1\ 1)A_2\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}=(m_1\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2k_1-k_2m_1\\k_2\\2\end{pmatrix}=0$时，还有解

$$\begin{cases}x_1=m_1x_2+k_1-k_2m_1\\x_2=\text{有理数}\end{cases}$$

## 3 $n$ 元二次不定方程的有理解

**定理 2** 若 $x_i=k_i(i=1,\cdots,n)$ 是方程

$$(x_1 \quad \cdots \quad x_n \quad 1)A_{n+1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad ②$$

的一组有理解,则 ② 的全部有理解为

$$x_i = k_i(i = 1,\cdots,n)$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{11}k_1 + 2a_{12}k_2 + \cdots + 2a_{1n}k_n + 2a_{1,n+1}}{a_{11}} \\ x_2 = k_2,\cdots,x_n = k_n \end{cases} \quad (当\ a_{11} \neq 0 时)$$

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{(m_1 \cdots m_j)\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}a_{1,j+1}k_{j+1} + \cdots + a_{1n}k_n + a_{1,n+1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{1j}\cdots a_{jj}a_{j,j+1}k_{j+1} + \cdots + a_{jn}k_n + a_{j,n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_im_1 - 2k_1m_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ k_im_j - 2k_jm_i \\ -2m_i \end{pmatrix}}{(m_1 \quad \cdots \quad m_j)A_j\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ m_j \end{pmatrix}} \\ \quad (i = 1,\cdots,j;m_j = 1) \\ x_{j+1} = k_{j+1},\cdots,x_n = k_n(j = 2,\cdots,n;m_i \in \mathbf{Q}) \end{cases}$$

当 $a_{11} = a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n + a_{1,n+1} = 0$ 时,还有解 $\begin{cases} x_1 = 有理数 \\ x_2 = k_2,\cdots,x_n = k_n \end{cases}$

当 $(m_1 \quad \cdots \quad m_i)A_i\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{pmatrix} =$

$$(m_1 \quad \cdots \quad m_i)\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1i}a_{1,i+1}k_{i+1} + \cdots + a_{1n}k_n + a_{1,n+1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i1}\cdots a_{ii}a_{i,i+1}k_{i+1} + \cdots + a_{in}k_n + a_{i,n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2k_1 - k_im_1 \\ \vdots \\ 2k_i - k_im_i \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

时,还有解

$$\begin{cases} x_1 = m_1x_i + k_1 - k_im_1 \\ \quad\vdots \\ x_{i-1} = m_{i-1}x_i + k_{i-1} - k_im_{i-1} \\ x_i = 有理数 \\ x_{i+1} = k_{i+1},\cdots,x_n = k_n \end{cases}$$

$$(i = 2, \cdots, n)(m_i = 1)$$

(以上 $m_i \in \mathbf{Q}$)

**证明** 对 $n$ 用数学归纳法,类似定理 1 可证之.

## 4 求二次不定方程的有理解举例

**例 1** 求 $x_1^2 - 4x_2 - 1 = 0$ 的有理解.

**解** 该方程即

$$(x_1 \quad x_2 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 1\end{pmatrix} = 0$$

它有一组解(1,0),所以由定理 1,得其全部有理解为

$$\begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1 = -1\\ x_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m_1\\ 1\\ -2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ 1\end{pmatrix}} = \dfrac{-m_1 + 4}{m_1}\\[2ex] x_2 = \dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -2\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ 1\end{pmatrix}} = \dfrac{-2m_1 + 4}{m_1^2}\end{cases}$$

条件 $1 = 0 \times 0 + 0 = 0$ 不成立;

条件$(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ 1\end{pmatrix} = (m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 2\end{pmatrix} = 0$ 不成立;所以方程无其他解,得 $x_1^2 - 4x_2 - 1 = 0$ 的全部有理解为

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{-m_1 + 4}{m_1}\\[1ex] x_2 = \dfrac{-2m_1 + 4}{m_1^2}\end{cases} (m_1 \in \mathbf{Q}) \qquad \begin{cases}x_1 = -1\\ x_2 = 0\end{cases}$$

**例 2** 求 $x_1^2-x_4^2-4x_2x_4-2x_1+2x_3+1=0$ 的有理解.

**解** 该方程即

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&-2&0&-1&0\\-1&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\1\end{pmatrix}=0$$

它有一组解(0,0,0,1),所以由定理 2 得,其全部有理解为

$$\begin{cases}x_1=x_2=x_3=0\\x_4=1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=2\\x_2=x_3=0\\x_4=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}=\dfrac{2m_1+4}{m_1}\\ x_2=\dfrac{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}}{(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}}=\dfrac{2m_1+4}{m_1^2}\\ x_3=0\\ x_4=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\1\end{pmatrix}} = \dfrac{2m_1+4m_2-2}{m_1} \\ x_2 = \dfrac{(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2m_2\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\1\end{pmatrix}} = \dfrac{2m_1m_2+4m_2^2-2m_2}{m_1^2} \\ x_3 = \dfrac{(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\1\end{pmatrix}} = \dfrac{2m_1+4m_2-2}{m_1^2} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2m_1\\-2m_1\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\1\end{pmatrix}} = \\ \dfrac{2m_1^2+4m_1m_2-2m_1m_3+2m_1}{m_1^2-4m_2-1} = \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
x_2 &= \frac{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&-2&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2m_2\\-2m_2\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\1\end{pmatrix}} = \\
&\frac{2m_1m_2+4m_2^2-2m_2m_3+2m_2}{m_1^2-4m_2-1} = \\
x_3 &= \frac{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&-2&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2m_3\\-2m_3\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\1\end{pmatrix}} = \\
&\frac{2m_1m_3+4m_2m_3-2m_3^2+2m_3}{m_1^2-4m_2-1} = \\
x_4 &= \frac{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&-2&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\-1\\-2\end{pmatrix}}{(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\1\end{pmatrix}} = \frac{m_1^2+2m_1-2m_3+1}{m_1^2-4m_2-1}
\end{aligned}\right.$$

条件 $1=-1=0$ 不成立;

条件$(m_1\quad 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\1\end{pmatrix}=(m_1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=0$不成立；

条件$(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\1\end{pmatrix}=(m_1\ m_2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}=0$，即

$\begin{cases}m_1=0\\m_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，此时的解为$\begin{cases}x_1=0\\x_2=\dfrac{1}{2}x_3\\x_3=\text{有理数}\\x_4=1\end{cases}$.

条件$(m_1\ m_2\ m_3\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\1\end{pmatrix}=(m_1\ m_2\ m_3\ 1)$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & -2 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m_1\\-m_2\\-m_3\\1\\2\end{pmatrix}=0$$

即
$$\begin{cases}m_1^2-4m_2-1=0\\-m_1^2-2m_1+2m_3-1=0\end{cases},$$
$$\begin{cases}m_1^2-4m_2-1=0\\m_3=m_1+2m_2+1\end{cases}$$

由例1，得

$$\begin{cases}m_1=\dfrac{-l+4}{l}\\m_2=\dfrac{-2l+4}{l^2}\\m_3=\dfrac{8}{l^2}\end{cases},\quad\begin{cases}m_1=-1\\m_2=m_3=0\end{cases}$$

此时的解为 $\begin{cases} x_1 = m_1x_4 - m_1 \\ x_2 = m_2x_4 - m_2 \\ x_3 = m_3x_4 - m_3 \\ x_4 = \text{有理数} \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-l+4}{l}x_4 + \dfrac{l-4}{l} \\ x_2 = \dfrac{-2l+4}{l^2}x_4 + \dfrac{2l-4}{l^2} \\ x_3 = \dfrac{8}{l^2}x_4 - \dfrac{8}{l^2} \\ x_4 = \text{有理数} \end{cases}$，$\begin{cases} x_1 = x_4 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \text{有理数} \end{cases}$

得 $x_1^2 - x_4^2 - 4x_2x_4 - 2x_1 + 2x_3 + 1 = 0$ 的全部有理解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2m_1+4}{m_1} \\ x_2 = \dfrac{2m_1+4}{m_1^2} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-m_1+4}{m_1}x_4 + \dfrac{m_1-4}{m_1} \\ x_2 = \dfrac{-2m_1+4}{m_1^2}x_4 + \dfrac{2m_1-4}{m_1^2} \\ x_3 = \dfrac{8}{m_1^2}x_4 - \dfrac{8}{m_1^2} \\ x_4 = \text{有理数} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \text{有理数} \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \text{有理数} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2m_1+4m_2-2}{m_1} \\ x_2 = \dfrac{2m_1m_2+4m_2^2-2m_2}{m_1^2} \\ x_3 = \dfrac{2m_1+4m_2-2}{m_1^2} \\ x_4 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2m_1^2+4m_1m_2-2m_1m_3+2m_1}{m_1^2-4m_2-1} \\ x_2 = \dfrac{2m_1m_2+4m_2^2-2m_2m_3+2m_2}{m_1^2-4m_2-1} \\ x_3 = \dfrac{2m_1m_3+4m_2m_3-2m_3^2+2m_3}{m_1^2-4m_2-1} \\ x_4 = \dfrac{2m_1^2+2m_1-2m_3+1}{m_1^2-4m_2-1} \end{cases}.$$

**例3** 求 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 的有理解,设 $x_i=k_i(i=1,\cdots,n)$ 是其一组有理解.

**解** 该方程即
$$(x_1\ \cdots\ x_n\ \ 1)\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}=0$$

由定理 2 得,其全部有理解为

$$x_i=k_i(i=1,\cdots,n)\qquad\begin{cases}x_1=-k_1\\ x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_i=\dfrac{(m_1\ \cdots\ m_j)\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\vdots\\&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_im_1-2k_1m_i\\ \vdots\\ k_im_j-2k_jm_i\\ -2m_i\end{pmatrix}}{(m_1\cdots m_j)\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_j\end{pmatrix}}(i=1,\cdots,j;m_j=1)\\ x_{j+1}=k_{j+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$
$(j=2,\cdots,n)$

即
$$\begin{cases}x_i=k_i-\dfrac{2m_i(k_1m_1+\cdots+k_jm_j)}{m_1^2+\cdots+m_j^2}(i=1,\cdots,j;m_j=1)\\ x_{j+1}=k_{j+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$
$(j=2,\cdots,n;m_i\in\mathbf{Q})$

条件 $a_{11}=1=0,(m_1\cdots m_i)\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_i\end{pmatrix}=m_1^2+\cdots+m_{i-1}^2+1=0$

$(i=2,\cdots,n)$ 均不成立,所以方程无其他有理解,得

方程 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 的全部有理解为

$$\begin{cases}x_1=\pm k_1\\ x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_i=k_i-\dfrac{2m_i(k_1m_1+\cdots+k_jm_j)}{m_1^2+\cdots+m_j^2}(i=1,\cdots,j;m_j=1)\\ x_{j+1}=k_{j+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$
$$(j=2,\cdots,n;m_i\in\mathbf{Q})$$

**例4** 求方程 $x_1^2+\cdots+x_{n_1}^2=l(x_{n_1+1}^2+\cdots+x_n^2)$ 的有理解,设 $x_i=k_i$

$(i=1,\cdots,n)$ 是其一组非零有理解($k_i$ 不全为 0,下同).

**解** 该方程即$$(x_1\ \cdots\ x_{n_1}\ x_{n_1+1}\ \cdots\ x_n\ l)\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -l & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -l & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}=0$$

由定理 2 得,其全部有理解为

$$x_i=k_i(i=1,\cdots,n)\quad\begin{cases}x_1=-k_1\\ x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_i=\dfrac{(m_1\ \cdots\ m_i)\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \vdots\\ & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_im_1-2k_1m_i\\ \vdots\\ k_im_j-2k_jm_i\\ -2m_i\end{pmatrix}}{(m_1\ \cdots\ m_j)\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_j\end{pmatrix}}=\\ \qquad k_i-\dfrac{2m_i(k_1m_1+\cdots+k_jm_j)}{m_1^2+\cdots+m_i^2}(i=1,\cdots,j;m_j=1)\\ x_{j+1}=k_{j+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$
$$(j=2,\cdots,n_1;m_i\in\mathbf{Q})$$

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{(m_1 \cdots m_{n_1} m_{n_1+1} \cdots m_j)\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -l & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & & & -l & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_i m_1 - 2k_1 m_i \\ \vdots \\ k_i m_j - 2k_j m_i \\ -2m_i \end{pmatrix}}{(m_1 \cdots m_{n_1} m_{n_1+1} \cdots m_j)\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -l & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_j \end{pmatrix}} = \\ \quad k_i - \dfrac{2m_i[k_1 m_1 + \cdots + k_{n_1} m_{n_1} - l(k_{n_1+1} m_{n_1+1} + \cdots + k_j m_j)]}{m_1^2 + \cdots + m_{n_1}^2 - l(m_{n_1+1}^2 + \cdots + m_j^2)} \\ \quad (i = 1, \cdots, j; m_j = 1) \\ x_{j+1} = k_{j+1}, \cdots, x_n = k_n \end{cases}$$

$$(j = n_1 + 1, \cdots, n; m_i \in \mathbf{Q})$$

条件 $a_{11} = 1 = 0$ 不成立；

$$条件(m_1 \quad \cdots \quad m_i)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{pmatrix} =$$

$$(m_1 \quad \cdots \quad m_i)\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2k_1 - k_i m_1 \\ \vdots \\ 2k_{i-1} - k_i m_{i-1} \\ k_i \\ 2 \end{pmatrix} = 0(i = 2, \cdots, n_1) \text{ 均不成立}$$

(因为 $m_1^2 + \cdots + m_{i-1}^2 + 1 = 0$ 不成立).

$$条件(m_1 \cdots m_{n_1} m_{n_1+1} \cdots m_i)\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -l & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{pmatrix} =$$

$$(m_1\cdots m_{n_1}m_{n_1+1}+m_i)\begin{pmatrix}1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \vdots\\ & & & -l & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & -l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2k_1-k_im_1\\ \vdots\\ 2k_{i-1}-k_im_{i-1}\\ k_i\\ 2\end{pmatrix}=0$$

$(i=n_1+1,\cdots,n)$

即
$$\begin{cases}m_1^2+\cdots+m_{n_1}^2-l(m_{n_1+1}^2+\cdots+m_i^2)=0\\ m_1(2k_1-k_im_1)+\cdots+m_{n_1}(2k_{n_1}-k_im_{n_1})-l[m_{n_1+1}(2k_{n_1+1}-\\ \quad k_im_{n_1+1})+\cdots+m_{i-1}(2k_{i-1}-k_im_{i-1})+k_i]=0\\ m_1^2+\cdots+m_{n_1}^2-l(m_{n_1+1}^2+\cdots+m_{i-1}^2+1)=0\\ k_1m_1+\cdots+k_{n_1}m_{n_1}-l(k_{n_1}m_{n_1+1}+\cdots+k_{i-1}m_{i-1}+k_i)=0\end{cases}$$

$$(i=n_1+1,\cdots,n)$$

时,还有解
$$\begin{cases}x_1=m_1x_i+k_1-k_im_1\\ \quad\vdots\\ x_{i-1}=m_{i-1}x_i+k_{i-1}-k_im_{i-1}\\ x_i=\text{有理数}\\ x_{i+1}=k_{i+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

得方程 $x_1^2+\cdots+x_{n_1}^2=l(x_{n_1+1}^2+\cdots+x_n^2)$ 的全部有理解为

$$\begin{cases}x_1=\pm k_1\\ x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_i=k_i-\dfrac{2m_i(k_1m_1+\cdots+k_jm_j)}{m_1^2+\cdots+m_j^2}(i=1,\cdots,j;m_j=1)\\ x_{j+1}=k_{j+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

$$(j=2,\cdots,n_1)$$

$$\begin{cases}x_i=k_i-\dfrac{2m_i[k_1m_1+\cdots+k_{n_1}m_{n_1}-l(k_{n_1+1}m_{n_1+1}+\cdots+k_jm_j)]}{m_1^2+\cdots+m_{n_1}^2-l(m_{n_1+1}^2+\cdots+m_j^2)}\\ \quad(i=1,\cdots,j;m_j=1)\\ x_{j+1}=k_{j+1},\cdots,x_n=k_n\end{cases}$$

$$(j=n_1+1,\cdots,n)$$

当
$$\begin{cases}m_1^2+\cdots+m_{n_1}^2-l(m_{n_1+1}^2+\cdots+m_{i-1}^2+1)=0\\ k_1m_1+\cdots+k_{n_1}m_{n_1}-l(k_{n_1+1}m_{n_1+1}+\cdots+k_{i-1}m_{i-1}+k_i)=0\end{cases}$$

$$(i = n_1 + 1, \cdots, n)$$

时，还有解
$$\begin{cases} x_1 = m_1 x_1 + k_1 - k_i m_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} = m_{i-1} x_i + k_{i-1} - k_i m_{i-1} \\ x_i = \text{有理数} \\ x_{i+1} = k_{i+1}, \cdots, x_n = k_n \end{cases}$$

(以上 $m \in \mathbf{Q}$)

**注** 此方程显然有解 $x_i = 0(i = 1, \cdots, n)$，因此把它代入定理 2，得

当 $m_1^2 + \cdots + m_{n_1}^2 - l(m_{n_1+1}^2 + \cdots + m_{i-1}^2 + 1) = 0$ 时$(i = n_1 + 1, \cdots, n)$，方程的解为

$$\begin{cases} x_1 = m_1 x_i \\ \vdots \\ x_{i-1} = m_{i-1} x_i \\ x_i = \text{有理数} \\ x_{i+1} = \cdots = x_n = 0 \end{cases} \qquad (m_1, \cdots, m_{i-1} \in \mathbf{Q})$$

该方程还有零解.

此结论是无用的，因为需解不定方程 $m_1^2 + \cdots + m_{n_1}^2 - l(m_{n_1+1}^2 + \cdots + m_{i-1}^2 + 1) = 0(i = n_1 + 1, \cdots, n)$，这与解原方程的难度一样.

另外，由例 3 可得方程组 $\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_{n_1}^2 = 1 \\ x_{n_1+1}^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \end{cases}$ 的全部有理解，此解为例 4 的一部分有理解.

## 5 二次不定方程的整数解

**定理 3** 方程

$$(x_1 \quad \cdots \quad x_n x_{n+1}) A_{n+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \qquad ③$$

有非零整数解的充要条件是方程

$$(x_1 \quad \cdots \quad x_n \quad 1) A_{n+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad ④$$

有有理解，或方程

$$(x_1 \cdots x_n) A_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad ⑤$$

有非零整数解,方程③有非零整数解时就有无数组整数解,若④的全部有理解是 $x_i = r_i (i = 1, \cdots, n)$,且方程③的全部整数解满足 $\frac{x_i}{x_{n+1}} = r_i (i = 1, \cdots, n)$,或 $x_{n+1} = 0$ 且 $(x_1, \cdots, x_n)$ 满足⑤.

**定理 4** 设 $x_i = \frac{n_i}{m} (i = 1, \cdots, n; n_i \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N}^*)$ 是方程④的有理解,则 $\begin{cases} x_i = tn_i (i = 1, \cdots, n) \\ x_{n+1} = tm \end{cases} (t \in \mathbf{Z})$ 是方程③的整数解.

**定理 5** 方程④有整数解的充要条件是方程③有 $x_{n+1} = 1$ 的整数解,设③在 $x_{n+1} = 1$ 时的全部整数解是

$$\begin{cases} x_i = k_i (i = 1, \cdots, n) \\ x_{n+1} = 1 \end{cases}$$

则④的全部整数解是 $x_i = k_i (i = 1, \cdots, n)$.

上面三个定理是显然成立的,它们给出了齐二次不定方程和一般二次不定方程有整数解的充要条件及全部整数解满足的充要条件.

**定理 6** 若 $(k_1, \cdots, k_n, k_{n+1})$ 是方程 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = lx_{n+1}^2$ 的一组整数解,则其全部整数解满足

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_{n+1}} = \pm k_1 \\ \frac{x_2}{x_{n+1}} = k_2, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}} = k_n \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \frac{x_i}{x_{n+1}} = k_i - \frac{2r_i(k_1 r_1 + \cdots + k_j r_j)}{r_1^2 + \cdots + r_j^2} (i = 1, \cdots, j) \\ \frac{x_{j+1}}{x_{n+1}} = k_{j+1}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}} = k_n \end{cases}$$

$$(j = 2, \cdots, n; r_i \in \mathbf{Z}, r_j \in \mathbf{N}^*)$$

或

$$x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1} = 0$$

**证明** 当 $x_{n+1} = 0$ 时,得 $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1} = 0$

$x_{n+1} \neq 0$ 时,得

$$\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^2 = 1$$

由例 3,得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_{n+1}} = \pm k_1 \\ \dfrac{x_2}{x_{n+1}} = k_2, \cdots, \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = k_n\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x_i}{x_{n+1}} = k_i - \dfrac{2m_i(k_1m_1 + \cdots + k_jm_j)}{m_1^2 + \cdots + m_j^2}(i = 1, \cdots, j; m_j = 1) \\ \dfrac{x_{j+1}}{x_{n+1}} = k_{j+1}, \cdots, \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = k_n\end{cases}$$

$$(j = 2, \cdots, n; n \in \mathbf{Z}; m_i \in \mathbf{Q})$$

设 $m_i = \dfrac{r_i}{r_j}(i = 1, \cdots, j), r_i \in \mathbf{Z}, r_j \in \mathbf{N}^*$,代入上式,即得定理 6.

**定理 7** 设正整数 $l$ 满足:对于任意的质数 $p$,有 $p^2 \nmid l$,则方程 $x_1^2 + x_2^2 = lx_3^2$ 若有一组正整数解,就有 $(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的解,即 $x_1, x_2, x_3$ 两两互质的解,设 $(k_1, k_2, k_3)$ 是其一组互质的解,则其全部互质的解为

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{1}{d}[k_1(r_2^2 - r_1^2) - 2k_2r_1r_2] \\ x_2 = \dfrac{1}{d}[k_2(r_1^2 - r_2^2) - 2k_1r_1r_2] \\ x_3 = \dfrac{1}{d}(r_1^2 + r_2^2)\end{cases}$$

其中 $r_1 \in \mathbf{Z}, r_2 \in \mathbf{N}^*, (r_1, r_2) = 1, (2(k_1r_2 - k_2r_1), r_1^2 + r_2^2) = d$.

**证明** 得 $\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^2 = l$,由定理 6,得

(1) $\dfrac{x_1}{x_3} = k_1, \dfrac{x_2}{x_3} = k_2$,因为 $(x_1, x_2, x_3) = 1$,所以 $x_3 = 1$,得 $\begin{cases}x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2\end{cases}$,所以 $x_3 = k_3 = 1$,此时方程的正整数解是 $(k_1, k_2, k_3)$.

(2) $$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_3} = k_1 - \dfrac{2r_1(k_1r_1 + k_2r_2)}{r_1^2 + r_2^2} = \dfrac{k_1(r_2^2 - r_1^2) - 2k_2r_1r_2}{r_1^2 + r_2^2} \\ \dfrac{x_2}{x_3} = k_2 - \dfrac{2r_2(k_1r_1 + k_2r_2)}{r_1^2 + r_2^2} = \dfrac{k_2(r_1^2 - r_2^2) - 2k_1r_1r_2}{r_1^2 + r_2^2}\end{cases}$$

其中 $r_1 \in Z, r_2 \in \mathbf{N}^*$,总可设 $(r_1, r_2) = 1$.

下证 $(k_1(r_2^2 - r_1^2) - 2k_2r_1r_2, r_1^2 + r_2^2) = (k_2(r_1^2 - r_2^2) - 2k_1r_1r_2, r_1^2 + r_2^2) = (2(k_1r_2 - k_2r_1), r_1^2 + r_2^2)$.

设 $(k_1(r_2^2 - r_1^2) - 2k_2r_1r_2, r_1^2 + r_2^2) = d_1, (k_2(r_1^2 - r_2^2) - 2k_1r_1r_2, r_1^2 + r_2^2) = d_2, (2(k_1r_2 - k_2r_1), r_1^2 + r_2^2) = d_1$.

得 $d_1 \mid k_1(r_2^2 - r_1^2) - 2k_2r_1r_2 + k_1(r_1^2 + r_2^2) = 2r_2(k_1r_2 - k_2r_1)$.

假设$(d_1, r_2) = d_0 > 1$,又 $d_1 \mid r_1^2 + r_2^2$,所以 $d_0 \mid r_1^2, d_0 \mid r_2$,与$(r_1, r_2) = 1$矛盾,所以$(d_1, r_2) = 1$,得 $d_1 \mid 2(k_1r_2 - k_2r_1)$.

有 $d \mid 2r_2(k_1r_2 - k_2r_1) - k_1(r_1^2 + r_2^2) = k_1(r_2^2 - r_1^2) - 2k_2r_1r_2$,所以 $d \mid d_1$.

由 $d, d_1 \in \mathbf{N}^*$,得 $d_1 = d$,同理可证 $d_2 = d$,所以以上要证等式成立.

因为$(x_1, x_0) = (x_2, x_3) = 1$,所以定理 7 的结论成立.

**定理 8** 方程 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2$ 的全部正整数解满足

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_{n+1}} = \dfrac{-r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \\ \dfrac{x_2}{x_{n+1}} = \dfrac{2r_1r_2}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{2r_1r_n}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \end{cases} \quad (\text{其中 } r_1, \cdots, r_n \in \mathbf{N}^*)$$

且

$$\begin{cases} x_1 = -r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 \\ x_2 = 2r_1r_2 \\ \vdots \\ x_n = 2r_1r_n \\ x_{n+1} = r_1^2 + \cdots + r_n^2 \end{cases}$$

是方程 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_n^2$ 的一部分正整数解.

**证明** 在定理 6 中,令$(k_1, \cdots, k_{n+1}) = (1, 0, \cdots, 0, 1)$,得

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = k_i - \frac{2r_i(k_1r_1 + \cdots + k_nr_n)}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} = k_i - \frac{2r_ir_1}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} (i = 1, \cdots, n)$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_{n+1}} = \dfrac{-r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \\ \dfrac{x_2}{x_{n+1}} = \dfrac{-2r_1r_2}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{-2r_1r_n}{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \end{cases}$$

其中 $r_1, \cdots, r_{n-1} \in \mathbf{Z}, r_n \in \mathbf{N}^*$. 当 $x_i \in \mathbf{N}^*$ 时,可变得定理 8 的结论.

由定理 8 中 $n = 2$ 时的结论,可求得全部互质的勾股数组[3].

在定理 8 中,当 $n = 3$ 时,得

$$\begin{cases} x_1 = -r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \\ x_2 = 2r_1r_2 \\ x_3 = 2r_1r_3 \\ x_4 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \end{cases}$$

是 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ 的一部分正整数解,这与文献[4]一致.

最后说明一点,本文的研究方法不能推广到二次以上的不定方程.

读者还需研究如下问题:

(1) 任意有理系数的二次不定方程存在有理解的充要条件是怎样的?

(2) 对于任意的有理系数二次不定方程,它若有有理解,如何求出其一组有理解?

## 参考文献

[1] 洪伯阳.数论著名问题选介[J].华中师范大学学报(自然科学报,数学史专辑),1987(3):60-71.

[2] 熊庭煌.高等代数[M].武汉:中国地质大学出版社,1989.

[3] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

[4] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.

# 用因式分解法解缺平方项的二元二次不定方程

从古希腊数学家丢番图(约 246—330) 时期至今,不定方程(也叫丢番图方程) 一直是数学的研究内容,但很多不定方程的求解仍很困难,本文简述用因式分解法解不定方程.

**定义** 对于整系数不定方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(n\geqslant 2)$,若有恒等变形 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)-r$,其中 $F,F_1,F_2$ 均为整系数多项式,$r\in\mathbf{Z}$,则 $F=0$ 与 $F_1\cdot F_2=r$ 同解.把 $r$ 表示成两个整数积的形式(所有的情形):$r=a_ib_i(i=1,2,\cdots,t)$,则不定方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的全部整数解为下列 $t$ 组方程组的整数解集的并集:

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_i\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=b_i\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,t)$$

由此,可解不定方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.这种解不定方程的方法就叫做用因式分解法解不定方程.

下面给出能用因式分解法解的缺平方项的二元二次不定方程,并给出其解法及解的组数(下文中的字母均表示整数).

**定理 1** 整系数不定方程

$$axy+bx+cy+d=0(a>0,(a,b,c)=1) \qquad ①$$

能用本文定义的因式分解法解的充要条件是 $a=(a,b)\cdot(a,c)$.

**证明** 必要性.

可设 $axy+bx+cy+d\equiv(a'_1x+a'_2)(b'_1y+b'_2)-r$,得 $a=a'_1b'_1$,$b=a'_1b'_2$,$c=a'_2b'_1$,所以 $a\mid bc$.

设 $(a,b)=a_1$,$(a,c)=b_1$,由 $(a,b,c)=1$,得 $(a_1,b_1)=1$.

可设 $a=ka_1b_1$,$b=a_1b_2$,$c=a_2b_1$,得 $(ka_1,a_2)=(kb_1,b_2)=1$.

由 $a\mid bc$,得 $k\mid a_2b_2$.由 $(k,a_2)=(k,b_2)=1$,得 $k=\pm 1$.又 $a=ka_1b_1>0$,$a_1>0$,$b_1>0$,得 $k=1$.所以 $a=a_1b_1$,$b=a_1b_2$,$c=a_2b_1$,$a=(a,b)\cdot(a,c)$.

充分性.

由 $a=(a,b)\cdot(a,c)$,可设 $(a,b)=a_1$,$(a,c)=b_1$,$a=a_1b_1$,$b=a_1b_2$,$c=a_2b_1$.

所以 $$axy+bx+cy+d\equiv a_1b_1xy+a_1b_2x+a_2b_1y+d\equiv (a_1x+a_2)(b_1y+b_2)-(a_2b_2-d)=0$$

即方程 ① 可用因式分解法解.

定理 1 成立.

由定理 1 充分性的证明,还可得

**定理 2** 当 $a=(a,b)\cdot(a,c)$ 时,方程 ① 可化为同解方程 $(a_1x+a_2)(b_1y+b_2)=a_2b_2-a$,其中 $(a,b)=a_1,(a,c)=b_1,a=a_1b_1,b=a_1b_2,c=a_2b_1$.

**例** 求不定方程 $6xy-20x+9y+35=0$ 的整数解.

**解** 因为 $6=(6,-20)\cdot(6,9)$,所以可用定理 2 来解此方程.

此方程即 $(2x+3)(3y-10)=-65$,得

$$\begin{cases}2x+3=\pm1,\pm5,\pm13,\pm65\\3y-10=\mp65,\mp13,\mp5,\mp1\end{cases}$$

从而求得原方程的全部整数解为 $(x,y)=(-2,25),(1,-1),(-8,5),(31,3)$.

在定理 1 中,若 $b=c$,得 $a=1$,有

**定理 3** 方程

$$xy-a(x+y)=b(a,b\in\mathbf{Z}) \qquad ②$$

与方程

$$(x-a)(y-a)=a^2+b(a,b\in\mathbf{Z}) \qquad ③$$

同解.

下面再由定理 4 求出方程 ② 的全部整数解.

**定理 4** (1) 当 $a^2+b=0$ 时,方程 ② 的全部整数解为 $(x,y)=(a,t),(t,a)(t\in\mathbf{Z})$;

(2) 当 $a^2+b=1$ 时,方程 ② 的全部整数解为 $(x,y)=(a+1,a+1),(a-1,a-1)$;

(3) 当 $a^2+b=-1$ 时,方程 ② 的全部整数解为 $(x,y)=(a+1,a-1),(a-1,a+1)$;

(4) 当 $|a^2+b|\geqslant 2$ 时,设 $|a^2+b|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是互异的素数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in\mathbf{N}^*$),则 $|a^2+b|$ 的全部正约数的个数为 $l=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$(见文献[1]第 58 页定理 1).设 $|a^2+b|$ 的全部正约数从小到大依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_{l-1},r_l$(其中 $r_1=1,r_l=|a^2+b|$):

当 $a^2+b\geqslant 2$ 时,方程 ② 的全部整数解为 $(x,y)=(a\pm r_1,a\pm r_l),(a\pm r_2,a\pm r_{l-1}),\cdots,(a\pm r_l,a\pm r_1)$;

当 $a^2+b\leqslant-2$ 时，方程 ② 的全部整数解为 $(x,y)=(a\pm r_1,a\mp r_l)$，$(a\pm r_2,a\mp r_{l-1}),\cdots,(a\pm r_l,a\mp r_1)$.

由定理 4 容易得到方程 ② 的整数解组数的奇偶性：

**定理 5** (1) 当且仅当 $a^2+b=0$ 时，方程 ② 有无数组整数解；

(2) 当 $a^2+b\neq0$ 时，方程 ② 有有限组整数解，且为偶数组.

从对称的观点也可得到与定理 5 相同的结论：

显然，方程 ② 的解关于 $x,y$ 对称，即 $(x,y)=(s,t)$ 是方程 ② 的解时，$(x,y)=(t,s)$ 也是方程 ② 的解. 由此知解的组数有三种情形：无数组整数解(得 $a^2+b=0$)；有限组整数解(得 $a^2+b\neq0$)，且没有 $x=y$ 的整数解，此时整数解为偶数组；有限组数整数解，且有 $x=y$ 的整数解，此时 $a^2+b$ 为完全平方数，可得满足 $x=y$ 的整数解有两组：$x=y=a\pm\sqrt{a^2+b}$(因为 $a^2+b\neq0$)，所以此时也为偶数组整数解.

由定理 5 知，文献[1]第 85 页说"方程 ② 如无 $x,y$ 均为零的整数解，则解的组数必为偶数"是错误的(② 无 $x,y$ 均为零的整数解即 $b\neq0$ 时仍可用定理 5 判断 ② 的整数解的组数的奇偶性：有无数组或偶数组两种情形).

## 参考文献

[1] 梅向明. 初等数论(初中册 · 中学数学奥林匹克丛书)[M]. 北京：北京师范学院出版社，1988.

# 一类不定方程有正整数解的充要条件

本文给出关于 $x,y$ 的不定方程

$$x^2+dy^2=(p^2+dq^2)^n(|d|,p,q,n\in\mathbf{N}^*) \quad ①$$

有正整数解的充要条件.

**引理** $a^2(a\in\mathbf{N}^*)$ 能表示成两个正整数的平方和的充要条件是 $a$ 含有 $4t+1(t\in\mathbf{N}^*)$ 形素因数.

**证明** 充分性.若 $a$ 含有 $4t+1$ 形素因数 $p$,则可设 $a=pa_1(a_1\in\mathbf{N}^*)$,因为 $4t+1$ 形素因数能唯一的表示成两个整数的平方和(见文献[1]第196页),所以存在 $r,s\in\mathbf{N}^*$,且 $r\neq s$,使 $p=r^2+s^2$,得

$$p^2=(r^2-s^2)^2+(2rs)^2$$

所以 $$a^2=[a_1(r^2-s^2)]^2+(2a_1rs)^2(a_1(r^2-s^2),2a_1rs\in\mathbf{N}^*)$$

即 $a^2$ 能表示成两个正整数的平方和.

必要性.只需证明关于 $x,y,z$ 的不定方程

$$x^2+y^2=z^2(x,y,z\in\mathbf{N}^*,z\text{ 不含 }4t+1\text{ 形素因数}) \quad ②$$

无解.

可以只证 ② 没有 $(x,y)=1$ 的解.

假设 ② 有 $(x,y)=1$ 的解,且 $z$ 最小,得 $z>1,z^2>z$.

由求勾股数组的定理[2],得 $z=x_1^2+y_1^2(x_1,y_1\in\mathbf{N}^*,2\nmid x_1+y_1,(x_1y_1)=1)$,所以 $2\nmid z$.又 $z$ 不含 $4t+1$ 形素因数,$z>1$,所以 $z$ 是若干个相同或不同的 $4t-1$ 形素数之积,由正整数能表示成两个整数的平方和的充要条件(见文献[1]第104页),得 $z=z_1^2,x_1^2+y_1^2=z_1^2$,所以 ② 又有解 $(x_1,y_1,z_1)$,但 $z_1^2=z<z^2,z_1<z$,这与 $z$ 最小矛盾!所以 ② 无解.

**定理1** ① 有正整数解的充要条件是 $p^2\neq dq^2$,或 $p$ 含有 $4t+1$ 形素因数,或 $2\nmid n$.

**证明** 必要性.我们证明:① 有正整数解时,若 $p^2=dq^2$ 且 $2\mid n$,则 $p$ 含有 $4t+1$ 形素因数.

因为 $p^2=dq^2,2\mid n$,所以可设 $d=d_1^2,p=d_1q,n=2m(d_1,m\in\mathbf{N}^*)$,此时 ① 即 $x^2+d_1y^2=(2^md_1^{2m}q^{2m})^2$.

可设 $x=d_1x_1(x_1\in\mathbf{N}^*)$,得

$$x_1^2 + y^2 = (2^m d_1^{2m-1} q^{2m})^2$$

有正整数解,由引理得 $p(p = d_1 q)$ 含有 $4t+1$ 形素因数.

充分性.容易验证:当 $n = 2m - 1(m \in \mathbf{N}^*)$ 时

$$\begin{cases} x = |p(p^2 + dq^2)^{m-1}| \\ y = |q(p^2 + dq^2)^{m-1}| \end{cases}$$

是 ① 的解;

当 $n = 2m(m \in \mathbf{N}^*)$ 时

$$\begin{cases} x = |(p^2 - dq^2)^2(p^2 + dq^2)^{m-1}| \\ y = |2pq(p^2 + dq^2)^{m-1}| \end{cases}$$

是 ① 的解;

当 $p^2 + dq^2 = 0$ 时,① 有正整数解 $(p, q)$.

从而,可得以下结论:

(1) 当 $p^2 \neq dq^2$ 时,① 有正整数解;

(2) 当 $2 \nmid n$ 时,① 有正整数解;

(3) 当 $p^2 = dq^2, 2 \mid n, p$ 含有 $4t+1$ 形素因数时,可设 $d = d_1^2, p = d_1 q$, $n = 2m(d_1, m \in \mathbf{N}^*)$,此时 ① 即

$$x^2 + d_1^2 y^2 = (2^m d_1^{2m} q^{2m})^2 \qquad ③$$

因为 $p(p = d_1 q)$ 含有 $4t+1$ 形素因数,所以存在 $a, b \in \mathbf{N}^*$,使 $a^2 + b^2 = (2^m d_1^{2m-1} q^{2m})^2$,从而得 ③ 即 ① 有正整数解 $(d_1 a, b)$.

充分性成立,得定理 1 成立.

运用本文的引理,可把文献[3] 的定理 1 改述为:

关于 $x, y$ 的不定方程 $x^2 + dy^2 = (p^2 + dq^2)^n(|d|, p, q \in \mathbf{N}^*, p^2 + dq^2 \neq 0)$ 对于一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒有正整数解的充要条件是 $p^2 \neq dq^2$,或 $p$ 含有 $4t+1$ 形素因数.

(文献[3] 的充要条件是 $p^2 \neq dq^2$,或 $pq$ 含有 $4t+1$ 形素因数,即 $p^2 \neq dq^2$,或($p^2 = dq^2$ 且 $pq$ 含有 $4t+1$ 形素因数,即 $p^2 \neq dq^2$,或 $p$ 含有 $4t+1$ 形素因数).)

由本文的定理 1 易知上述结论成立,所以本文定理 1 是上述结论的推广.

**定理 2** 设 $|d|, p_i, q_i \in \mathbf{N}^*, p_i^2 \neq dq_i^2 (i = 1, 2, \cdots, m)$,则关于 $x, y$ 的不定方程 $x^2 + dy^2 = \prod_{i=1}^{m}(p_i^2 + dq_i^2)$ 有正整数解.

**证明** 对 $m$ 用数学归纳法来证.

$m = 1$ 时成立.

假设 $m=k-1$ 时成立,则存在 $a,b\in\mathbf{N}^*$,使 $a^2+db^2=\prod_{i=1}^{k-1}(p_i^2+dq_i^2)$.

所以 $\prod_{i=1}^{k}(p_i^2+dq_i^2)=(a^2+db^2)(p_k^2+dq_k^2)=(ap_k\pm dbq_k)^2+d(aq_k\mp bp_k)^2$.

不会出现 $ap_k-dbq_k=aq_k-bp_k=0$ 的情形(否则可得 $p_k^2=dq_k^2$,这与题设矛盾),说明 $m=k$ 时成立.所以定理 2 成立.

由本文的定理 2,可得文献[3] 的定理 2 成立(因为 $\sqrt{d}\notin\mathbf{N}^*$,所以在职在 $p_i,q_i\in\mathbf{N}^*$,使 $c_i^{n_i}=p_i^2+dq_i^2$,且 $p_i^2\neq dq_i^2$.由本文的定理 2 知,文献[3] 的定理 2 成立).

**推论** 设 $|d|,p_i,q_i,n_i\in\mathbf{N}^*$,关于 $x,y$ 的不定方程 $x^2+dy^2=(p_i^2+dq_i^2)^{2n_i}(i=1,2,\cdots,m)$ 均有正整数解,则关于 $x,y$ 的不定方程 $x^2+dy^2=\prod_{i=1}^{m}(p_i^2+dq_i^2)^{2n_i}$ 有正整数解.

**证明** 由定理 2,只需证明:

存在 $a,b\in\mathbf{N}^*$,使 $a^2+db^2=(p_i^2+dq_i^2)^{2n_i}$ 时,$a^2\neq db^2$.

假设 $a^2=db^2$,得 $2a^2=(p_i^2+dq_i^2)^{2n_i}$,$\sqrt{2}\in\mathbf{N}^*$,这不可能!所以推论成立.

**定理 3** 关于 $x,y$ 的不定方程 $cx^2+dy^2=(cp^2+dq^2)^{2m-1}(c,d\in\mathbf{Z},p,q,m\in\mathbf{N}^*)$ 有正整数解.

**证明** 当 $cp^2+dq^2=0$ 时,上述方程有正整数解 $(p,q)$.

当 $cp^2+dq^2\neq 0$ 时,上述方程有正整数解 $(|p(cp^2+dq^2)^{m-1}|,|q(cp^2+dq^2)^{m-1}|)$.

所以定理 3 成立.

## 参考文献

[1] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.

[2] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.

[3] 简超.一类不定方程恒有正整数解的条件[J].数学通讯,1997(1):28-29.

# 费马猜想研究

## 1 引言及已有的结论

1637 年,法国业余数学大师费马(Fermat,1601—1665) 提出:

当整数 $n > 2$ 时,方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解.

这就是闻名全球的"费马猜想".由于长时间不能解决,所以更多的人称它为"费马最后定理".关于此猜想,已得到以下结论:

(1) 因为 $n > 2$,所以 $n$ 能被 4 或一个奇素数整除,因而只需证明 $n = 4$ 及 $n$ 为任意奇素数时猜想成立即可.费马本人用无限递降法已证得 $n = 4$ 时猜想成立,所以只需证 $n$ 为任意奇素数时均成立即可.[1]

(2) 若方程 $x^n + y^n = z^n$($n$ 是奇素数) 有正整数解,则它有 $x,y,z$ 两两互素的正整数解$(x,y,z)$,且 $x + y = a^n$ 或$n(x + y) = a^n(a \in \mathbf{N}^*)$.

**证明** 设方程 $x^n + y^n = z^n$($n$ 是奇素数) 有正整数解,则它有$(x,y,z) = 1$ 的解,还可证有 $x,y,z$ 两两互素的正整数解$(x,y,z)$.

$$x^n + y^n = z^n$$

$$[(x + y) - y]^n + y^n = z^n$$

$$(x + y)^n - C_n^1(x + y)^{n-1}y + \cdots - C_n^{n-2}(x + y)^2y^{n-2} + C_n^{n-1}(x + y)y^{n-1} = z^n \quad ①$$

$$(x + y)^{n-1} - C_n^1(x + y)^{n-2}y + \cdots - C_n^{n-2}(x + y)y^{n-2} = \frac{z^n}{x + y} - ny^{n-1} \quad ②$$

由 $n$ 是素数,得 $n \mid C_n^1,\cdots,n \mid C_n^{n-2}$.

设$\left(\frac{z^n}{x + y},x + y\right) = d$,由 ② 得,$d \mid ny^{n-1}$,所以 $d \mid (ny^{n-1},x + y)$.

由$(x,y) = 1$,得$(x + y,y^{n-1}) = 1$,$d \mid (n,x + y)$,$d = 1$或 $n$.

当 $d = 1$ 时,$\left(\frac{z^n}{x + y},x + y\right) = 1$,所以 $x + y = a^n(a \in \mathbf{N}^*)$.

此时,由 ② 知 $n \nmid x + y$(若 $n \mid x + y$,则 $n \left| \frac{z^n}{x + y} \right.$,与$\left(\frac{z^n}{x + y},x + y\right) = 1$ 矛盾),又由 ① 得 $n \nmid z$.

当 $d = n$ 时,$\left(\frac{z^n}{x + y},x + y\right) = n$,由 ② 得 $n \left| \frac{z^n}{x + y} \right.$(因为可证此时 $n \nmid y$),

所以$\left(\frac{z^n}{n(x+y)}, n(x+y)\right)=1$,所以$n(x+y)=a^n(a\in \mathbf{N}^*)$,此时$n\mid z$.

同理有,当$n\nmid x$时,$z-y=b^n$;当$n\mid x$时,$n(z-y)=b^n$.当$n\nmid y$时,$z-x=c^n$;当$n\mid y$时,$n(z-x)=c^n$.其中$b,c\in \mathbf{N}^*$.

所以当$n\nmid xyz$时,$x+y=a^n$,$z-y=b^n$,$z-x=c^n$,有$(2x)^n+(2y)^n=(2z)^n$,所以

$$(a^n+b^n-c^n)^n+(a^n-b^n+c^n)^n=(a^n+b^n+c^n)^n$$

其中$a,b,c\in \mathbf{N}^*$,两两互素,$n\nmid abc$.

由此继续研究猜想:是困难的.

(3)1983年,29岁的西德数学家Faltings证明了Mordell猜想,由此可知方程$x^n+y^n=z^n(n\geqslant 4)$最多只有有限组$x,y,z$两两互素的正整数解.这是对费马猜想的重大突破.

(4)上限$n$的推进,用计算机的帮助,1987年证得,当$2<n\leqslant 41\ 000\ 000$时猜想成立.[1]

有关费马猜想的另外一些详细情况,读者还可阅读文献[2]第十章《固若金汤的城堡》.

大多数学爱好者对费马猜想都产生过兴趣,终因难度大而放弃.近年来[3],我国数学工作者从历史的反思中找到了思维的突破口,他们一反常规,把$x,y,z$当作常数,把$n$当作未知数,将$n$为指数的不定方程看作$n$为未知数的方程,不知从这里出发能有何进展?

可喜的是,1994年9月19日,英国数学家怀尔斯(A.Wiles)给出了费马猜想的证明,发表在1995年5月的《数学年刊》上,怀尔斯因此获得了1996年的沃尔夫奖和1998年的菲尔兹奖.[4]

下文是笔者早年对费马猜想的研究.

## 2 $x^n+y^n$与$z^n$的大小关系研究

笔者认为可以从寻找"$x^n+y^n$与$z^n$的大小关系"来研究"费马猜想",给出了它们的大小关系后就能明确判别能否相等,何时相等,这比猜想本身更进一层.当然这样的研究是比较困难的,本文得到了部分结论(下文中未注明的字母均表示正整数,研究$x^n+y^n$与$z^n$的大小关系可只看$x<y<z$的情形).

**定理1** 若$n\geqslant 3$,$x<2n$,$x<y<z$,则$x^n+y^n<z^n$.

**证明** 先证$x^n+(x+1)^n<(x+2)^n$.

即证
$$[(x+1)-1]^n+(x+1)^n<[(x+1)+1]^n$$

$$(x+1)^n-\mathrm{C}_n^1(x+1)^{n-1}+\mathrm{C}_n^2(x+1)^{n-2}-\cdots<\mathrm{C}_n^1(x+1)^{n-1}+$$
$$\mathrm{C}_n^2(x+1)^{n-2}+\cdots(x+1)^n<2\mathrm{C}_n^1(x+1)^{n-1}+2\mathrm{C}_n^3(x+1)^{n-3}+\cdots$$

因为 $n \geqslant 3$,所以只证

$$(x+1)^n \leqslant 2C_n^1(x+1)^{n-1}$$

$$x \leqslant 2n-1$$

即

$$x < 2n$$

这是已知条件,所以 $x^n+(x+1)^n<(x+2)^n$ 成立.

由此不等式易证

$$x^n+(x+k)^n<(x+k+1)^n$$

即 $x^n+[(x+1)+(k-1)]^n<[(x+2)+(k-1)]^n$ 用二项式定理展开可证.

因为 $x<y<z$,所以可设 $y=x+k, z \geqslant x+k+1$,得

$$x^n+y^n=x^n+(x+k)^n<(x+k+1)^n \leqslant z^n$$

即

$$x^n+y^n<z^n$$

**定理 2** 设常数 $t \geqslant 2, tn \leqslant x \leqslant (t+1)n$,当 $x$ 充分大时(指大于一指定常数),$x<y<z, z \geqslant y+t$,则 $x^n+y^n<z^n$.

**证明** 得 $\dfrac{1}{t+1} \leqslant \dfrac{n}{x} \leqslant \dfrac{1}{t}, t \geqslant 2$.

因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{t+1}{x}\right)^{\frac{x}{t+1}}=\mathrm{e}=2.718\ 281\ 8\cdots$$

所以当 $x$ 充分大时

$$1+\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \leqslant 1+\sqrt{\mathrm{e}}<2.65<\left(1+\frac{t+1}{x}\right)^{\frac{x}{t+1}}$$

得

$$1+\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{n}{x}} \leqslant 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}<\left(1+\frac{t+1}{x}\right)^{\frac{x}{t+1}} \leqslant \left[\left(1+\frac{t+1}{x}\right)^{\frac{x}{t+1}}\right]^{\frac{n}{x}(t+1)}$$

即

$$1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^n<\left(\frac{x+t+1}{x}\right)^n$$

$$x^n+(x+1)^n<(x+t+1)^n$$

由此可证

$$x^n+(x+k)^n<(x+k+t)^n$$

即 $x^n+[(x+1)+(k-1)]^n<[(x+t+1)+(k-1)]^n$ 用二项式定理展开可证.

因为

$$x<y<z, z \geqslant y+t$$

所以可设

$$y=x+k, z \geqslant x+k+t$$

得

$$x^n+y^n=x^n+(x+k)^n<(x+k+t)^n \leqslant z^n$$

即

$$x^n+y^n<z^n$$

下面给出定理 2 的几种具体情形.

**推论 1**　(1) 若 $n \geqslant 20, x = 2n, x < y < z$,则 $x^n + y^n < z^n$;

(2) 若 $2n \leqslant x \leqslant 3n, 60 \leqslant x < y < z, z \geqslant y + 2$,则 $x^n + y^n < z^n$;

(3) 若 $3n \leqslant x \leqslant 4n, 14 \leqslant x < y < z, z \geqslant y + 3$,则 $x^n + y^n < z^n$.

**证明**　(1) $1 + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = 1 + \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 1 + e^{\frac{1}{2}} < 2.65 < \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(这里用到 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 严格递增.)

即
$$1 + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
得
$$(2n)^n + (2n + 1)^n < (2n + 2)^n (n \geqslant 20)$$
由此可证
$$(2n)^n + (2n + k)^n < (2n + k + 1)^n$$
因为 $x = 2n, x < y < z$,所以可设 $y = 2n + k, z \geqslant 2n + k + 1$.

得
$$x^n + y^n = (2n)^n + (2n + k)^n < (2n + k + 1)^n \leqslant z^n$$
即
$$x^n + y^n < z^n$$

(2) 得 $\frac{1}{3} \leqslant \frac{n}{x} \leqslant \frac{1}{2}$.

$$1 + \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{n}{x}} \leqslant 1 + e^{\frac{1}{2}} < 2.648\,722 < \left(1 + \frac{3}{60}\right)^{\frac{60}{3}} \leqslant$$
$$\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \leqslant \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3n}{x}}$$
即
$$1 + \left(\frac{x + 1}{x}\right)^n < \left(\frac{x + 3}{x}\right)^n$$
$$x^n + (x + 1)^n < (x + 3)^n$$
由此可证
$$x^n + (x + k)^n < (x + k + 2)^n$$
因为 $x < y < z, z \geqslant y + 2$,所以可设 $y = x + k, z \geqslant x + k + 2$,得
$$x^n + y^n = x^n + (x + k)^n < (x + k + 2)^n \leqslant z^n$$
即
$$x^n + y^n < z^n$$

(3) 得 $\frac{1}{4} \leqslant \frac{n}{x} \leqslant \frac{1}{3}$.

$$1 + \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{n}{x}} \leqslant 1 + e^{\frac{1}{3}} < 2.395\,7 <$$
$$\left(1 + \frac{4}{14}\right)^{\frac{14}{4}} \leqslant \left[\left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{4n}{x}}$$
即
$$1 + \left(\frac{x + 1}{x}\right)^n < \left(\frac{x + 4}{x}\right)^n$$

$$x^n+(x+1)^n<(x+4)^n$$

同理可证得 $x^n+y^n<z^n$.

**推论 2** 当 $x$ 充分大时,有

(1) 又 $x\in[2n,3n]$ 时,$x^n+(x+1)^n<(x+3)^n$;

(2) 又 $x\in[3n,4n]$ 时,$(x+2)^n<x^n+(x+1)^n<(x+4)^n$;

(3) 又 $x\in[4n,6n]$ 时,$(x+3)^n<x^n+(x+1)^n<(x+5)^n$;

(4) 又 $x\in[6n,7n]$ 时,$(x+4)^n<x^n+(x+1)^n<(x+6)^n$;

(5) 又 $x\in[7n,8n]$ 时,$(x+5)^n<x^n+(x+1)^n<(x+7)^n$;

(6) 又 $x\in[8n,9n]$ 时,$(x+6)^n<x^n+(x+1)^n<(x+7)^n$;

(7) 又 $x\in[9n,10n]$ 时,$(x+6)^n<x^n+(x+1)^n<(x+8)^n$.

**定理 3** 设 $x\geqslant tn$,$x$ 充分大,则

$$\left(x+\frac{2}{3}t\right)^n<x^n+(x+1)^n$$

**证明** 得 $\frac{tn}{x}\leqslant 1$,由 $e^{\frac{2}{3}}<2$,得

$$\left(1+\frac{\frac{2}{3}t}{x}\right)^n=\left[\left(1+\frac{\frac{2}{3}t}{x}\right)^{\frac{x}{\frac{2}{3}t}}\right]^{\frac{\frac{2}{3}t}{x}n}\leqslant e^{\frac{2}{3}}<x<1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

即

$$\left(\frac{x+\frac{2}{3}t}{x}\right)^n<1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^n$$

$$\left(x+\frac{2}{3}t\right)^n<x^n+(x+1)^n$$

**推论 3** 设 $x\geqslant tn$,$x$ 充分大,$x<y<z\leqslant x+\frac{2}{3}t$,则 $x^n+y^n>z^n$.

**定理 4** 设 $tn\leqslant x\leqslant(t+1)n$,$x$ 充分大,常数 $t$ 满足 $1+e^{\frac{1}{t}}<e^{\frac{7}{10}\cdot\frac{t}{t+1}}$(当 $t$ 充分大时,此不等式可成立,因为左边 $\to 2$,右边 $\to e^{\frac{7}{10}}=2.013\cdots$),则

$$x^n+(x+1)^n<\left(x+\frac{7}{10}t\right)^n$$

**证明** $1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^n=1+\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{n}{x}}\leqslant 1+e^{\frac{1}{t}}<e^{\frac{7}{10}\cdot\frac{t}{t+1}}\leqslant$ $\left[\left(1+\frac{\frac{7}{10}t}{x}\right)^{\frac{x}{\frac{7}{10}t}}\right]^{\frac{7}{10}\cdot\frac{tn}{x}}=\left(\frac{x+\frac{7}{10}t}{x}\right)^n$

即

$$x^n+(x+1)^n<\left(x+\frac{7}{10}t\right)^n$$

**推论 4**　在定理 4 的条件下，又 $x < y < z, z \geq y + \frac{7}{10}t - 1$，则 $x^n + y^n < z^n$.

还应继续研究 $x^n + y^n$ 与 $z^n$ 的大小关系.

## 参考文献

[1] 洪伯阳. 数论著名问题选介[J]. 华中师范大学学报(自然科学版，数学史专辑)，1987(3)：60-71.

[2] 单墫. 趣味数论[M]. 北京：中国青年出版社，1987.

[3] 田宪生. 从"费尔马猜想"的证明看思维技巧[J]. 数学通讯，1989(2)：25-26.

[4] 罗建宇. 费马大定理[J]. 高中数学教学，2007(12)：39-40.

# 不定方程 $2x^2+y^2=z^2$ 与 $x^2+y^2=2z^2$ 中有未知数为平方数的正整数解研究

首先约定,本文中表示数的字母均取正整数值,因而所有方程(组)的解均指正整数解.

## 1 引言、引理

**引理1** 不定方程 $x^2+y^2=z^2$($x,y,z$ 两两互素)的全部解是

$$\begin{cases}x=2mn\\y=m^2-n^2\\z=m^2+n^2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=m^2-n^2\\y=2mn\\z=m^2+n^2\end{cases}$$

其中 $m>n,(m,n)=1,2\nmid m+n$.(见文献[1]第268页)

**引理2** 不定方程 $2x^2+y^2=z^2$($x,y,z$ 两两互素)的全部解是

$$\begin{cases}x=2mn\\y=|m^2-2n^2|\\z=m^2+2n^2\end{cases}$$

其中 $(m,n)=1,2\nmid m$.

**证明** 因为 $2x^2+y^2=z^2$($x,y,z$ 两两互素),所以 $x$ 偶,$y,z$ 奇(指 $x$ 为正偶数,$y,z$ 均为正奇数,下同).

因为 $(z+y,z-y)\mid(2z,2y),(2z,2y)=2$,所以 $(z+y,z-y)=2$.

有 $2x^2=(z+y)(z-y)$,所以

$$\begin{cases}z+y=2m^2\\z-y=4n^2\\x=2mn\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}z+y=4n^2\\z-y=2m^2\\x=2mn\end{cases}$$

其中 $(m,n)=1,2\nmid m$.

得

$$\begin{cases}x=2mn\\y=m^2-2n^2\\z=m^2+2n^2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=2mn\\y=2n^2-m^2\\z=m^2+2n^2\end{cases}$$

因为 $y\in\mathbf{N}^*$,所以 $y=|m^2-2n^2|$,从而可得引理2成立.

**引理 3**[2] 不定方程 $x^2+y^2=2z^2$($x,y,z$ 两两互素)的全部正整数解是

$$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x=m^2-n^2+2mn\\y=|m^2-n^2-2mn|\\z=m^2+n^2\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x=|m^2-n^2-2mn|\\y=m^2-n^2+2mn\\z=m^2+n^2\end{cases}$$

其中 $m>n,(m,n)=1,2\nmid m+n$(这三组解分别是 $x=y,x>y,x<y$ 的情形).

**引理 4**[2] (两对互素数的积相等的条件)若$(a,b)=(c,d)=1,ab=cd$,则可设 $a=a_1d_1,b=c_1d_2,c=c_1d_1,d=a_1d_2$,且 $a_1,c_1,d_1,d_2$ 两两互素.

$x^2+y^2=z^2$ 中有未知数为平方数的正整数解已有完整的结果.只有一个未知数为平方数时,得两个方程 $x^4+y^2=z^2,x^2+y^2=z^4$,它们均有正整数解,由引理 1 可求出其全部解,只有两个未知数为平方数时,也得两个方程 $x^4+y^4=z^2,x^4+y^2=z^4$,文献[1]第 272 ~ 274 页已证得它们均无正整数解,从而 $x^4+y^4=z^4$ 也无正整数解.

本文研究不定方程 $2x^2+y^2=z^2$ 与 $x^2+y^2=2z^2$ 中有未知数为平方数的正整数解.只有一个未知数为平方数时,得方程 $2x^4+y^2=z^2,2x^2+y^4=z^2,2x^2+y^2=z^4,x^4+y^2=2z^2,x^2+y^2=2z^4$,它们均有解,由引理 1,2,3 可求出其全部解(先求出 $x,y,z$ 两两互素的解).

$2x^2+y^2=z^2$ 与 $x^2+y^2=2z^2$ 中有两个未知数为平方数时,得方程 ①$2x^4+y^4=z^2$,②$2x^2+y^4=z^4$,③$2x^4+y^2=z^4$,④$x^4+y^4=2z^2$,⑤$x^4+y^2=2z^4$,下面研究它们的解.

## 2 方程①,②无解,④只有平凡解

**定理 1** 方程 ①$2x^4+y^4=z^2$ 没有正整数解.

**证明** 假设①有解$(x,y,z)$,设$(x,y,z)=d$,得 $d^4\mid z^2$,所以$\frac{z}{d^2}\in\mathbf{N}^*$,

$2\left(\frac{x}{d}\right)^4+\left(\frac{y}{d}\right)^4=\left(\frac{z}{d^2}\right)^2$,即(1)有正整数解$\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d^2}\right)$.

因为$\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d}\right)=1$,所以$\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d^2}\right)=1$.

得①有$(x,y,z)=1$的解.由$(x,y,z)=1$还可证得$x,y,z$两两互素,且$x$偶,$y,z$奇,设$(x,y,z)$是满足这些条件的一组解,且$z$最小.

得
$$2x^4=(z+y^2)(z-y^2)$$
可证
$$(z+y^2,z-y^2)=2$$
所以
$$(1)\begin{cases}z+y^2=2r^4\\z-y^2=s^4\end{cases}$$
或
$$(2)\begin{cases}z+y^2=s^4\\z-y^2=2r^4\end{cases}$$
其中$r$奇,$s$偶,$(r,s)=1$.

由(1)得
$$2y^2=2r^4-s^4$$
$$s^4=2(r^2+y)(r^2-y)$$
因为$z+y^2=2r^4,(y,z)=1$,所以$(r,y)=1,(r^2+y,r^2-y)=2$.
$$\begin{cases}r^2+y=2r_1^4\\r^2-y=4s_1^4\end{cases}$$
或
$$\begin{cases}r^2+y=4s_1^4\\r^2-y=2r_1^4\end{cases}$$
其中$r_1$奇,$(r_1,s_1)=1$.

均得$2s_1^4+r_1^4=r^2$,由$(r_1,s_1)=1$可得$s_1,r_1,r$两两互素,即①还有解$(s_1,r_1,r)$,但$r<z$(由$2x^4+y^4=z^2$得$y^2<z$,又$z+y^2=2r^4$,所以$2r^4<2z$,$r<z$),这与$z$最小矛盾!此时①无解.

由(2)得$s^4=2(y^2+r^4)$,设$s=2s_0$,得$8\mid y^2+r^4$,而$2\parallel y^2+(r^2)^2$(因为$y,r$奇),矛盾!此时①也无解.

**定理2** 方程②$2x^2+y^4=z^4$没有正整数解.

**证明** 假设②有解,必有$x,y,z$两两互素的解$(x,y,z)$,设$x$最小.

由定理2,得
$$\begin{cases}x=2mn\\y^2=\mid m^2-2n^2\mid\\z^2=m^2+2n^2\end{cases}$$
其中$m$奇,$(m,n)=1$.
$$(1)\begin{cases}y^2=m^2-2n^2\\z^2=m^2+2n^2\end{cases}\quad 或\quad (2)\begin{cases}y^2=2n^2-m^2\\z^2=m^2+2n^2\end{cases}$$
由(1)得$2n^2+y^2=m^2$,$\begin{cases}n=2rs\\m=r^2+2s^2\end{cases}$,其中$r$奇,$(r,s)=1$.又$2n^2+m^2=$

$z^2$,得$\begin{cases} n = 2ab \\ m = |a^2 - 2b^2| \end{cases}$,其中 $a$ 奇,$(a,b) = 1$,所以

$$\begin{cases} ab = rs \\ a^2 - r^2 = 2(b^2 + s^2) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} ab = rs \\ a^2 + r^2 = 2(b^2 - s^2) \end{cases}$$

其中 $a,r$ 奇,$(a,b) = (r,s) = 1$.

因为 $ab = rs, a, r$ 奇,$(a,b) = (r,s) = 1$,所以由引理 4,得 $a = a_1d_1$, $b = c_1d_2, r = c_1d_1, s = a_1d_2$,且 $a_1, c_1, d_1, d_2$ 两两互素,$a_1, c_1, d_1$ 奇.

当 $a^2 - r^2 = 2(b^2 + s^2)$ 时,得

$$(a_1^2 - c_1^2)d_1^2 = 2(c_1^2 + a_1^2)d_2^2$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a_1^2 - c_1^2)}{\frac{1}{2}(a_1^2 + c_1^2)} = \frac{2d_2^2}{d_1^2}$$

由$(a_1, c_1) = 1, a_1, c_1$ 奇,得

$$\left(\frac{1}{2}(a_1^2 - c_1^2), \frac{1}{2}(a_1^2 + c_1^2)\right) = 1$$

由 $d_1$ 奇,$(d_1, d_2) = 1$,得$(2d_2^2, d_1^2) = 1$.所以

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a_1^2 - c_1^2) = 2d_2^2 \\ \frac{1}{2}(a_1^2 + c_1^2) = d_1^2 \end{cases}$$

$$2(2d_1d_2)^2 + c_1^4 = a_1^4$$

得 ② 还有两两互素的解$(2d_1d_2, c_1, a_1)$,但$2d_1d_2 \leqslant 2ab = n < 2mn = x$,与 $x$ 最小矛盾!此时 ② 无解.

当 $a^2 + r^2 = 2(b^2 - s^2)$ 时,同样可证(2) 无解.

由(2) 得 $m^2 + y^2 = 2n^2, (m,n) = 1$,所以 $m, y$ 奇,$2 \parallel m^2 + y^2, 2 \nmid n$.

又 $z^2 - m^2 = 2n^2, z, m$ 奇,所以 $4 \mid z^2 - m^2, 2 \mid n$.

矛盾!此时 ② 也无解.

由定理 1 或 2,得 $2x^4 + y^4 = z^4$ 无解.

**定理 3** 方程 ④$x^4 + y^4 = 2z^2$ 只有平凡解$(x,y,z) = (k,k,k^2)$.

**证明** 只需证明方程 ④$'x^4 + y^4 = 2z^2 (x > y)$ 没有正整数解.

假设 ④$'$ 有解,必有 $x,y,z$ 两两互素的解,设 $z$ 最小.

由引理 3,得

$$\begin{cases} x^2 = m^2 - n^2 + 2mn \\ y^2 = |m^2 - n^2 - 2mn| \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$$

其中 $m > n,(m,n) = 1,2\nmid m + n$.

又由 $x^4 + y^4 = 2z^2$,得 $0 < (x^2 - y^2)^2 = 2[z^2 - (xy)^2]$,所以 $z > xy$.

也得 $(x^2 + y^2)^2 = 2[z^2 + (xy)^2]$,可设 $x^2 + y^2 = 2w$,得 $z^2 + (xy)^2 = 2w^2$.

因为 $z > xy$,所以由引理 3,得

$$\begin{cases} z = r^2 - s^2 + 2rs \\ x^2 + y^2 = 2w = 2(r^2 + s^2) \end{cases}$$

其中 $r > s,(r,s) = 1,2\nmid r + s$,所以

$$(1)\begin{cases} m^2 + n^2 = r^2 - s^2 + 2rs \\ 2mn = r^2 + s^2 \end{cases}$$

或

$$(2)\begin{cases} m^2 + n^2 = r^2 - s^2 + 2rs \\ m^2 - n^2 = r^2 + s^2 \end{cases}$$

在(1)中由 $2\nmid r + s$,得 $2\nmid r^2 + s^2$,与 $2mn = r^2 + s^2$ 矛盾!此时④′无解.

由(2)得 $\begin{cases} r(r + s) = m^2 \\ s(r - s) = n^2 \end{cases}$,又 $(r,r + s) = (s,r - s) = 1$,所以 $r = m_1^2,r + s = m_2^2,s = n_1^2,r - s = n_2^2$,可得 $m_1,m_2,n_1,n_2$ 两两互素.

且 $m_1^2 + n_1^2 = m_2^2,m_1^2 - n_1^2 = n_2^2$.

由 $(m_1 + n_1)(m_1 - n_1) = n_2^2,(m_1 + n_1,m_1 - n_1) = 1$(由 $m_1^2 + n_1^2 = m_2^2$ 知 $2\nmid m_1 + n_1$),得

$$\begin{cases} m_1 + n_1 = r_1^2 \\ m_1 - n_1 = s_1^2 \end{cases} \quad 且(r_1,s_1) = 1$$

$$\begin{cases} r_1^2 + s_1^2 = 2m_1 \\ r_1^2 - s_1^2 = 2n_1 \end{cases}$$

代入 $m_1^2 + n_1^2 = m_2^2$,得 $r_1^4 + s_1^4 = 2m_2^2$,因为 $(r_1,s_1) = 1$,所以 $r_1,s_1,m_2$ 两两互素.

得④′有两两互素的解 $(r_1,s_1,m_2)$,但 $m_2 \leqslant m_2^2 = r + s \leqslant 2rs < r^2 - s^2 + 2rs = z$,与 $z$ 最小矛盾!此时④′也无解.

由定理 3,得方程 $x^4 + y^4 = 2z^4$ 只有平凡解 $x = y = z = k$,即文献[3]末的猜测在 $n = 4$ 时成立.

## 3 对方程③,⑤′的研究

先研究方程⑤,只需求出方程⑤′$x^4 + y^2 = 2z^4$($x,y,z$ 两两互素,$z > 1$)的全部正整数解.

由引理 3,得

$$(1)\begin{cases}x^2 = m^2 - n^2 + 2mn\\ y = |m^2 - n^2 - 2mn|\\ z^2 = m^2 + n^2\end{cases}\quad (2)\begin{cases}x^2 = m^2 - n^2 - 2mn\\ y = |m^2 - n^2 + 2mn|\\ z^2 = m^2 + n^2\end{cases}$$

或

$$(3)\begin{cases}x^2 = -m^2 + n^2 + 2mn\\ y = m^2 - n^2 + 2mn\\ z^2 = m^2 + n^2\end{cases}$$

其中 $m > n, (m,n) = 1, 2 \nmid m + n$.

由(1)得 $2n^2 + x^2 = (m+n)^2$,由引理2,得

$$\begin{cases}n = 2ab\\ x = |a^2 - 2b^2|\\ m = a^2 + 2b^2 - 2ab\end{cases}$$

其中 $a$ 奇,$(a,b) = 1$.

由 $n^2 + m^2 = z^2$(有 $2 \mid n$),得

$$\begin{cases}n = 2rs\\ m = r^2 - s^2\\ z = r^2 + s^2\end{cases}$$

其中 $r > s, (r,s) = 1, 2 \nmid r + s$.所以

$$\begin{cases}ab = rs\\ (a-b)^2 + b^2 + s^2 = r^2\end{cases}$$

且 $a, r$ 奇,$b, s$ 偶,$(a,b) = (r,s) = 1$.

(因为 $2 \mid rs$,所以 $2 \mid ab$,得 $a$ 奇,$b$ 偶,$2 \nmid (a-b)^2$.假设 $2 \nmid s$,得 $2 \parallel (a-b)^2 + s^2$,又 $4 \mid b^2$,所以 $2 \parallel (a-b)^2 + b^2 + s^2$,$2 \parallel r^2$,这不可能!所以 $2 \mid s$,即 $s$ 偶,$r$ 奇.)

得

$$\begin{cases}x = |a^2 - 2b^2|\\ y = |(a^2 - 4ab + 2b^2)^2 - 8a^2b^2|\\ z = r^2 + s^2\end{cases}$$

由(2),得

$$2n^2 + x^2 = (m-n)^2$$

$$\begin{cases}n = 2ab\\ x = |a^2 - 2b^2|\\ m = a^2 + 2b^2 + 2ab\end{cases}$$

($a, b$ 满足的条件同上,下同)

由 $n^2 + m^2 = z^2$,得

$$\begin{cases} n = 2rs \\ m = r^2 - s^2 \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} ab = rs \\ (a+b)^2 + b^2 + s^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = |a^2 - 2b^2| \\ y = (a^2 + 4ab + 2b^2)^2 - 8a^2b^2 \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

由(3),得
$$2m^2 + x^2 = (m+n)^2$$

$$\begin{cases} m = 2ab \\ x = |a^2 - 2b^2| \\ n = a^2 + 2b^2 - 2ab \end{cases}$$

由 $m^2 + n^2 = z^2$,得

$$\begin{cases} m = 2rs \\ n = r^2 - s^2 \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} ab = rs \\ (a-b)^2 + b^2 + s^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = |a^2 - 2b^2| \\ y = 8a^2b^2 - (a^2 - 4ab + 2b^2)^2 \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

如此可总结出如下结论:

**定理 4** 方程⑤′的全部正整数解可表示为:

$$(1)\begin{cases} x = |a^2 - 2b^2| \\ y = |(a^2 - 4ab + 2b^2)^2 - 8a^2b^2| \quad (\text{且 } x, y, z \text{ 两两互素}) \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

其中
$$\begin{cases} ab = rs \\ (a-b)^2 + b^2 + s^2 = r^2 \end{cases}$$

$a, r$ 奇,$b, s$ 偶,$(a, b) = (r, s) = 1$.

或
$$(2)\begin{cases} x = |a^2 - 2b^2| \\ y = (a^2 + 4ab + 2b^2)^2 - 8a^2b^2 (\text{且 } x, y, z \text{ 两两互素}) \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

其中
$$\begin{cases} ab = rs \\ (a+b)^2 + b^2 + s^2 = r^2 \end{cases}$$

$a, r$ 奇, $b, s$ 偶, $(a, b) = (r, s) = 1$.

在定理4(1)中可选 $a = r = 3, b = s = 2$, 得 $(x, y, z) = (1, 239, 13)$ 是⑤′的一组解).

可证方程⑤′的解有无数组. 对于方程⑤′的解还应继续研究, 比如方程(⑤′中有未知数为平方数的解如何求?

再研究方程③, 只需求出③′$2x^4 + y^2 = z^4$($x, y, z$ 两两互素)的全部正整数解. 有 $x$ 偶, $y, z$ 奇.

由引理2, 得

$$\begin{cases} x^2 = 2mn \\ y = |m^2 - 2n^2| \\ z^2 = m^2 + 2n^2 \end{cases}$$

其中 $m$ 奇, $(m, n) = 1$. 所以

$$\begin{cases} m = r^2 \\ n = 2s^2 \\ x = 2rs \end{cases}$$

其中 $r$ 奇, $(r, s) = 1$.

由 $2n^2 + m^2 = z^2$, 得

$$\begin{cases} n = 2ab \\ m = |a^2 - 2b^2| \\ z = a^2 + 2b^2 \end{cases}$$

其中 $a$ 奇, $(a, b) = 1$.

所以 $ab = s^2$, $|a^2 - 2b^2| = r^2$, 得 $a = a_1^2, b = b_1^2, s = a_1 b_1, 2 \nmid a_1$, $(a_1, b_1) = 1$, 还有 $a_1^4 - 2b_1^4 = \pm r^2$, 即 $2b_1^4 + r^2 = a_1^4$, 或 $a_1^4 + r^2 = 2b_1^4$.

均有

$$\begin{cases} x = 2ra_1 b_1 \\ y = |r^4 - 8a_1^4 b_1^4| \\ z = a_1^4 + 2b_1^4 \end{cases}$$

其中 $2b_1^4 + r^2 = a_1^4$, 或 $a_1^4 + r^2 = 2b_1^4$, $a_1, b_1, r$ 两两互素(即得 $a_1, r$ 奇).

由此可总结出如下结论:

**定理5** 方程③′的全部正整数解可表示为

$$\begin{cases} x = 2abc \\ y = |8a^4c^4 - b^4| \\ z = 2a^4 + c^4 \end{cases}$$

其中 $a, b, c$ 两两互素, $2a^4 + b^2 = c^4$ 或 $c^4 + b^2 = 2a^4$.

因为 $c^4+b^2=2a^4$($a,b,c$ 两两互素)有解$(c,b,a)=(1,1,1),(1,239,13)$,所以由定理 5 可得 ③′ 的两组解$(x,y,z)=(2,7,3)$,(6 214,3 262 580 153,57 123),由这两组解又可得 ③′ 的无数组解,如$(x,y,z)=(2,7,3)$,(84,7 967,113),…

**定理 6** (1) 方程 $2x^8+y^2=z^4$ 没有正整数解;

(2) 方程 $2x^4+y^2=z^8$ 没有正整数解.

**证明** 只需证明没有 $x,y,z$ 两两互素的解.

(1) 假设有解,由定理 5 得,$x^2=2abc$.

由 $b,c$ 奇,得 $a$ 偶,由 $a,b,c$ 两两互素,得 $b=b_1^2$.

又由定理 5,得 $2a^4+b_1^4=c^4$ 或 $c^4+b^2=2a^4$.

前者与定理 1 矛盾!后者得 $a$ 奇(因为 $2\parallel(c^2)^2+b^2$),与 $a$ 偶矛盾!所以结论(1) 成立.

(2) 假设有解,由定理 5 可得,$2a^4+c^4=z^2$,这与定理 1 矛盾!所以结论(2) 成立.

## 参考文献

[1] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

[2] 甘志国.有理数集上不存在四连贯的二次多项式[J].数学通讯,1995(12):23-26.

[3] 邓波.关于丢番图方程 $x^n+y^n=2z^n$[J].湖南数学通讯,1989(3):17-18.

# 一类不定方程的正整数解

首先约定，本文中的字母均表示正整数.

设 $2q+1=(2a+1)(2b+1)$，得

$$2ab+a+b=q \qquad ①$$

又设

$$\begin{cases} ab=y \\ a+b=z \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 2y+z=q \\ x^2-zx+y=0(x=a\text{ 或 }b) \end{cases}$$

有

$$x^2+(2x+1)y-xq=0 \qquad ②$$

$$2x^2-(2x+1)z+q=0 \qquad ③$$

由此，得到下面的

**定理** (1) 若 $2q+1$ 是质数，方程 ①,②,③ 均无正整数解；

(2) 若 $2q+1$ 是合数，方程 ①,②,③ 均有正整数解，且只有有限组正整数解.

**例** 求下面方程的正整数解：

(1) $2x^2y+xy+x=48$；

(2) $x^2+2xy-7x+y=0$.

**解** (1) 可在方程 ① 中选 $a=xy$，$b=x$，$2q+1=97$，再由定理(1) 知方程(1) 无正整数解.

(2) 该方程即方程 ② 中 $q=7$ 的情形. 又此时 $2q+1=15=3\times5$，从而可得该方程的全部正整数解为 $(x,y)=(1,2),(2,2)$.

# 由 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 所想到的

众所周知,有这样一个简洁优美的恒等式:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2 \quad ①$$

考虑此结论的反面,笔者得到了另一个优美的结论:

**定理** 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{N}^*$,$x_1<x_2<\cdots<x_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^3\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

(当且仅当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1,2,\cdots,n)$ 时取等号).

**证明**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i^3-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2&=\sum_{j=1}^{n}x_j^3-\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^2+2x_j\sum_{i=1}^{j-1}x_i\right)=\\&\sum_{j=1}^{n}2x_j\left[\frac{1}{2}x_j(x_j-1)-\sum_{i=1}^{j-1}x_i\right]=\\&\sum_{j=1}^{n}2x_j\left[1+2+\cdots+(x_j-1)-\sum_{i=1}^{j-1}x_i\right]\end{aligned}$$

由 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{N}^*$,$x_1<x_2<\cdots<x_n$,得

$1+2+\cdots+(x_j-1)\geqslant\sum_{i=1}^{j-1}x_i$(当且仅当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1,2,\cdots,n)$ 时取等号),所以 $\sum_{i=1}^{n}x_i^3-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\geqslant 0$,从而可得要证结论成立.

**推论** 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$ 的不定方程

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \quad ②$$

有唯一的两两不等的正整数解:$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1,2,\cdots,n)$.

注意到不定方程 ② 还有别的正整数解,比如

$$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$$

$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2$$

$$1^3+2^3+2^3+3^3+3^3+4^3+6^3+6^3+9^3=(1+2+2+3+3+4+6+6+9)^2$$

$$\cdots$$

能求出不定方程 ② 的所有正整数解吗?

# 这样证明很简洁

新疆乌鲁木齐市23中的高二学生吾布力卡斯木·买买提在《中学生数学(高中)》2007年第10期发表了论文《不定方程 $x^{2n}+y^{2n}=3z^{2n}(n,x,y,z\in\mathbf{N}^*)$ 解不存在的探索》,证明了不定方程 $x^{2n}+y^{2n}=3z^{2n}(n,x,y,z\in\mathbf{N}^*)$ 无解,这作为一个高中生是难能可贵的.

同学们,熟悉费马(Fermat,1601—1665)大定理吗?有美称"业余数学之王"的法国律师于1637年提出了闻名全球的费马猜想.

**费马猜想** 不定方程 $x^n+y^n=z^n(n,x,y,z\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3)$ 无解.

此猜想一直到1994年9月19日才被英国数学家怀尔斯(A. Wiles)给出了证明,发表在1995年5月的《数学年刊》上,怀尔斯因此获得了1996年的沃尔夫奖和1998年的菲尔兹奖.

高中生买买提研究的问题的背景能涉及这样的名题,堪称一大亮点.

买买提的证明方法是反证法,准确地说应是研究整数性质的一种常用方法——无限递降法(费马就用这种方法解决了很多难度很大的不定方程问题);还用到了高二学生才知道的二项式定理.事实上,只要使用换元法就可把原证明简化成初一学生能轻松地看懂的证明:

要证明不定方程 $x^2+y^2=3z^2(x,y,z\in\mathbf{N}^*)$ 无解,只需证明不定方程 $x^{2n}+y^{2n}=3z^2(x,y,z\in\mathbf{N}^*)$ 无解(这里换元法:设 $x^n=x',y^n=y',z^n=z'$).

假设方程 $x^2+y^2=3z^2(x,y,z\in\mathbf{N}^*)$ 有解,若 $x$ 不是3的倍数,则 $y$ 也不是3的倍数,所以可设 $x=3k\pm 1,y=3l\pm 1(k,l\in\mathbf{Z}$,这里"±"无序),得 $x^2+y^2$ 被3除的余数是2,与 $x^2+y^2=3z^2(x,y,z\in\mathbf{N}^*)$ 矛盾!所以 $x$ 是3的倍数.同理,$y$ 也是3的倍数.

设 $x=3^{\alpha}x',y=3^{\beta}y'(\alpha,\beta,x',y'\in\mathbf{N}^*,x',y'$ 均不是3的倍数),可不妨设 $\alpha\leqslant\beta$,得 $x^2+y^2=3^{2\alpha}[x'^2+3^{2(\beta-\alpha)}y'^2]$.

若 $\alpha=\beta$,则 $x'^2+3^{2(\beta-\alpha)}y'^2=x'^2+y'^2(x',y'$ 均不是3的倍数)被3除的余数是2;若 $\alpha<\beta$,则 $x'^2+3^{2(\beta-\alpha)}y'^2=x'^2+y'^2(x',y'$ 均不是3的倍数)被3除的余数是1.

所以正整数 $x^2+y^2$ 的分解质因数的式子里3的指数是偶数 $2\alpha$.又正整数 $3z^2$ 的分解质因数的式子里3的指数是奇数(设正整数 $z$ 分解质因数的式子里3

的指数是自然数 $u$,则 $3z^2$ 的分解质因数的式子里 3 的指数是 $2u+1$).这也与 $x^2+y^2=3z^2(x,y,z\in \mathbf{N}^*)$ 矛盾!

综上所述,不定方程 $x^2+y^2=3z^2(x,y,z\in \mathbf{N}^*)$ 无解.

美国新数学丛书之一《连分数》(C.D.Olds 著,张顺燕译,1985 年北京大学出版社)第 153 ~ 154 页用较长的篇幅证明了不定方程 $x^2-3y^2=-1$ 无解,下面再给出一个简捷证明:

当 $x=3m,3m\pm 1(m\in \mathbf{N}^*)$ 时,$x^2=9m^2,9m^2\pm 6m+1$,所以 $x^2+1$ 不是 3 的倍数,因而方程 $x^2+1=3y^2$ 即 $x^2-3y^2=-1$ 无解.

用以上方法还可证得.

当 $p=7,11,19$ 等 $4m-1(m\in \mathbf{N}^*)$ 形质数时,不定方程 $x^2+y^2=pz^2(x,y,z\in \mathbf{N}^*)$ 均无解.

笔者在专著《初等数学研究(Ⅰ)》(2008 年哈尔滨工业大学出版社)中用数学归纳法证得.

**定理** 若 $p$ 是 $4m-1(m\in \mathbf{N}^*)$ 形质数,${x_1}^2+{x_2}^2(x_1,x_2\in \mathbf{Z})$ 是 $p$ 的倍数,则 $x_1,x_2$ 均是 $p$ 的倍数.

由此立得

**推论 1** 若 $p$ 是 $4m-1(m\in \mathbf{N}^*)$ 形质数,$a$ 不是 $p$ 的倍数,则方程 $x^2+y^2=paz^2$ 有唯一整数解 $(x,y,z)=(0,0,0)$.

**推论 2** 若 $m\in \mathbf{Z}$,则 $x^2+y^2=(4m-1)z^2$ 有唯一解 $(x,y,z)=(0,0,0)$.

**证明** 只需证明 $m\in \mathbf{N}^*$ 时成立即可.

可证 $m\in \mathbf{N}^*$ 时 $4m-1$ 不为完全平方数.所以可设 $4m-1=A^2a$($A,a$ 均为正奇数,$a$ 为不同奇素数的积),可证 $A^2$ 一定为 $4m+1$ 形数,所以 $a$ 为 $4m-1$ 形数,因而 $a$ 一定有 $4m-1$ 形素因数 $p$,且 $a$ 不是 $p^2$ 的倍数.

由推论 1 知方程 $x^2+y^2=a(Az)^2$ 有唯一解 $(x,y,z)=(0,0,0)$,即推论 2 成立.

《数学的魅力》(傅钟鹏,1985 年福建科学技术出版社)第 109 页写道:

"著名数学家哥德巴赫曾提出:'$(3m+2)n^2+3$ 对于任何整数 $m$ 和 $n$ 的人数都不可能排成方队.'欧拉证明了这个结论,并提出 $4mn-m-n$ 人也不能排成方队.但要证明欧拉的结论就难了."

用定理 1 极易证明这两个结论.

(1) 方程 $(3m+2)n^2+3=t^2$ 无整数解.

**证明** 假设此方程有解,则 $(3m+3)n^2+3=t^2+n^2$,$t^2+n^2$ 是 3 的倍数.

由定理得 $t,n$ 均是 3 的倍数,所以 $t^2+n^2$ 是 9 的倍数,又 $n$ 是 3 的倍数,所以 9 是 3 的倍数,这不可能!说明结论(1) 成立.

(2) 方程 $4mn - m - n = t^2$ 无正整数解.

**证明** 此方程即 $(4m-1)n = t^2 + m$,假设它有正整数解,得 $t^2 + m$ 是 $4m-1$ 的倍数,$(2t)^2 + 1 + (4m-1)$ 也是 $4m-1$ 的倍数,得 $(2t)^2 + 1$ 是 $4m-1$ 的倍数.

因为 $4m-1$ 有 $4k-1(k \in \mathbf{N}^*)$ 形素因数 $p$,由定理1得1是 $p$ 的倍数,这不可能!所以结论(2)成立.

**注** 结论(2)中的方程有整数解 $(m,n,t) = (0,0,0),(0,-t_1^2,t_1^2),(-1,\frac{1-(5t_1+1)^2}{5},5t_1+1)(t_1 \in \mathbf{Z})$.

# 不定方程 $x^2 - y^2 = pz^2$ 的全部整数解

首先约定,本文中的字母均表示整数.

**定理 1**[1] 不定方程 $x^2 + y^2 = 2z^2$ 的全部整数解为

$$\begin{cases} x = k(m^2 - n^2 + 2mn) \\ y = k(m^2 - n^2 - 2mn) \\ z = k(m^2 + n^2) \end{cases}$$

其中($m,n \in \mathbf{N}^*, m > n, (m,n) = 1, 2 \nmid m + n$).

本文将给出不定方程 $x^2 - y^2 = pz^2$($p$ 已知)的全部整数解$(x,y,z)$.显然,只需研究 $p$ 没有大于 1 的平方因子(即 $p$ 是 1,质数或相异质数的积,本文记作 $p \in G$)的情形.

## 1 当 $2 \mid p$ 时

设 $p = 2p_0$,有

**定理 2** 不定方程 $x^2 - y^2 = 2p_0z^2$($p_0 \in G$ 且 $2 \nmid p_0$)的全部整数解为

$$\begin{cases} x = t(2p_1r^2 + p_2s^2) \\ y = t(2p_1r^2 - p_2s^2) \\ z = 2rst \end{cases}$$

(其中 $p_1, p_2, r, s \in \mathbf{N}^*, p_1p_2 = p_0, (r,s) = 1, 2 \nmid s, p_1r^2 > p_2s^2$).

**证明** 先看$(x,y,z) = 1$的情形.

可证得$(x,y) = 1$且 $x,y$ 均为奇数,原方程即

$$(x+y)(x-y) = 2p_0z^2$$

设
$$\begin{cases} x + y = 2u \\ x - y = 2v \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \quad (\text{且}(u,v) = 1)$$

原方程,即

$$2uv = p_0z^2 (p_0 \in G \text{且} 2 \nmid p_0, (u,v) = 1)$$

可设 $u = p_1u_0, v = p_2u_0$(其中 $p_0 = p_1p_2, (u_0, v_0) = 1$),得 $2u_0v_0 = z^2$,再分两种情形:

(1) 当 $|u_0|$ 是完全平方数时

设 $u_0 = \pm r^2 (r \in \mathbf{N}^*)$,得 $2r \mid z$,设 $z = \pm 2rs (s \in \mathbf{N}^*)$,所以 $v_0 = \pm 2s^2$.

由 $(u_0, v_0) = 1$,得 $(r, s) = 1, 2 \nmid r$,所以

$$\begin{cases} u_0 = \pm r^2 \\ v_0 = \pm s^2 \\ z = \pm 2rs \end{cases}$$

(其中 $2 \nmid r, (r, s) = 1; r, s \in \mathbf{N}^*$,"+, -"有序).

(2) 当 $|u_0|$ 不是完全平方数时

设 $u_0 = \pm r^2 t, t \in G$.

① 当 $2 \mid t$ 时,设 $t = 2t_0 (t_0 \in G$ 且 $2 \nmid t_0)$,得 $u_0 = \pm 2r^2 t_0$.

由 $2u_0 v_0 = z^2$,得 $2rt_0 \mid z$,设 $z = \pm 2rst_0 (s \in \mathbf{N}^*)$,得 $v_0 = \pm s^2 t_0$.

由 $(u_0, v_0) = 1$,得 $t_0 = 1, (r, s) = 1, 2 \nmid s$,所以

$$\begin{cases} u_0 = \pm 2r^2 \\ v_0 = \pm s^2 \\ z = \pm 2rs \end{cases}$$

(其中 $2 \nmid r, (r, s) = 1, r, s \in \mathbf{N}^*$,"+, -"有序).

② 当 $2 \nmid t (t \in G)$ 时

由 $2r^2 t \mid z$,得 $2rt \mid z$,设 $z = \pm 2rst (s \in \mathbf{N}^*)$,代入 $2u_0 v_0 = z^2$,得 $v_0 = \pm 2s^2 t$,同理有 $t = 1, u_0 = \pm r^2$,可得到全同 ① 的结果.

综合 ①,② 得方程

$$2u_0 v_0 = z^2 ((u_0, v_0) = 1)$$

的全部整数解为

$$\begin{cases} u_0 = \pm 2r^2 \\ v_0 = \pm s^2 \\ z = \pm 2rs \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} u_0 = \pm s^2 \\ v_0 = \pm 2r^2 \\ z_0 = \pm 2rs \end{cases}$$

(其中 $r, s \in \mathbf{N}^*, (r, s) = 1, 2 \nmid s$,"+, -"有序).

得
$$\begin{cases} x = \pm (2p_1 r^2 + p_2 s^2) \\ y = \pm (2p_1 r^2 - p_2 s^2) \\ z = \pm 2rs \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = \pm (p_1 r^2 + 2p_2 s^2) \\ y = \pm (p_1 r^2 - 2p_2 s^2) \\ z = \pm 2rs \end{cases}$$

注意到 $p_1, p_2$ 的对称性,所以可将这两组解合表为

$$\begin{cases} x = \pm(2p_1r^2 + p_2s^2) \\ y = \pm(2p_1r^2 - p_2s^2) \\ z = \pm 2rs \end{cases}$$

(其中 $r,s,p_1,p_2 \in \mathbf{N}^*,(r,s)=1,2\nmid s,p_1p_2=p_0$,"+, -"有序).

当$(x,y,z)=t'(t'\in\mathbf{N})$时可得原方程的全部整数解,进而可得定理2成立.

## 2 当$2\nmid p$时

**定理3** 不定方程 $x^2-y^2=pz^2(p\in G$且$2\nmid p)$的全部整数解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{2}(p_1r^2 + p_2s^2) \\ y = \dfrac{t}{2}(p_1r^2 - p_2s^2) \\ z = rst \end{cases}$$

(其中$2\nmid r,2\nmid s,(r,s)=1,p_1,p_2,r,s\in\mathbf{N}^*,p_1p_2=p,p_1r^2>p_2s^2$).或

$$\begin{cases} x = t(p_1r^2 + p_2s^2) \\ y = t(p_1r^2 - p_2s^2) \\ z = 2rst \end{cases}$$

(其中$2\nmid r+s,(r,s)=1,p_1,p_2,r,s\in\mathbf{N}^*,p_1p_2=p,p_1r^2>p_2s^2$).

**证明** 原方程可化为$(x+y)(x-y)=pz^2$.

先看$(x,y,z)=1$的情形,此时也得$(x,y)=1,(x+y,x-y)=1$或2.

(1) 当$(x+y,x-y)=1$时

设$x+y=u,x-y=v$,得$x=\dfrac{u+v}{2},y=\dfrac{u-v}{2},uv=pz^2$.

又可设$u=p_1u_0,v=p_2u_0$(其中$p=p_1p_2,p_1,p_2\in\mathbf{N}^*$),得$u_0v_0=z^2$,$(u_0,v_0)=1$,得

$$\begin{cases} u_0 = \pm r^2 \\ v_0 = \pm s^2 \\ z = \pm rs \end{cases}$$

当$(x,y,z)=t'(t'\in\mathbf{N})$时,进而可证得此时定理3成立(由$x\pm y$同奇偶知$2\nmid r,2\nmid s$).

(2) 当$(x+y,x-y)=2$时

设$x+y=2u,x-y=2v$,得$x=u+v,y=u-v$,由$z$为偶数知$x,y$均为奇数,$2\nmid u+v,2\nmid r+s$.设$z=2k$,得$uv=pk^2$.

设 $u = p_1u_0, v = p_2v_0, (u_0, v_0) = 1, p_1, p_2 \in \mathbf{N}^*, p_1p_2 = p$,得 $u_0v_0 = k^2$,所以

$$\begin{cases} u_0 = \pm r^2 \\ v_0 = \pm s^2 \\ k = \pm 2rs \end{cases}$$

当 $(x, y, z) = t'(t' \in \mathbf{N})$ 时,进而可证得此时定理 3 也成立.

# 含有60°(或120°)角的整边三角形三边的求法

含有90°角的整边三角形的三边长即勾股数组，人们早已求出了全部勾股数组，任一边为定值的勾股数组的组数也已求出，具体的结论可见文献[1]．一个三角形的某个内角是30°，45°，60°，120°，150°这些特殊角之一，这个三角形能为整边三角形吗？能求出这样的整边三角形的三边吗？

你不难证明，不存在一个内角为30°，45°或150°的整边三角形，存在内角为60°或120°的整边三角形，这样的整边三角形的三边可由下面的定理1，2得到．

**定理1** 有一个角是60°的整边三角形的三边$\langle a,b,c\rangle$(其中$c$为60°角的对边)为：

$$\begin{cases}a=kv(2u-3v)\\b=ku(u-2v)\\c=k(u^2-3uv+3v^2)\end{cases} \quad ①$$

$$(k,u,v\in\mathbf{N}^*,(u,v)=1,3\nmid u,u>2v)$$

或

$$\begin{cases}a=kv(2u_1-v)\\b=ku_1(3u_1-2v)\\c=k(3u_1^2-3u_1v+v^2)\end{cases}$$

$$(k,u_1,v\in\mathbf{N}^*,(u_1,v)=1,3\nmid v,u_1>\frac{2}{3}v) \quad ②$$

**定理2** 有一个角是120°的整边三角形的三边$\langle a,b,c\rangle$(其中$c$为120°角的对边)为

$$\begin{cases}a=kv(2u+3v)\\b=ku(u+2v)\\c=k(u^2+3uv+3v^2)\end{cases} \quad (k,u,v\in\mathbf{N}^*,(u,v)=1,3\nmid u)$$

或

$$\begin{cases}a=kv(2u_1+v)\\b=ku_1(3u_1+2v)\\c=k(3u_1^2+3u_1v+v^2)\end{cases} \quad (k,u_1,v\in\mathbf{N}^*,(u,v)=1,3\nmid v)$$

下面只证明定理1(因为定理2的证明是类似的)：

先证明由①或②确定的$\langle a,b,c\rangle$为$c$边所对角是60°的整边三角形的三边，这只需验证：

(1)$a,b,c\in\mathbf{N}^*$;

(2)$a+b>c,b+c>a,c+a>b$;

(3)$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°=a^2+b^2-ab$.

它们都容易验证.

再证明有一个角是60°角的整边三角形的三边$\langle a,b,c\rangle$(其中$c$边所对的角是60°)均可由①或②表示.

由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-ab$,即

$$a(a-b)=(c+b)(c-b)$$

可设$\frac{a}{c+b}=\frac{c-a}{a-b}=\frac{v}{u-v}$,其中$(u,v)=1,u,v\in\mathbf{N}^*$.

由$a,b,c\in\mathbf{N}^*,a<b+c$,得$u>2v$,还有:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{2uv-3v^2}{u^2-2uv}\\ \dfrac{c}{b}=\dfrac{u^2-3uv+3v^2}{u^2-2uv}\end{cases}$$

可以证明,当$3\nmid u$时,$\frac{2uv-3v^2}{u^2-2uv}$与$\frac{u^2-3uv+3v^2}{u^2-2uv}$均为既约分数,所以

$$\begin{cases}a=kv(2u-3v)\\ b=ku(u-2v)\\ c=k(u^2-3uv+3v^2)\end{cases}\qquad(k,u,v\text{ 满足①的条件})$$

当$3\mid u$时,设$u=3u_1$,由$(u,v)=1$,得$3\nmid v$,所以

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{2u_1v-v^2}{3u_1^2-2u_1v}\\ \dfrac{c}{b}=\dfrac{3u_1^2-3u_1v+v^2}{3u_1^2-2u_1v}\end{cases}$$

可以证明,此时$\frac{2u_1v-v^2}{3u_1^2-2u_1v}$与$\frac{3u_1^2-3u_1v+v^2}{3u_1^2-2u_1v}$也均为既约分数,所以

$$\begin{cases}a=kv(2u_1-v)\\ b=ku_1(3u_1-2v)\\ c=k(3u_1^2-3u_1v+v^2)\end{cases}\qquad(k,u_1,v\text{ 满足②的条件})$$

综上所述,得定理1成立.

**推论1** 任一边为定值且有一个角是60°或120°的整边三角形只有有限个.

**证明** 先证明关于60°的结论.

设此整边三角形的三边为$\langle a,b,c\rangle$($c$边所对角为60°),则$\langle a,b,c\rangle$可由定

理1确定.

当 $a$ 或 $b$ 为定值时,显然 $\langle a,b,c\rangle$ 的组数是有限的.

当 $c$ 为定值时,若 $c=k(u^2-3uv+3v^2)\geqslant u^2-3uv+3v^2=(u-\frac{3}{2}v)^2+\frac{3}{4}v^2$,得数组 $\langle u-\frac{3}{2}v,v\rangle$ 的取法是有限的,即 $\langle u,v\rangle$ 的取法是有限的,$\langle k,u,v\rangle$ 的取法也是有限的,所以 $\langle a,b,c\rangle$ 的组数也是有限的.同理可证:若 $c=k(3u_1^2-3u_1v+v^2)$ 时,$\langle a,b,c\rangle$ 的组数也是有限的.

由定理2知,关于120°的结论显然成立.

**推论2** 有一个角是60°或120°的整边三角形 $\langle a,b,c\rangle$($c$ 为60°或120°角的对边,$(a,b,c)=1$)为定理1或2中 $k=1$ 的情形.

**证明** 这是因为由定理1或2可以证明 $(a,b,c)=1\Leftrightarrow k=1$.

由推论2,还可得

**推论3** (1)有一边是素数且有一个角是60°的整边三角形(不是等边三角形)的三边互素;

(2)有一边是素数且含有一个角是120°的整边三角形的三边互素.

本文得到的结论比文献[2]更简洁明了.

**例1** 求有一边为8且有一个角是60°的所有整边三角形的三边.

**解** 用定理1可求.

① 中 $a=8$ 时,得 $\langle k,u,v\rangle=\langle 1,5,2\rangle$,所以 $\langle a,b,c\rangle=\langle 8,5,7\rangle$;

① 中 $b=8$ 时,得 $\langle k,u,v\rangle=\langle 1,4,1\rangle$,所以 $\langle a,b,c\rangle=\langle 5,8,7\rangle$;

① 中 $c=8$ 时,得 $\langle a,b,c\rangle$ 不存在.

② 中 $a=8$ 时,得 $\langle k,u_1,v\rangle=\langle 1,3,2\rangle$ 或 $\langle 1,3,4\rangle$ 或 $\langle 8,1,1\rangle$,所以 $\langle a,b,c\rangle=\langle 8,15,13\rangle$ 或 $\langle 8,3,7\rangle$ 或 $\langle 8,8,8\rangle$;

② 中 $b=8$ 时,得 $\langle k,u_1,v\rangle=\langle 1,2,1\rangle$ 或 $\langle 1,4,5\rangle$ 或 $\langle 8,1,1\rangle$,所以 $\langle a,b,c\rangle=\langle 3,8,7\rangle$ 或 $\langle 15,8,13\rangle$ 或 $\langle 8,8,8\rangle$;

② 中 $c=8$ 时,得 $\langle k,u_1,v\rangle=\langle 8,1,1\rangle$,所以 $\langle a,b,c\rangle=(8,8,8)$.

所以 $\langle a,b,c\rangle=\langle 3,7,8\rangle,\langle 5,7,8\rangle,\langle 8,8,8\rangle,\langle 8,13,15\rangle$,其中60°角所对的边分别为7,7,8,13.

**例2** 求一边为13且有一个角为120°的整边三角形的三边.

**解** 用定理2可求得此三角形的三边为 $\langle 7,8,13\rangle$ 或 $\langle 13,35,43\rangle$,$\langle 13,120,127\rangle$.

## 参考文献

[1] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1988.
[2] 张文忠.整数中的明珠[M].重庆:西南师范大学出版社,1992.

# 一类不定方程的解法

本文给出关于 $x,y$ 的不定方程

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}(f(x),g(x)\text{ 是已知的整系数多项式，} f(x)\neq 0, g(x)\text{ 的次数 } n\in\mathbf{N}^*) \quad ①$$

的整数解的求法.

显然由 $g(x)=\pm 1$,或 $\begin{cases}f(x)=0\\g(x)\neq 0\end{cases}$ 得到的整数 $x$ 满足①,至于①的全部解应按以下方法来求.

## 1 当 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式时

设 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$,则 $q(x)$ 是有理系数多项式,设其各项系数的最小公分母是 $d$(可证 $d$ 是 $g(x)$ 的各项系数的最大公约数),可把不定方程①化为同解的不定方程

$$\begin{cases}y=q(x)\\g(x)\neq 0\end{cases} \quad ②$$

设 $x=dt+r(r=0,1,2,\cdots,d-1)$,$A=\{r\mid q(r)\in\mathbf{Z},r=0,1,\cdots,d-1\}=\{r_1,\cdots,r_{|A|}\}$,则②的全部整数解是

$$\begin{cases}x=dt+r_i\\y=q(dt+r_i)\end{cases}\quad (t\in\mathbf{Z},i=1,\cdots,|A|)$$

## 2 当 $g(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式时

设 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$,$r(x)\neq 0$,$r(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$,$q(x)$ 是有理系数多项式,设 $q(x)$ 的各项系数的最小公分母是 $d$,则 $dq(x)$ 是整系数多项式. 因为 $df(x)=g(x)\cdot dq(x)+dr(x)$,$g(x)\mid df(x)$,且 $df(x)$,$g(x)$,$dq(x)$ 都是整系数多项式,所以 $dr(x)$ 也是整系数多项式,且 $g(x)\mid dr(x)$.

(1) 当 $r(x)=0$ 且 $g(x)\neq 0$ 时,容易求出其全部整数解(其个数 $\leqslant r(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$).

(2) 当 $r(x)\neq 0$ 时,有 $|g(x)|\leqslant|dr(x)|$.

设 $g(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i(a_n\neq 0)$, $dr(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$,得

$$|a_n|\cdot|x|^n-\left|\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right|\leqslant\left|\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i\right|$$

设 $c=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{|a_i|+|b_i|\}$,得

$$|a_n|\cdot|x|^n\leqslant\left|\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right|+\left|\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(|a_i|+|b_i|)|x|^i\leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}c|x|^i=c\cdot\frac{|x|^n-1}{|x|-1}(\text{当}|x|\neq 1\text{时})$$

$$|x|-1<\frac{|x|^n(|x|-1)}{|x|^n-1}\leqslant\frac{c}{|a_n|}$$

$|x|<1+\dfrac{c}{|a_n|}$(因为可证 $c\neq 0$,所以此式在 $|x|=1$ 时也成立).

此时,由 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 这有限个值逐个试验可求出①的全部整数解.

**定理1** 在不定方程①中,设 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$, $r(x)\neq 0$, $r(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$,设 $q(x)$ 的各项系数的最小公分母是 $d$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i(a_n\neq 0)$, $dr(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$, $c=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{|a_i|+|b_i|\}$,若 $(x,y)$ 是①的一组整数解,则

(1) $r(x)=0$ 且 $g(x)\neq 0$;或 $r(x)\neq 0$ 时, $|x|<1+\dfrac{c}{|a_n|}$.

(2)①只有有限组整数解.

**例1** 求下面不定方程的整数解.

$$y=\frac{2x^5-2x^4+x^2-1}{2x^3-2x^2-x+1} \qquad ③$$

**解** $2x^5-2x^4+x^2-1=(2x^3-2x^2-x+1)(x^2+\frac{1}{2})+(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2})$,所以 $2x^3-2x^2-x+1\mid 2x^2+x-3$.

(1) 当 $2x^2+x-3=0$ 时, $x=1$,但 $x=1$ 时, $2x^3-2x^2-x+1=0$,所以 $x=1$ 不是③的解.

(2) 当 $2x^2+x-3\neq 0$ 时,由定理1得 $|x|<3(c=4,|a_n|=2)$,所以 $x=0,-1,2,-2$(因为 $x\neq 1$),可得③的全部整数解为 $(x,y)=(0,-1)$, $(-1,2)$, $(2,5)$.

①中 $n=1$ 或 2 时还有以下解法.

## 3 $n=1$ 时 ① 的另外解法

只给出关于 $x,y$ 的不定方程

$$y=\frac{f(x)}{\alpha x-\beta}(f(x)\text{ 是已知的 } m \text{ 次整系数多项式},$$
$$m\in\mathbf{N},\alpha,\beta\text{ 是已知的整数},\alpha f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\neq 0) \qquad ④$$

的整数解的求法.

**定理 2** ④ 的整数解满足 $\alpha x-\beta\mid\alpha^m f(\frac{\beta}{\alpha})$(可证 $\alpha^m f(\frac{\beta}{\alpha})\in\mathbf{Z}^*$).

**证明** 设 $f(x)=q(x)(\alpha x-\beta)+f(\frac{\beta}{\alpha})$

$$\alpha^m f(x)=\alpha^m q(x)(\alpha x-\beta)+\alpha^m f(\frac{\beta}{\alpha})$$

下证 $\alpha^m f(x)$ 除以 $\alpha x-\beta$ 所得的商式 $\alpha^m q(x)$ 是整系数多项式,便得定理 2 成立:

因为 $\alpha x-\beta\mid\alpha^m f(x)$,所以 $\alpha x-\beta\mid\alpha^m f(\frac{\beta}{\alpha})$.

设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i x^i$,得

$$\alpha^m f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\alpha^{m-i}(\alpha x)^i=g(z)(\text{设 }\alpha x=z)$$

显然 $g(z)$ 除以 $z-\beta$ 的商式是整系数多项式,所以 $\alpha^m f(x)$ 除以 $\alpha x-\beta$ 的商式 $\alpha^m q(x)$ 是整系数多项式.

**例 2** (1995 年全国高中数学联赛第二试第二题) 求一切实数 $p$,使得三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$ 的三个根均为正整数.

**解** 因为 $x=1$ 是原方程的一个根,所以题意即关于 $x$ 的方程 $5x^2-5px+66p-1=0$ 的两个根均为正整数,由其两个根之和为 $p$,得 $p\in\mathbf{N}^*$.

$$p=\frac{5x^2-1}{5x-66}$$

由 $x\in\mathbf{N}^*$,得 $5x^2-1,p\in\mathbf{N}^*$,所以 $5x-66\in\mathbf{N}^*$.

由 $5x-66\mid 5x^2-1$,得 $5x-66\mid 19\times 229$(19,229 都是素数),$x=17$ 或 59,$p=76$.

## 4 $n=2$ 时 ① 的另外解法

只给出关于 $x,y$ 的不定方程

$$y=\frac{ux+v}{\alpha x^2+\beta x+r^2}(u,v,\alpha,\beta,r\text{ 是已知的整数},u,v\text{ 不同时为 }0) \qquad ⑤$$

的整数解的求法.

**定理 3** ⑤ 只有有限组整数解,且 $\alpha x^2+\beta x+r\mid \alpha v^2-\beta uv+rv^2$.

**证明** 因为 $ux+v\neq 0$,所以 $\alpha x^2+\beta x+r$ 不是 $ux+v$ 的因式,由定理 1(3) 知 ⑤ 只有有限组整数解.

有 $\alpha x^2+\beta x+r\mid (ux+v)(u\alpha x+u\beta-v\alpha)$,所以 $\alpha x^2+\beta x+r\mid \alpha v^2-\beta uv+rv^2$.

**例 3** 求方程 $y=\dfrac{2x^4+x}{2x^2-1}$ 的整数解.

**解** $2x^4+x=(2x^2-1)(x^2+\dfrac{1}{2})+(x+\dfrac{1}{2})$.

所以 $2x^2-1\mid 2x+1$. 由定理 3,得 $2x^2-1\mid 2(\alpha=2,\beta=0,r=-1,u=2,v=1)$,从而可得原方程的全部整数解为 $(x,y)=(0,0),(1,3),(-1,1)$.

有时不用本文介绍的方法求 ① 的解也很简便.

**例 4** 求方程 $y=\dfrac{(x-2)(5x^2-6x+1)}{2x^2-6x+4}$ 的整数解.

**解** 原方程即

$$y=\frac{1}{2}(5x-1)(x\neq 1,2)$$

所以原方程的全部整数解为 $(x,y)=(2t+1,5t+2)(t\in\mathbf{Z})$.

**例 5** 求方程 $y=\dfrac{x+1}{2x^2-2}$ 的正整数解.

**解** 原方程即

$$y=\frac{1}{2x-2}(x\neq\pm 1)$$

所以原方程无正整数解.

**注** 若用定理 4,得 $2x^2-2\mid 0$,不能再求解;若用定理 1,得 $|x|<2.5$,$x=0,\pm 1,\pm 2$,再求解要繁琐些.

# 不定方程 $x^3+2y^3-4z^3=0$ 没有正整数解的再推广

文献[1]证明了"不定方程 $x^3+2y^3-4z^3=0$ 没有正整数解",文献[2]的定理1~6推广了这个结论(是用无穷递降法证明的),本文将再推广这些结论,所得结论(即下文的定理2)简洁、涵盖广泛,证明也简洁明快.

设 $p$ 是素数,$a\in\mathbf{Z}$,本文用 $p^{\alpha}\parallel a$ 表示 $p^{\alpha}\mid a$ 且 $p^{\alpha+1}\nmid a$. 显然 $\alpha\in\mathbf{N}$;对于任意的 $\alpha\in\mathbf{N}$,$p^{\alpha}\parallel 0$ 均不成立.[3]

**定理1** 若 $a,b,c\in\mathbf{Z}$,$p$ 是素数,$p\nmid abc$,$k,l,n\in\mathbf{N}^*$,$k<n$,$l<n$,$k\neq l$,则关于 $x,y,z$ 的不定方程 $ax^n+p^kby^n=p^lcz^n(xyz\neq 0)$ 没有正整数解.

**证明** 假设 $ax^n+p^kby^n=p^lcz^n(xyz\neq 0)$ 有正整数解 $(x,y,z)$,则可设 $p^{\alpha}\parallel x$,$p^{\beta}\parallel y$,$\alpha,\beta\in\mathbf{N}$,所以 $p^{\alpha n}\parallel ax^n$,$p^{\beta n+k}\parallel p^kby^n$.

(1) 当 $\alpha\leqslant\beta$ 时,$\alpha n<\beta n+k$,所以 $p^{\alpha n}\parallel ax^n+p^kby^n$,$p^{\alpha n}\parallel p^lcz^n$,由 $l,n\in\mathbf{N}^*$,$l<n$ 知这不可能.

(2) 当 $\alpha>\beta$ 时,得 $\alpha\geqslant\beta+1$,$\alpha n\geqslant\beta n+n>\beta n+k$,所以 $p^{\beta n+k}\parallel ax^n+p^kby^n$,$p^{\beta n+k}\parallel p^lcz^n$,由 $k,l,n\in\mathbf{N}^*$,$k<n$,$l<n$,$k\neq l$ 知这不也可能.

即假设错误,要证结论成立.

**定理2** 若 $a_i\in\mathbf{Z}$,$p$ 是素数,$p\nmid a_i(i=1,2,\cdots,m)$,$m,n\in\mathbf{N}^*$,$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是两两互异且小于 $n$ 的自然数,则关于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的不定方程 $\sum\limits_{i=1}^{m}p^{k_i}a_ix_i^n=0(x_1x_2\cdots x_m\neq 0)$ 没有正整数解.

**证明** 先对 $m$ 用数学归纳法证明:

若 $p^{\alpha}\Big\|\sum\limits_{i=1}^{m}p^{k_i}a_ix_i^n$,则 $\alpha\equiv k(\mathrm{mod}\ n)$,$k=k_1,k_2,\cdots$,或 $k_m$.

当 $m=1$ 时显然成立.

假设 $m$ 时成立,下证 $m+1$ 时也成立:若 $p^{\alpha}\Big\|\sum\limits_{i=1}^{m}p^{k_i}a_ix_i^n+p^{k_{m+1}}a_{m+1}x_{m+1}^n$,则 $\alpha\equiv k(\mathrm{mod}\ n)$,$k=k_1,k_2,\cdots,k_m$,或 $k_{m+1}$.

可设 $p^{\beta}\Big\|\sum\limits_{i=1}^{m}p^{k_i}a_ix_i^n$,$\beta\in\mathbf{N}$,由"$m$ 时成立"得 $\beta\equiv k(\mathrm{mod}\ n)$,$k=k_1,k_2,\cdots$,或 $k_m$.

又设 $p^{\gamma}\parallel x_{m+1}$，得 $p^{\gamma n+k_{m+1}}\parallel p^{k_{m+1}}a_{m+1}x_{m+1}^{n}$. 因为 $\beta\neq\gamma n+k_{m+1}$，所以由 $p^{\alpha}\left\|\sum_{i=1}^{m}p^{k_i}a_ix_i^n+p^{k_{m+1}}a_{m+1}x_{m+1}^{n}\right.$ 得 $\alpha=\min\{\beta,\gamma n+k_{m+1}\}$，所以 $\alpha\equiv k(\bmod n)$，$k=k_1,k_2,\cdots,k_m$ 或 $k_{m+1}$，即 $m+1$ 时也成立.

假设 $\sum_{i=1}^{m}p^{k_i}a_ix_i^n=0(x_1x_2\cdots x_m\neq 0)$ 有正整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，得 $p^{\alpha}\parallel 0$，且 $\alpha\equiv k(\bmod n)$，$k=k_1,k_2,\cdots$，或 $k_m$. 这不可能，所以假设错误，要证结论成立.

## 参考文献

[1] 熊斌，周珺. 最小数原理[J]. 数学通讯，2007(1):46-47.
[2] 邱树华，邱泽慧. 不定方程 $x^3+2y^3-4z^3=0$ 没有正整数解的一类推广[J]. 数学通讯，2009(1，下):38.
[3] 甘志国. 初等数学研究(Ⅰ)[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.

# 对《新题征展(103)》第5题的研究

笔者发表于《新题征展(103)》[1]的第5题是一道数学趣题：

5.我们知道，$n! = 1\times2\times3\times\cdots\times n$.现在从 $m = 1!\times2!\times3!\times\cdots\times100!$ 中的100个因数中去掉一个因数，使剩下的积为完全平方数，问应去掉哪一个因数呢?(找出一种方式即可)

**解** $m = 1!\times2!\times3!\times\cdots\times100! = 1\times(1\times2)\times(1\times2\times3)\times\cdots\times(1\times2\times3\times\cdots\times100)$.

由此看出 $m$ 中的因数1共有100个，2共有99个，3共有98个，…，100共有1个.即凡是奇因数的指数都是偶数，凡是偶因数的指数都是奇数.

所以，存在某个整数 $a$ 使得 $m = a^2\times2\times4\times6\times\cdots\times100 = a^2\times2^{50}\times50!$.

所以去掉50!是符合题意的一种方式.

本文将对这道趣题作些研究.

**双阶乘定义** $n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\cdots\cdot4\cdot2(n\text{是正偶数}) \\ n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\cdots\cdot3\cdot1(n\text{是正奇数}) \end{cases}$

**定理** 若 $k\in\mathbf{N}^*$，则存在 $a,b\in\mathbf{N}^*$，使得

$$\prod_{i=1}^{2k-1} i! = (2k-1)!!\cdot a^2 \quad ①$$

$$\prod_{i=1}^{2k} i! = (2k)!!\cdot b^2 = k!\cdot2^k\cdot b^2 \quad ②$$

$$\prod_{i=1}^{4k} i! = (4k)!!\cdot b^2 = (2k)!\cdot(2^kb)^2 \quad ③$$

$$\prod_{i=1}^{4k-2} i! = (4k-2)!!\cdot b^2 = (2k-1)!\cdot2(2^{k-1}b)^2 \quad ④$$

**证明** $\prod_{i=1}^{2k-1} i! = 1^{2k-1}\cdot2^{2k-2}\cdot3^{2k-3}\cdot\cdots\cdot(2k-2)^2\cdot(2k-1) = (2k-1)!!\cdot a^2$.

即式①成立.同理，可证得式②成立.再由②可得③④均成立.

**问题** 求以下不定方程的全部正整数解$(x,y,z)$：

(1) $\dfrac{\prod_{i=1}^{x} i!}{y!} = z^2$ (2) $\dfrac{\prod_{i=1}^{x} i!}{y!} = 2z^2$ (3) $\dfrac{\prod_{i=1}^{x} i!}{y!!} = z^2$

**猜想** (1) 问题中不定方程(1) 的全部正整数解是$(x,y,z)=(1,1,1)$,$(2,2,1)$,$(4k,2k,2^kb)$($k\in\mathbf{N}^*$,$b$ 由式③确定);

(2) 问题中不定方程(2) 的全部正整数解是$(x,y,z)=(4k-2,2k-1,2^{k-1}b)$($k\in\mathbf{N}^*$,$b$ 由式④确定);

(3) 问题中不定方程(3) 的全部正整数解是$(x,y,z)=(l,l,c)$($l\in\mathbf{N}^*$,当 $l=2k-1$($k\in\mathbf{N}^*$)时 $c$ 即式①中的 $a$;当 $l=2k$($k\in\mathbf{N}^*$)时 $c$ 即式②中的 $b$).

**注** 由式③,④,①② 可知猜想(1),(2),(3) 中的解是问题中不定方程(1),(2),(3) 的正整数解.

"新题征展"是《中学数学》读者最受欢迎的栏目之一,笔者也是该栏目的忠实读者,题题钻研,从中也受益匪浅[2].这里,笔者还想对贵刊提出一个建议:请贵刊能发表一些对"新题征展"中的题目进行研究的文章,因为"新题征展"中的很多题目背景深远,值得挖掘,有些题目就是后来被命题专家选中的高考题、竞赛题[3],像兄弟刊物《数学通报》也有类似于"新题征展"的栏目"数学问题",该刊每期都有两三篇文章是关于"数学问题"的研究的.笔者在这里衷心祝愿《中学数学》越办越好,也期待着更多的读者加入到"新题征展"中来.

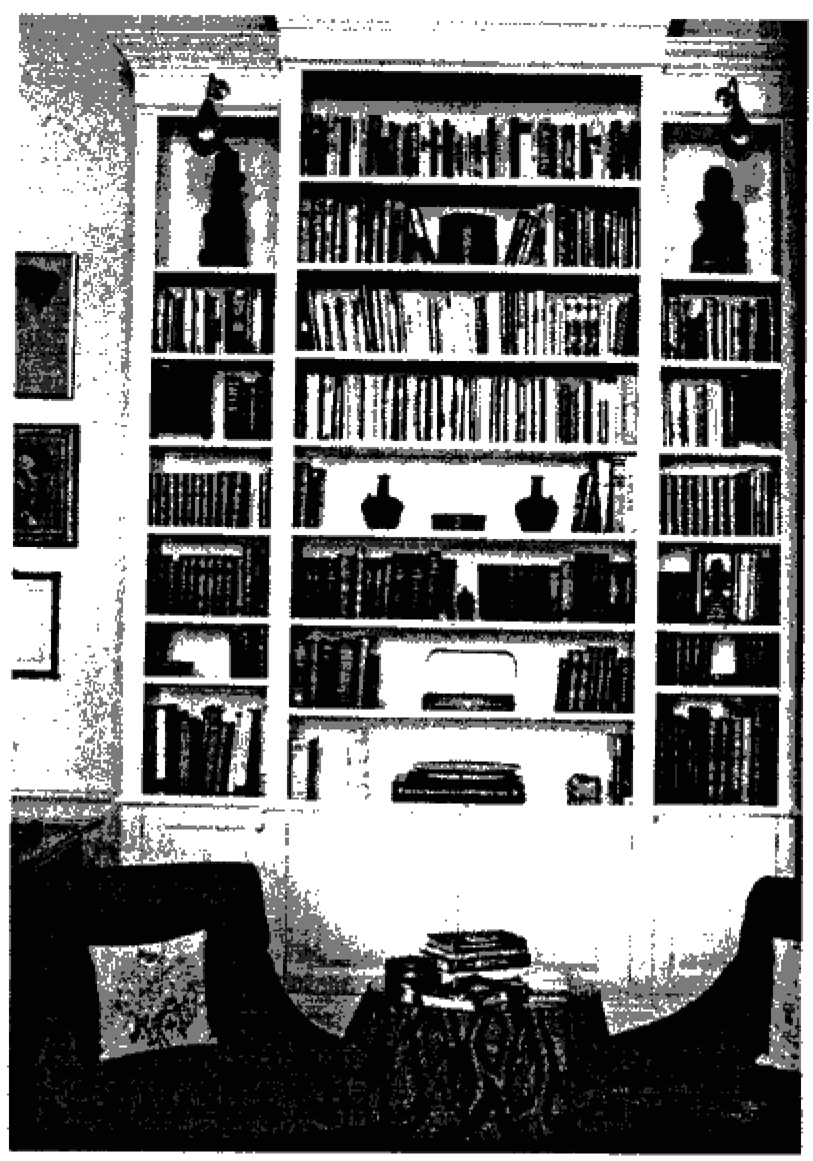
## 参考文献

[1] 甘志国.新题征展(103)[J].中学数学(高中),2009(1):20-22.

[2] 甘大旺,安振平,甘志国,等.新题征展 —— 百期感言[J].中学数学(高中),2008(10):1-2.

[3] 甘大旺.2008 年联赛题(12) 是曹大方老师一道征展新题的再现[J].中学数学(高中),2008(12):40-41.

# 集合与逻辑



# 数学逻辑奇妙无穷

## 敢问路在何方?

在数学王国的东南和东北方向坐落着两个村庄,其中一个叫诚实村,另一个叫说谎村.诚实村的各个居民都说实话,而说谎村的居民都说谎话.一名商人途径数学王国的一条东西大道去诚实村谈生意(如图1),当商人临近交叉路口时,见交叉路口上相向走来一人,商人知道这人是这两个村庄中的人,但不知道是哪个村庄的,也不知道哪条道通往诚实村.商人灵机一动,只问了此人一句话,便知道哪条路能往诚实村,你能猜出商人是怎样问的吗?

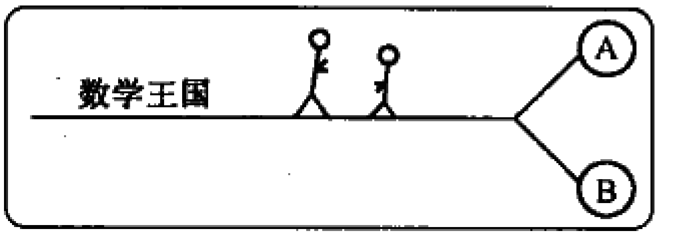



图 1

若按照平常的问路习惯,商人问:"去诚实村走哪条路"或"说谎村在哪个方向",明显得不到肯定的结果,因为所问的人或者说真话,或者说假话,如果把这个问题纳入数学问题的范畴,条件就是:某人或是诚实村的人,或是说谎村的人,所求是如何让此人说出哪是诚实村.因此,不管如何询问,最后由两个条件推出的结果唯一就行.这就需要我们把条件"某人或是诚实村的人,或是说谎村的人"看成一个整体来考虑问题,即"哪个村的人?"于是,商人可问:"你是哪个村的"或"你是从前面哪个村走过来的?"如果是诚实村的人,他手指的是诚实村,如果是说谎村的人,他也必然手指诚实村.

## 鲍西亚的肖像之谜

在莎士比亚的名剧《威尼斯商人》中,数学家斯摩林设置了一个有趣的故事情节:聪明秀丽的女主角鲍西亚对若干名求婚者说:"这里有三只盒子,金盒、银盒、铅盒各一只,每只盒子的铭牌上各写有一句话,这三句话中只有一句话是真话,谁能猜中我的肖像放在哪只盒子里(如图2),谁就是我的丈夫".

其中一位聪明的求婚者猜中了.

这位求婚者用了数学的思维方法.因为数学中的对与错是分明的,也就是

说这三句话的每一句要么真要么假，二者必居其一，且一句真两句假，而金盒、铅盒上的话相反，所以这两句一真一假，所以银盒上的话假，即“肖像在银盒里”.

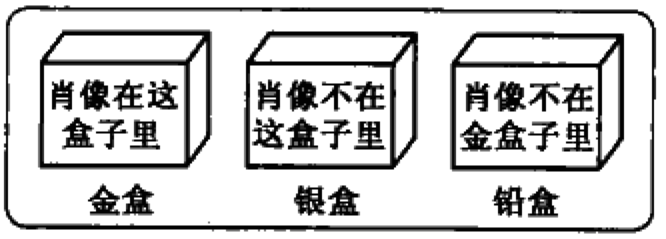


图2

## 傻瓜不看《十面埋伏》

当国产巨片《十面埋伏》隆重上演期间，某市电影院打出一幅醒目广告：傻瓜不看《十面埋伏》，引起附近众多居民的强烈反对，许多人曾因此广告向电影院交涉，但电影院就是不肯撤回广告，此时200多名没看此电影者自发组织起来，以电影院侵犯人权为由，一纸诉状将电影院告上了法庭.

想一想，这场官司到底谁胜谁负呢?经开庭审理，双方律师唇枪舌剑，法庭不能判决.一位中学生在一次开庭中用简捷而富有逻辑的语言令人折服，那就是从数学的角度看，这问题非常简单，广告是原命题：如果谁是傻瓜，那么谁就不看《十面埋伏》；原命题的逆命题是：如果谁不看《十面埋伏》，那么谁是傻瓜，一个命题(原命题)成立，逆命题不一定成立.因此，广告没有错误，错在人们对广告语言的误解，法院判定电影院没有赔偿的责任.

生活中富有哲理的问题，每当百思不得其解，就要靠数学的思维方法来解决.正确应用数学原理来分析解决问题，不仅有助于数学知识的应用，更能养心益智，还能提高自己的发明创造能力.

# 生活中的条件命题及逆否命题

同学们学习了充分条件、必要条件和充要条件后，可以探讨生活中名言警句中的条件关系，如：

(1) 水滴石穿；

(2) 骄兵必败，哀兵必胜；

(3) 有志者事竟成；

(4) 头发长，见识短；

(5) 名师出高徒；

(6) 放下屠刀，立地成佛；

(7) 兔子尾巴长不了；

(8) 不到长城非好汉；

(9) 春回大地，万物复苏；

(10) 海内存知己，天涯若比邻；

(11) 蜡炬成灰泪始干；

(12) 玉不琢，不成器；

(13) 瓦罐不离井边破.

可以从命题中两个条件之间的关系重新审视以上语句. 当然，生活语言不可能像数学命题一样准确，但应着重理解以上语句的哲理性，进而从这些方面理解命题中两个条件的关系.

下面语句中的前后两句话实际上是一对互为逆否关系的命题：

(1) 响水不开，开水不响；

(2) 真人不露相，露相非真人；

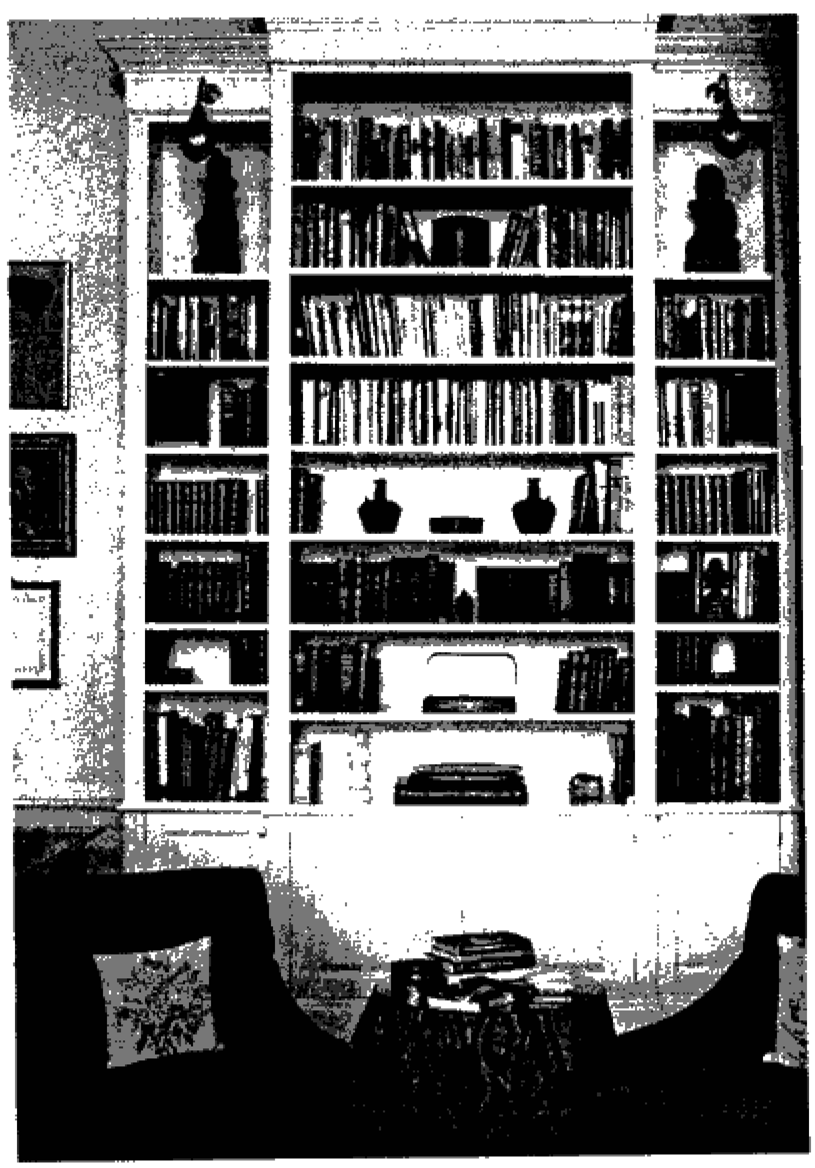
(3) 便宜不是货，是货不便宜；

(4) 走路不观景，观景不走路.

但"骄兵必败"与"哀兵必胜"不是一对互为逆否关系的命题，而是一对互否命题.

处处留心皆学问，生活处处有数学，数学也应用于日常生活的方方面面.

# 函数与方程



# 关于 $n$ 连贯多项式的几个结论

数集 $K$ 上的多项式 $f(x)+i(i=0,1,\cdots,n-1$,整数 $n\geqslant 2)$ 均在 $K$ 上可约,则称 $f(x)$ 为 $K$ 上的 $n$ 连贯多项式,二连贯多项式简称连贯多项式.自文献[1]提出 $n$ 连贯多项式的概念以来,有较多文献在研究它.一般在复数集 **C**,实数集 **R**,有理数集 **Q**,或整数集 **Z** 上研究 $n$ 连贯多项式.本文给出关于 $n$ 连贯多项式的几个结论(没有指明在哪个数集上时,指在任意数集上),这些结论都是由 $n$ 连贯多项式的定义容易证明的,所以多未证明.

**定理 1** (1) 复数集 **C** 上次数不小于 2,或 **R** 上次数不小于 3 的多项式均为 $n$ 连贯多项式;

(2) $ax^2+bx+c(a>0)$ 在 **R** 上为 $n$ 连贯多项式的充要条件是 $b^2-4a(c+n-1)\geqslant 0$.

**定理 2** $f(x)$ 为 $n$ 连贯多项式的充要条件是 $-f(x)-n+1$ 为 $n$ 连贯多项式.

**定理 3** $f(x)$ 为 $K$ 上的 $n$ 连贯多项式,$e(x)$ 为 $K$ 上的任意非常数多项式,则 $f(e(x))$ 也为 $K$ 上的 $n$ 连贯多项式.

**定理 4** (1) 若 $f(x)=a_{2m}x^{2m}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 $n$ 连贯多项式,则

$$f(-x)=a_{2m}x^{2m}-a_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+a_2x^2-a_1x+a_0$$

也是 $n$ 连贯多项式;

(2) 若 $g(x)=a_{2m+1}x^{2m+1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 $n$ 连贯多项式,则

$$-g(-x)-n+1=a_{2m+1}x^{2m+1}-a_{2m}x^{2m}+a_{2m-1}x^{2m-1}-\cdots+a_1x-a_0-n+1$$

也是 $n$ 连贯多项式.

**定理 5** 有理数集上不存在四连贯的二次多项式(见 1995 年第 12 期《数学通讯》甘志国文).

**定理 6** 整数集上存在五连贯的三次多项式.

比如 $4x^3-5x-2$,$4x^3+12x^2+7x-3$,$72x^3-102x^2+29x-2$ 就是.

定理 5 肯定了文献[2]的猜想 1,定理 6 否定了文献[2]的猜想 2.

**定理 7** 整数集上存在 $n$ 连贯的 $n$ 次多项式(见 1995 年第 8 期《数学通讯》余熙国文).

**定理 8** 有理数集上存在 $n+1$ 连贯的 $n$ 次多项式.

**证明** 先证明关于 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的方程组

$$\begin{cases} a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=-\dfrac{1}{2} \\ a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=-\dfrac{2}{3} \\ \quad\vdots \\ a_1+(n+1)a_2+(n+1)^2a_3+\cdots+(n+1)^{n-1}a_n=-\dfrac{n}{n+1} \end{cases} \qquad ①$$

有唯一解,且 $a_n\neq 0$.

系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

为范得蒙行列式,它的值

$$D=\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)=\prod_{k=1}^{n-1}k!\neq 0$$

所以上述方程组有唯一解,又

$$D_i=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{i-2} & -\dfrac{1}{2} & 2^i & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{i-2} & -\dfrac{2}{3} & 3^i & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n+1 & \cdots & (n+1)^{i-2} & -\dfrac{n}{n+1} & (n+1)^i & \cdots & (n+1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

行列式 $D,D_i$ 的元素皆为有理数,所以 $D,D_i$ 皆为有理数.由克莱姆规则,得上述方程组有唯一有理解 $a_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$.而

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-2} & -\dfrac{2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-2} & -\dfrac{n}{n+1} \end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & -1 \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} & -n \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & 1 \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n-1} k!$$

得

$$a_n = \frac{D_n}{D} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \neq 0$$

将 $a_i = \frac{D_i}{D}(i = 1,2,\cdots,n)$，代入 ① 变形即有

$$\begin{cases} 2^n a_n + \cdots + 2a_1 + 1 = 0 \\ 3^n a_n + \cdots + 3a_1 + 2 = 0 \\ \quad\vdots \\ (n+1)^n a_n + \cdots + (n+1)a_1 + n = 0 \end{cases} \qquad ②$$

设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x$，则 $f(x)$ 是有理数集上的 $n$ 次多项式，② 表明

$$f(i+1) + i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$$

所以 $f(x) + i$ 有因式 $x - (i+1)$，又 $f(x)$ 有因式 $x$，即 $f(x), f(x)+1,\cdots, f(x)+n$ 均在有理数集上可约.

所以 $f(x)$ 是有理数集上的 $n+1$ 连贯 $n$ 次多项式. 定理 8 成立.

**定理 9** 下列多项式均为整数集上的四连贯 $n(n \geqslant 3$ 次多项式$)$：

(1) $f(x) = 4x^n + 6x^{n-1} + 2x^{n-2} - 6x^2 - 7x - 2$；

(2) $g(x) = 24x^n - 20x^{n-1} + 4x^{n-2} - 6x^2 - x - 1$；

(3) $h(x) = 72x^n - 42x^{n-1} + 6x^{n-2} - 60x^2 + 23x - 2$.

**证明** (1) $f(x) + i(i = 0,1,2,3)$ 分别有因式 $2x+1, x+1, x, x-1$.

(2) $g(x) + i(i = 0,1,2,3)$ 分别有因式 $x-1, x, 3x-1, 2x-1$.

(3) $h(x) + i(i = 0,1,2,3)$ 分别有因式 $4x-1, 3x-1, x, x-1$.

最后,笔者提出一个猜想.

**猜想** 若在有理数集上存在 $n$ 连贯的 $m$ 次多项式,则在整数集上也存在 $n$ 连贯的 $m$ 次多项式.

由定理 7 知,此猜想在 $n \leqslant m$ 时成立.

## 参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.
[2] 杨仕椿.关于 whc78,whc79 的解决[J].数学通讯,1995(2):19-20.

# 一些连贯、三连贯的二次多项式

多项式"连贯"的定义可见文献[1].我们证得了

**定理 1** 如下多项式均在整数集上连贯:

(1) $ax^2+[(4k\pm1)a\pm1]x+2k[(2k\pm1)a\pm1]$($|a|\in\mathbf{N}^*$, $k\in\mathbf{Z}$,正负号前后选取一致).

特例:(1) $ax^2+(a+1)x$($|a|\in\mathbf{N}^*$).

(2) $ax^2+(5a+1)x+(6a+2)$($|a|\in\mathbf{N}^*$).

(3) $(b-1)x^2+bx$($b\in\mathbf{Z}, b\neq1$) 及 $-2x^2+x$.

(4) $c(c+1)(2c+1)(c^2-c-1)x^2-(3c^3+c^2-2c-1)x+c$($c\in\mathbf{Z}$, $c\neq0,-1$) 与 $2x^2-x-1$.

(5) $ax^2+bx+c$,其中 $a=pq(p+q)(cp-q)\neq0$, $b=q^2-2cpq-cp^2$($p, q, c\in\mathbf{Z}$).

**定理 2** 以下多项式均在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯:

(1) $ax^2+bx+c$,其中 $a=mn(m-n)(2m-n)\neq0$, $b=2ka\pm(2m^2-n^2)$, $c=k[ka\pm(2m^2-n^2)]$($m,n,k\in\mathbf{Z}$, $\pm$ 号选取前后一致,下同)

(2) $ax^2+bx+c$,其中 $a=2(l^2-1)(l+3)\neq0$, $b=[2ak\pm(l^2+6l+1)]$, $c=k[ak\pm(l^2+6l+1)]$, $k,l\in\mathbf{Z}$.

(3) $6x^2+bx+c$, $b=6k\pm1$, $c=\frac{1}{2}k(3k\pm1)-2$($k\in\mathbf{Z}$).

(4) $30x^2+bx+c$, $b=30k\pm t$, $c=\frac{1}{2}k(15k\pm t)-s$, $k\in\mathbf{Z}$, ($t=7, s=2$) 或($t=13, s=1$).

(5) $2(c^2-1)(c+3)x^2+(3c^2+6c-1)x+c$($c\in\mathbf{Z}, c\neq1,-1,-3$).

**定理 3** (1) 当 $c=1$ 或 $-3$ 时, $ax^2+bx+c$($a,b\in\mathbf{Z}, a\neq0$) 在 $\mathbf{Z}$ 上不能三连贯;(2) 否则,存在 $b,c\in\mathbf{Z}$,使之三连贯.

## 参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.

# 整数集上四连贯 $n$ 次多项式的构造

连贯,$m(m\in\mathbf{N}^*,m\geqslant 3)$ 连贯的定义见文献[1]或文献[2].

约定:本文中表示数的字母均表示整数.

**定理**　当

$$a_{n-i}=p_1q_1k_{i-1}+(pq_1+p_1q)k_i+pqk_{i+1}$$

$$(i=0,1,\cdots,n-1,n\in\mathbf{N},n\geqslant 2,k_{-1}=k_0=0)$$

$$k_n=\pm 1,pq_1-p_1q=\pm 1$$

$$a_0=p_1(q_1k_{n-1}+qk_n)$$

时,多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_{n-i}x^{n-i}+a_0$ 在整数集 $\mathbf{Z}$ 上连贯,且 $f(x)+j(j=0,1)$ 分别有因式 $px+p_1,qx+q_1$.

**证明**　这是因为由题设可证得:

$$f(x)=(px+p_1)\sum_{i=0}^{n-1}(q_1k_i+qk_{i+1})x^{n-i-1}$$

$$f(x)+1=(qx+q_1)\sum_{i=0}^{n-1}(p_1k_i+pk_{i+1})x^{n-i-1}$$

在定理中可选:

(1)$k_n=1,q_1=rp_1+1,p=p_1t+1,q=p_1rt+r+t$;

(2)$k_n=-1,p_1=rq_1+1,p=q_1t+1,p=q_1rt+r+t$.

在定理中选 $a_0=1$ 或 $-2$,即可构造出 $\mathbf{Z}$ 上的三连贯 $n$ 次多项式.

**推论1**　在以下各条件下$(k_{-1}=k_0=0)$,多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_{n-i}x^{n-i}$ 在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯,且 $f(x)+j(j=0,1,2)$ 分别有因式 $x,px+p_1,qx+q_1$($p,p_1,q,q_1$ 见下面的证明):

(1)$a_{n-i}=\pm k_{i-1}+(\pm 2k_{n-1}-3)k_i+(\pm k_{n-1}^2-3k_{n-1}\pm 2)k_{i+1},k_n=-1$;

(2)$a_{n-i}=\pm k_{i-1}-(\pm 2k_{n-1}-3)k_i+(\pm k_{n-1}^2-3k_{n-1}\pm 2)k_{i+1},k_n=1$;

(3)$a_{n-i}=\pm 2k_{i-1}+(\pm 4k_{n-1}-3)k_i+(\pm 2k_{n-1}^2-3k_{n-1}\pm 1)k_{i+1},k_n=-1$;

(4)$a_{n-i}=\pm 2k_{i-1}-(\pm 4k_{n-1}-3)k_i+(\pm 2k_{n-1}^2-3k_{n-1}\pm 1)k_{i+1},k_n=1$.

**证明**　只需用定理证明 $f(x)+1$ 连贯,且定理中的 $a_0=1$.选:

(1)$p_1=1,q_1=\pm 1,p=k_{n-1}\mp 2,q=\pm k_{n-1}-1,k_n=-1$;

(2) $p_1 = 1, q_1 = \pm 1, p = -k_{n-1} \pm 2, q = \mp k_{n-1} + 1, k_n = 1$;

(3) $p_1 = 1, q_1 = \pm 2, p = k_{k-1} \mp 1, q = \pm 2k_{n-1} - 1, k_n = -1$;

(4) $p_1 = 1, q_1 = \pm 2, p = -k_{n-1} \pm 1, q = \mp 2k_{n-1} + 1, k_n = 1$.

即可获证.

在推论 1 中,若 $x - 1 \mid f(x) - 1$,则 $f(x) - 1$ 在 **Z** 上四连贯;若 $x - 1 \mid f(x) + 3$,则 $f(x)$ 在 **Z** 上四连贯.即由推论 1 可构造出 **Z** 上的四连贯 $n$ 次多项式.

**推论 2** 表 1 中的五类多项式 $f(x)$ 均在 **Z** 上四连贯($n \geqslant 3, k_n = -1$):

| 类别 | $\sum_{i=1}^{n-2} k_i$ 的值 | $k_{n-1}$ 的值 | $f(x)$ 的表达式 | $f(x) + j(j = 0,1,2,3)$ 分别有因式 |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $-2$ | 3 | $\sum_{i=0}^{n-1}(k_{i-1} + 3k_i + 2k_{i+1})x^{n-i} - 1$ | $x - 1, x, x + 1, 2x + 1$ |
| (2) | 4 | $-1$ | $\sum_{i=0}^{n-1}(k_{i-1} - 5k_i + 6k_{i+1})x^{n-i} - 1$ | $x - 1, x, 3x - 1, 2x - 1$ |
| (3) | 6 | $-5$ | $\sum_{i=0}^{n-1}(k_{i-1} - 7k_i + 12k_{i+1})x^{n-i} - 2$ | $4x - 1, 3x - 1, x, x - 1$ |
| (4) | 0 | 0 | $\sum_{i=0}^{n-1}(2k_{i-1} + 3k_i + k_{i+1})x^{n-i} - 2$ | $x + 2, x + 1, x, x - 1$ |
| (5) | 4 | $-3$ | $\sum_{i=0}^{n-1}(2k_{i-1} - 9k_i + 10k_{i+1})x^{n-i} - 2$ | $5x - 2, 2x - 1, x, x - 1$ |

**证明** (1) 在推论 1(1) 中"±"选"+"可得 $f(x) + 1$ 在 **Z** 上三连贯,且 $f(x) + j(j = 1,2,3)$ 分别有因式 $x, x + 1, 2x + 1$.又可证 $x - 1 \mid f(x)$,故云.

(2) 在推论 1(1) 中"±"选"+",同上可证.

(3) 在推论 1(1) 中"±"选"−",可得 $-f(x) - 2$ 在 **Z** 上三连贯,即 $f(x)$ 在 **Z** 上三连贯,且 $f(x) + j(j = 0,1,2)$ 分别有因式 $4x - 1, 3x - 1, x$.又可证 $x - 1 \mid f(x) + 3$,故云.

(4) 在推论 1(3) 中"±"选"−",同上可证.

(5) 同上可证.

**推论 3** 表 2 中的五个多项式 $f(x)$ 均在 **Z** 上四连贯($n \geqslant 3$),且 $f(x) + j(j = 0,1,2,3)$ 分别有同表 1 相同的因式:

| 个次 | $f(x)$ 的表达式 |
|---|---|
| 1 | $4x^n + 6x^{n-1} + 2x^{n-2} - 6x^2 - 7x - 2$ |
| 2 | $24x^n - 20x^{n-1} + 4x^{n-2} - 6x^2 - x - 1$ |
| 3 | $72x^n - 42x^{n-1} + 6x^{n-2} - 60x^2 + 23x - 2$ |
| 4 | $k_1x^n + 2k_1x^{n-1} - k_1x^{n-2} - 2k_1x^{n-3} - x - 2(n \geqslant 4, \mid k_1 \mid \in \mathbf{N}^*)$ |
| 5 | $40x^n - 36x^{n-1} + 8x^{n-2} - 30x^2 + 17x - 2$ |

**证明** (1) 在推论 2(1) 中选 $k_1=-2, k_i=0(i=2,3,\cdots,n-2)$.

(2) 在推论 2(2) 中选 $k_1=4, k_i=0(i=2,3,\cdots,n-2)$

(3) 在推论 2(3) 中选 $k_1=6, k_i=0(i=2,3,\cdots,n-2)$

(4) 在推论 2(4) 中选 $k_2=-k_1, k_i=0(i=3,4,\cdots,n-2)$(因为 $x \mid f(x)+2$,所以 $n \geqslant 4$)

(5) 在推论 2(5) 中选 $k_1=4, k_i=0(i=2,3,\cdots,n-2)$

**推论 3** (1)、(2)、(3) 即文献[2] 的定理 9.

## 参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.

[2] 甘志国.关于 $n$ 连贯多项式的几个结论[J].中学数学,1998(11):35-37.

# 用[x]的一条性质解题

通常用[x]表示不大于 $x$ 的最大整数，它具有如下性质[1]：

若 $[x]=[y]$，则 $|x-y|<1$.

运用这条性质，可解下面类型的习题：

若 $[f(x)]=[g(x)]$，求 $x$ 的取值范围.

本文将举例说明这类习题的解法.

**例1** 若 $[5x+2]=[2x+5]$，求 $x$ 的取值范围.

**解** 因为 $[5x+2]=[2x+5]$，所以由上述性质，得

$$|(5x+2)-(2x+5)|<1,\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$$

因为

$$\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$$

所以

$$\begin{cases}5\frac{1}{3}<5x+2<8\frac{2}{3}\\6\frac{1}{3}<2x+5<7\frac{2}{3}\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}[5x+2]=5,6,7,8\\ [2x+5]=6,7\end{cases}$$

所以 $[5x+2]=[2x+5]=6$ 或 7. 当 $[5x+2]=[2x+5]=6$ 时

$$\begin{cases}6\leqslant 5x+2<7\\6\leqslant 2x+5<7\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{4}{5}\leqslant x<1\\\frac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$$

所以

$$\frac{4}{5}\leqslant x<1$$

当 $[5x+2]=[2x+5]=7$ 时

$$\begin{cases}7\leqslant 5x+2<8\\7\leqslant 2x+5<8\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}1 \leqslant x < \dfrac{6}{5}\\ 1 \leqslant x < \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

所以
$$1 \leqslant x < \frac{6}{5}$$

所以所求 $x$ 的取值范围是$\frac{4}{5} \leqslant x < 1$,或$1 \leqslant x < \frac{6}{5}$,即$\frac{4}{5} \leqslant x < \frac{6}{5}$.(不需再检验)

**例2** 若$[y^2]=[y+1]$,求 $y$ 的取值范围.

**解** 由性质,得$|y^2-(y+1)|<1$,即$-1<y<0$,或$1<y<2$.

当$-1<y<0$时,$[y^2]=[y+1]=0$.

当$1<y<2$时,$\begin{cases}1<y^2<4\\ 2<y+1<3\end{cases}$,所以$[y^2]=[y+1]=2$,

$$\begin{cases}2 \leqslant y^2 < 3\\ 2 \leqslant y+1 < 3\end{cases} \qquad \sqrt{2}<y<\sqrt{3}$$

所以所求 $y$ 的取值范围是

$$-1<y<0 \quad 或 \quad \sqrt{2}<y<\sqrt{3}$$

## 参考文献

[1] 张文忠.函数[x]的一个性质[J].数学通讯,1993(4):10.

# 两道例题的简解

本文给出文献[1]中例2,例3这两道例题的简洁解法.

**例2** 解方程 $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

**解** 易知方程的解满足 $x>1$ ①

将原方程两边平方,得

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$$

$$\frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1=\left(\frac{35}{12}\right)^2+1$$

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)^2=\left(\frac{37}{12}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}$$

由①可设 $x^2-1=y^2(y>0)$ ②

得 $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}$,所以 $y=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}$,又由①②可得 $x=\dfrac{5}{3}$ 或 $\dfrac{5}{4}$.

**例3** 解不等式 $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}$.(第四届IMO试题)

**解** 易知 $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 3$,在定义域内 $f(x)$ 是减函数,当且仅当 $x=1-\dfrac{\sqrt{31}}{8}$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为

$$-1\leqslant x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$$

**注** 文献[1]是用三角变换解这两个例题的,没有本文简单、直接.

## 参考文献

[1] 吴善和.运用三角代换解题例说[J].数学教学研究,1995(4):17-18.

# “长三针”问题的简洁解法

文献[1]第155页叙述了一个有趣的数学问题——“长三针”:

手表还差15分稍多一些就到中午,突然停了.奇怪得很,秒针刚好指在时针和分针的正中间,也就是说,成为夹角的平分线了(如图1).

请问:这究竟是什么时间呢?

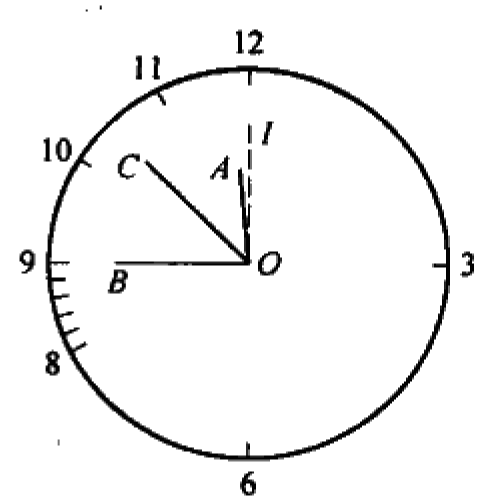



图1

在时针问题中,本题属于难度极大的,傲视同类,堪称“骄子”.

文献[1]第193 ~ 195页给出的解答很繁琐,以下解答却很简洁自然,也具有一般性.

设手表上所示的时间是11时44分$x$秒($0 < x < 60$),此时时针、分针、秒针分别在$OA$,$OB$,$OC$的位置,又设$OI$指向12点整.

时针每时旋转30°,所以时针从$OI$顺时针旋转到$OA$旋转的角度是$30° \cdot (11 + \frac{44}{60} + \frac{x}{3\,600})$;

分针每分旋转6°,所以分针从$OI$顺时针旋转到$OB$旋转的角度是$6° \cdot (44 + \frac{x}{60})$;

秒针每秒旋转6°,所以秒针从$OI$顺时针旋转到$OC$旋转的角度是$6° \cdot x$.

于是可得

$$\angle AOC = 30° \cdot \left(11 + \frac{44}{60} + \frac{x}{3\,600}\right) - 6° \cdot x$$

$$\angle BOC = 6° \cdot x - 6° \cdot (44 + \frac{x}{60})$$

从而可列出方程:

$$30(11 + \frac{44}{60} + \frac{x}{3\,600}) - 6x = 6x - 6(44 + \frac{x}{60})$$

解得 $x = 51\frac{1\,143}{1\,427}$.

即手表上所示的时间是11时44分$51\frac{1\,143}{1\,427}$秒.

# 参考文献

[1] 谈祥柏,杨京玉.趣味代数300题[M].北京:中国青年出版社,1998.

# 谈谈周期函数

一提到周期函数,我们马上就会想到三角函数或是与三角函数有关的一些函数,例如

$$y = \sin x, y = 2 + \cos x, y = \tan x + \cot x$$

甚至有的学生认为凡是周期函数必定都与三角函数有关.其实并非这样,我们能够举出许多不含有三角函数的周期函数.

**例 1** 用 $t$ 表示从某一天算起的天数,用 $y$ 表示 $t$ 那一天是星期几,很明显 $y$ 就是 $t$ 的一个周期函数.因为每当 $t$ 增加 7 时,$y$ 又回到了原来的星期几,即这个函数的最小正周期是 7.

**例 2** 若用 $\{x\}$ 表示任何一个实数 $x$ 的小数部分,例如 $\{2.5\} = 0.5, \{3\} = 0, \{-0.2\} = 0.8$,则 $y = f(x) = \{x\}$ 是周期函数.这是因为 $f(x+1) = \{x+1\} = \{x\} = f\{x\}$,这个函数的最小正周期是 1(见图 1).

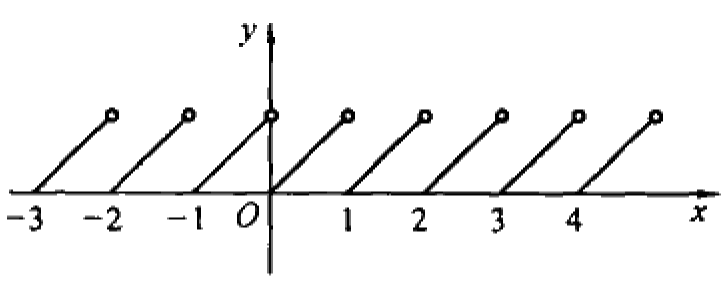



图 1

我们一般考虑定义域为 $\mathbf{R}$ 的周期函数,其定义为:

**定义** 对于函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$,若存在非零常数 $T$,使得对于任意的 $x \in \mathbf{R}$,都有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,$T$ 是它的一个周期.若周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数,则这个最小的正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

**例 3** $f(x) = \sin x$ 是周期函数,其最小正周期是 $2\pi$,函数图象呈现周期性变化(见图 2).

是不是所有的周期函数都有最小正周期呢?

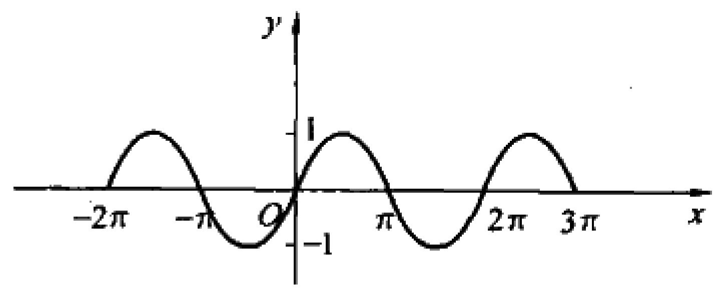



图 2

**例 4** 常数函数 $f(x)=c$ 是周期函数，任意非零实数都是它的周期，因而它没有最小正周期.

**例 5** 著名的迪利克雷(Dirichlet, 1805—1859) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & (x\in \mathbf{Q})\\ 0 & (x\in \complement_R Q)\end{cases}$$

是周期函数，任意非零有理数都是它的周期，任意无理数都不是它的周期. 此函数没有最小正周期.

**定理 1** 若 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 是周期函数，且 $x\in \mathbf{R}$ 时，复合函数 $g[f(x)]$ 均有意义，则 $g[f(x)]$ 也是周期函数.

定理 1 的证明并不难，读者可以自己完成.

由定理 1 易知，若 $f(x)$ 是周期函数，则 $|f(x)|$，$f^2(x)$，$a^{f(x)}$($a$ 是正常数) 都是周期函数，但它们与 $f(x)$ 的最小正周期不一定相同，比如 $y=\sin x$ 的最小正周期是 $2\pi$，而 $y=|\sin x|$ 的最小正周期是 $\pi$(见图 3)，$y=\tan x$ 与 $y=|\tan x|$ 的最小正周期都是 $\pi$.

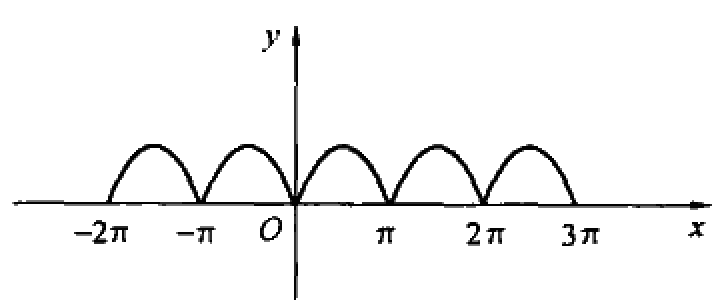



图 3

同学们还可以思考以下问题：$y=\sin x^2$，$y=\sin|x|$ 是周期函数吗？若 $f^2(x)$ 是周期函数，$f(x)$ 也是周期函数吗？

两个周期函数的和、差、积、商一定是周期函数吗？

**定理 2** 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 均是有最小正周期的周期函数，其最小正周期分别为 $T_1$，$T_2$，则当且仅当 $\frac{T_1}{T_2}$ 为有理数时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的和(差、积、商) 是周期函数.

同样，定理 2 的证明也留给读者.

**例 6** 因为 $\sin 3x$ 与 $\cos 2x$ 的最小正周期分别是$\frac{2}{3}\pi,\pi$，它们的比是 $\frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi}=\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$是有理数，所以 $\sin 3x+\cos 2x$ 是周期函数，其最小正周期是 $2\pi$.

**例 7** 因为 $\sin\sqrt{3}x$ 与 $\cos x$ 的最小正周期之比是$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}:2\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}$，它是个无理数，所以 $\sin\sqrt{3}x\cdot\cos x$ 不是周期函数.

**推论** 两个最小正周期相同的函数的和、差、积、商都是周期函数.

**例 8** $\cot x$ 与 $\tan x$ 的最小正周期都是$\pi$，但周期函数 $y=\cot x-\tan x$ 的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$. 因为

$$\cot x-\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2\sin x\cos x}=2\cot 2x$$

两个非周期函数的和、差、积、商可以是周期函数，也可以不是周期函数.

**例 9** 函数 $y_1=-x+\sin x$ 与 $y_2=x$ 均不是周期函数，但其和 $y_1+y_2=\sin x$ 是周期函数.

**例 10** 函数 $y_1=x+\sin x$ 与 $y_2=x$ 均不是周期函数，其和 $y_1+y_2=2x+\sin x$ 也不是周期函数.

一个非周期函数与一个周期函数的和、差、积、商可以是周期函数，也可以不是周期函数.

**例 11** 函数 $y_1=\sin\sqrt{3}x\cdot\cos x$ 不是周期函数，$y_2=\sec x$ 是周期函数，其积 $y_1\cdot y_2=\sin\sqrt{3}x$ 不是周期函数.

**例 12** 函数 $y_1=\sin\sqrt{3}x\cdot\cos x$ 不是周期函数，$y_2=\sin x$ 是周期函数，其积 $y_1\cdot y_2=\frac{1}{2}\sin 2x\sin\sqrt{3}x$ 不是周期函数.

## 参考文献

[1] 罗元. 数学分析简明教程(上册)[M]. 武汉：武汉工业大学出版社，1988.
[2] 马明，宜立新. 三角函数和差积商的周期[M]. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1984.

# 用素数判定多项式不可约

本文介绍两个用素数列来判定多项式不可约的定理，从而把素数与不可约多项式紧密联系起来了.

**定理 1** 对于整系数多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i (n \in \mathbf{N}, a_n \neq 0) \qquad ①$$

若存在一个正整数 $p > 1 + \max\limits_{0 \leq i \leq n} \{|a_i|\}$，使 $|f(p)|$ 不是合数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

为证明定理 1，先给出两个引理.

**引理 1** 多项式 ① 的根的模必小于

$$u = 1 + \max_{0 \leq i \leq n} \{|a_i|\}$$

**证明** 当 $f(z) = 0$ 时，假设 $|z| \geq u$（因为 $a_n \neq 0$，所以 $u \geq 2$），得

$$|f(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - (u-1)\sum_{i=0}^{n-1} |z|^i \geq$$

$$1 \cdot |z|^n - (u-1) \cdot \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \geq 1$$

即 $|f(z)| \geq 1$，这与 $f(z) = 0$ 矛盾！所以引理 1 成立.

**引理 2** 若 $\mathrm{Re}\alpha \leq u < p$，则

$$|p - \alpha| > |u - \alpha|$$

**证明** 由题设，得 $p + u > 2\mathrm{Re}\alpha$，由此可证

$$\sqrt{(p - \mathrm{Re}\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\alpha)^2} > \sqrt{(u - \mathrm{Re}\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\alpha)^2}$$

即

$$|p - \alpha| > |u - \alpha|$$

**定理 1 的证明** 假设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上可约[1]. 设 $f(x) = g(x)h(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 均为非零次整系数多项式.

又设 $g(x)$ 的全部复数根是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k (k \in \mathbf{N}^*)$，有

$$g(x) = b\prod_{j=1}^{k}(x - \alpha_j)(b \text{ 是非零整数})$$

因为 $g(\alpha_j) = 0 (j = 1, 2, \cdots, k)$，所以 $f(\alpha_j) = 0$. 由引理 1，得 $|\alpha_j| < u$，所以

$$\mathrm{Re}\alpha_j < u < p$$

由引理1得$f(u)\neq 0$,所以$g(u)\neq 0$,$|g(u)|\geqslant 1$.据引理2,$|p-\alpha_i|>|u-\alpha_i|$.所以

$$|g(p)|=|b|\prod_{j=1}^{k}|p-\alpha_j|>$$

$$|b|\prod_{j=1}^{k}|u-\alpha_j|=|g(u)|\geqslant 1$$

即$|g(p)|>1$.同理$|h(p)|>1$.

得$|f(p)|=|g(p)|\cdot|h(p)|$为合数,这与题设矛盾,所以定理1成立.

**定理2** 对于整系数多项式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i(n\in\mathbf{N},a_n\neq 0,a_na_{n-1}\geqslant 0) \qquad ②$$

若存在一个正整数$p>\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{2,|a_i|\}$,使$|f(p)|$不是合数,则$f(x)$在$\mathbf{Q}$上不可约.

**引理3** 多项式②的根的实部小于$v$($v$是不小于$\frac{1+\sqrt{4u'-3}}{2}$的最小整数,$u'=1+\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{2,|a_i|\}$).

**证明** $f(z)=0$时,假设$\mathrm{Re}z\geqslant v$(有$v\geqslant\frac{1+\sqrt{4u'-3}}{2}$).

因为$|z|\geqslant\mathrm{Re}z\geqslant v\geqslant\frac{1+\sqrt{4u'-3}}{2}>1$(因为$u'\geqslant 3$),所以$1-\frac{u'-1}{|z|^2-|z|}\geqslant 0$.

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|\geqslant\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\right|-\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{z^{n-i}}\right|>$$

$$\left|\mathrm{Re}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\right)\right|-(u'-1)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{|z|^i}=$$

$$\left|a_n+a_{n-1}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right|-\frac{u'-1}{|z|^2-|z|}=$$

$$|a_n|+|a_{n-1}|\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{u'-1}{|z|^2-|z|}$$

$$(\text{因为 } a_na_{n-1}\geqslant 0,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geqslant 0)\geqslant$$

$$1-\frac{u'-1}{|z|^2-|z|}\geqslant 0$$

即$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|>0$,所以$f(z)\neq 0$,这与$f(z)=0$矛盾,所以引理3成立.

**定理2的证明** 假设$f(x)$在$\mathbf{Q}$上可约,则可设$f(x)=g(x)h(x)$,$g(x)$,

$h(x)$ 均为次数非零的整系数多项式.

设 $g(x) = b\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)$（$b$ 是非零整数）.

可得 $f(\alpha_j) = 0(j = 1,2,\cdots,k)$. 由引理 3 得 $\mathrm{Re}\alpha_j < v, v > 1, v \in \mathbf{N}$.

因为 $f(v) \neq 0$，所以 $g(v) \neq 0$，$|g(v)| \geq 1$.

还可证 $|p-\alpha_j| > |v-\alpha_j|$（因为可证 $\mathrm{Re}\alpha_j < v < u' \leq p$（由 $u' \geq 3$ 方可证得 $v < u'$），再由引理 2 即得）. 所以

$$|g(p)| = |b|\prod_{j=1}^{k}|p-\alpha_j| > |b|\prod_{j=1}^{k}|v-\alpha_j| = |g(v)| \geq 1$$

即 $|g(p)| > 1$. 同理有 $|h(p)| > 1$.

所以 $|f(p)|$ 是合数，这与题设矛盾，所以定理 2 成立.

**推论** 对于整系数多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i (n \in \mathbf{N}, a_0 a_n \neq 0, a_0 a_1 \geq 0) \qquad ③$$

若存在一个正整数 $p > \max_{0 \leq i \leq n}\{2, |a_i|\}$，使 $|f(p)|$ 不是合数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

**证明** 假设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约，则可设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \left(\sum_{i=0}^{k} b_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n-k} c_i x^i\right)(k \in \mathbf{N}, k < n)$$

由此可得以下关于 $x, y$ 的恒等式成立.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i} = \left(\sum_{i=0}^{k} b_i x^i y^{k-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-k} c_i x^i y^{n-k-i}\right)$$

令 $x = 1$，得以下关于 $y$ 的恒等式：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = \left(\sum_{i=0}^{k} b_i y^{k-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-k} c_i y^{n-k-i}\right)$$

得
$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n$$

在 $\mathbf{Q}$ 上可约，这与定理 2 矛盾！所以推论成立.

**例** 判定下列多项式在 $\mathbf{Q}$ 上是否可约：

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 4$;

(2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 9$;

(3) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x - 9$.

**解** (1) 因为 $f(7) = 1\,733$ 是素数，所以由定理 1 知 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

(2) 因为 $f(10) = 2\,339$ 是素数，所以由定理 2 知 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

(3) 因为 $f(10) = 2\,741$ 是素数，所以由推论知 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

以上多项式不可约均不能用 Eisenstein 判别法[2] 直接判别.

**猜想** 若 $f(x)$ 是次数非零的整系数不可约多项式，且其各项系数互素，则数列 $\{|f(n)|\}$ 中有无限多项是素数.

(当 $f(x)$ 是一次多项式时，上述猜想即算术级数中的迪利克雷定理.)

若猜想成立，定理 1,2 就给出了用素数判定不可约多项式的充要条件. 应当注意，两个定理中要求 $p$ 充分大的条件不能去掉. 比如 $f(x) = x^2 - 4$ 时，$|f(1)|$，$|f(3)|$ 均为素数，但 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约；$f(x) = x^2 - 1$ 时，$|f(2)|$ 是素数，但 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约.

## 参考文献

[1] 熊庭煌. 高等代数[M]. 武汉：中国地质大学出版社，1989.
[2] 郑格于. Eisenstein 判别法的应用[J]. 数学通报，1988(2)：17-18.

# 函数 $f(x)=\log_x a$ 的单调性

读者都熟悉对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，本文介绍与它有关的另一个函数 $f(x)=\log_x a(a>0,a\neq 1)$，这里只谈它的单调性，由此为解决与此函数相关的客观题(常见题型)，提供了一种快捷的方法.

由对数的定义知，函数 $f(x)=\log_x a(a>0,a\neq 1)$ 的定义域是 $\{x\mid x>0$ 且 $x\neq 1\}$；值域是非零实数集 $\mathbf{R}^*$ (因为由对数换底公式知 $f(x)=\frac{1}{\log_a x}$).

下面看函数 $f(x)=\log_x a$，即 $f(x)=\frac{1}{\log_a x}$ 的单调性.

(1) 当 $a>1$ 时，因为 $u=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$F(u)=\frac{1}{u}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上均是减函数，所以由复合函数的单调性规律"同则增，异则减"，得

**定理1** 当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_x a$ 在 $(0,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 上均是减函数，且 $x\in(0,1)$ 时，$\log_x a<0$；$x\in(1,+\infty)$ 时，$\log_x a>0$.

(2) 当 $0<a<1$ 时，因为 $u=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$F(u)=\frac{1}{u}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上均是减函数，所以有

**定理2** 当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_x a$ 在 $(0,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 上均是增函数，且 $x\in(0,1)$ 时，$\log_x a>0$；$x\in(1,+\infty)$ 时，$\log_x a<0$.

**例1** 已知 $\log_a\frac{1}{\sqrt{2}-1}<\log_b\frac{1}{\sqrt{2}-1}<0$，$a,b$ 为不等于1的正数，则必有 (　　)

(A) $a>b>1$　　(B) $a<b<1$

(C) $b>a>1$　　(D) $b<a<1$

**解** 由定理1知，函数 $y=\log_x\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，即 $y=\log_x(\sqrt{2}+1)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，且 $y<0$ (否则 $y>0$)，所以 $1>a>b>0$，选D.

**例2** 若 $\log_a(\pi-3)<\log_b(\pi-3)<0$，$a,b$ 为不等于1的正数，则 (　　)

(A) $a>b>1$　　(B) $a<b<1$

(C) $b>a>1$　　(D) $b<a<1$

**解** 由定理 2 知,函数 $y=\log_x(\pi-3)$ 在$(1,+\infty)$上是增函数,且 $y<0$(否则 $y>0$),所以 $1<a<b$,选 C.

**例 3** 比较 $\log_{\frac{1}{2}}3$ 与 $\log_{\frac{1}{5}}3$ 的大小.

**解** 由定理 1 知,函数 $y=\log_x 3$ 在$(0,1)$上是减函数,所以 $\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{5}}3$.

**例 4** 由以下两种情形均证明 $\log_a b>\log_c d>1$:

(1)$1<a<c,\frac{b}{a}\geqslant\frac{d}{c}>1$;

(2)$1>a>c>0,0<\frac{b}{a}\leqslant\frac{d}{c}<1$.

**证明**

$$\log_a\frac{b}{a}-\log_c\frac{d}{c}=\log_a b-\log_c d \quad ①$$

在条件(1)或(2)下:

由对数函数的单调性,得

$$\log_a\frac{b}{a}\geqslant\log_a\frac{d}{c} \quad ②$$

由定理 1,2,得

$$\log_a\frac{d}{c}>\log_c\frac{d}{c}>0 \quad ③$$

由 ①②③,得

$$\log_a b>\log_c d>1$$

由例 4 的结论(1)还可得一些常见的对数不等式:

$$\log_a(a+1)>\log_{a+1}(a+2)(a>1) \quad ④$$

$$\log_a(a+\varepsilon)>\log_{a+\varepsilon}(a+2\varepsilon)(a>1,\varepsilon>0) \quad ⑤$$

$$\log_a(a+\varepsilon)>\log_c(c+\varepsilon)\quad(1<a<c,\varepsilon>0) \quad ⑥$$

$$\log_a(a+\varepsilon)>\log_c(c+\delta)\quad(1<a<c,\varepsilon\geqslant\delta\geqslant0,\varepsilon\neq0) \quad ⑦$$

文献[1]第 37 页“试证 ……”一行的不等式有误,该不等式中应添上条件“$a\neq0$”.

**注** 把例 4 中的“$\log_a b>\log_c d>1$”改为“$0<\log_b a<\log_d c<1$”所得结论也成立,④ ~ ⑦ 也可作类似的改动.

## 参考文献

[1] 刘晓波,钱长蓉.一个对数不等式的新证法[J].教学与研究(中学数学),1986(3):17-18.

# 一类问题的统一解法

**题1** 方程 $x+\sin x=\frac{\pi}{2}$, $x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$ 的根分别为 $a,b$,则 $a+b$ 等于________.

**题2** 方程 $x+x^3=3$, $x+\sqrt[3]{x}=3$ 的根分别为 $a,b$,则 $a+b$ 等于________.

**题3** 方程 $x+e^x=5$, $x+\ln x=5$ 的根分别为 $x_1,x_2$,则 $x_1+x_2$ 等于________.

由以下定理即可解答以上诸题.

**定理** 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数,$x+f(x)=m$, $x+f^{-1}(x)=m$ 的根分别为 $a,b$,则 $a+b=m$.

**证明** 令 $h(x)=x+f(x)$,得 $h(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数.由

$$h(a)=a+f(a)=m$$

$$h(f^{-1}(b))=f^{-1}(b)+f(f^{-1}(b))=f^{-1}(b)+b=m$$

得
$$h(a)=h(f^{-1}(b)),a=f^{-1}(b)$$

所以
$$a+b=f^{-1}(b)+b=m$$

由定理立得,题1,2,3的答案分别是 $\frac{\pi}{2}$,3,5.

# 一个定理的再推广

**定理** 若函数 $f^{-1}(x)$,$g^{-1}(x)$ 分别是函数 $f(x)$,$g(x)$ 的反函数(下同),且 $g^{-1}(x)=g(x)$,则方程 $f(x)=g(x)$ 有根 $a \Leftrightarrow$ 方程 $f^{-1}(x)=g(x)$ 有根 $g(a)$.

**证明** 由 $f(a)=g(a)$,可得

$$f^{-1}(g(a))=a=g^{-1}(g(a))=g(g(a))$$

即方程 $f^{-1}(x)=g(x)$ 有根 $g(a)$.

由 $f^{-1}(g(a))=g(g(a))=g^{-1}(g(a))=a$ 得 $f(a)=g(a)$,即方程 $f(x)=g(x)$ 有根 $a$.

**推论1** 若 $g^{-1}(x)=g(x)$,则方程 $f(x)=g(x)$ 与 $f^{-1}(x)=g(x)$ 根的个数相同(可都为0个,正整数个,无限个).

**推论2** 若 $g^{-1}(x)=g(x)$,方程 $f(x)=g(x)$ 的全部根为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,则方程 $f^{-1}(x)=g(x)$ 的全部根为 $g(a_1),g(a_2),\cdots,g(a_n),\cdots$(均为有限个时也成立,下同).

**推论3** 若 $g^{-1}(x)=g(x)$,$g(x)$ 是增(减)函数,方程 $f(x)=g(x)$ 的全部根从小到大依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,方程 $f^{-1}(x)=g(x)$ 的全部根从小到大(从大到小依次为 $b_1,b_2,\cdots,b_n\cdots$),则 $g(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$.

**证明** 由推论2,得 $\{g(a_i)\mid i\in\mathbf{N}^*\}=\{b_i\mid i\in\mathbf{N}^*\}$,因为 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$,且 $g(x)$ 是增(减)函数,所以

$$g(a_1)<g(a_2)<\cdots<g(a_n)<\cdots(g(a_1)>g(a_2)>\cdots>g(a_n)>\cdots)$$

而

$$b_1<b_2<\cdots<b_n\cdots(b_1>b_2>\cdots>b_n>\cdots)$$

所以

$$g(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$$

在推论3中,令 $g(x)=m-x$,可得文献[1]的推论成立,文献[1]中的定理,引理应分别理解为根唯一,交点唯一的情形,所以文献[1]对推论的证法不正确!

(编者注:这一点本刊在2006年第21期第28页“一个定理的类比定理”的编者按中已经指出.)

本文定理中的 $g(x)$ 可具体化为各种不同的情形,如 $g(x)=m-x$,$g(x)=x$,$g(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$,$g(x)=\dfrac{m}{x}$ 等,而得到各种不同的相应结论,但关键

是要具备 $g^{-1}(x) = g(x)$ 等前提条件.

## 参考文献

[1] 孟祥礼,孟祥东.一个定理的推广[J].数学通讯,2006(1):14.
[2] 甘志国.一类问题的统一解法[J].数学通讯,2005(11):21.

# 解抽象函数问题举例

没有给出函数的具体表达式,只给出了函数满足的若干条性质,由这些性质来求解函数问题就是抽象函数问题,因为没有函数的具体表达式,所以函数的很多性质不明显,只能运用所给出的函数性质求解(常用的有赋值法等),但技巧较大,本文举例说明这种题型的解法.

**例1** 定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$同时满足:

(Ⅰ)对于任意的$x,y\in(-1,1)$,有

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

(Ⅱ)当$x\in(-1,0)$时,$f(x)>0$.

请解答:(1)判定$f(x)$的奇偶性、单调性;

(2)对一切$n\in\mathbf{N}^*$,求证:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)=f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)$$

(3)求证:

$$f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$$

**解** (1)在(Ⅰ)中令$x=0$,得$f(0)=0$;又令$y=-x$,得$f(x)+f(-x)=f(0)=0$,即$f(-x)=-f(x)$,所以$f(x)$是奇函数.

由(Ⅱ)知$f(x)=0$在$x\in(-1,1)$时不能恒成立,所以$f(x)$是奇函数但不是偶函数(若$g(x)$既是奇函数又是偶函数时,必有$g(x)=0$).

设$-1<x_1<x_2<1$,得$\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$.

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$$

由(Ⅰ)知$\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\in(-1,1)$,所以$\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\in(-1,0)$.由(Ⅱ)得$f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)>0$,$f(x_1)>f(x_2)$.

所以$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减.

(2) 先验证$\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2}\in(-1,1)$,再由(Ⅰ)易证.

(3) 由(2)得:

$$f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{n+2}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$$

**例2** 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 同时满足:

(Ⅰ)对于任意的 $m,n\in\mathbf{R}$,有

$$f(m+n)+1=f(m)+f(n)$$

(Ⅱ)$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$;

(Ⅲ)当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f(x)<0$.

请解答:(1) 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$;

(2) 求 $f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{3}\right)$;

(3) 判定 $f(x)$ 的单调性;

(4) 找出一个具体的函数 $f(x)$(要写出 $f(x)$ 的解析式),使它满足题意.

**解** (1) 在(Ⅰ)中令 $m=n=\frac{1}{2}$,得 $f(1)=-1$,又令 $m=1$,得 $f(n+1)-f(n)=-2$.

所以数列$\{f(n)\}$是首项为 $-1$,公差为 $-2$ 的等差数列,得 $f(n)=-(2n-1)$.

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=-[1+3+\cdots+(2n-1)]=-n^2$$

(2) 由(Ⅰ)得,$f(m+n)=f(m)+f(n)-1$.又可得

$$f(m+n+p)=f(m+n)+f(p)-1=$$
$$f(m)+f(n)+f(p)-2$$

所以 $$f(n)=3f\left(\frac{n}{3}\right)-2=-(2n-1)$$

$$f\left(\frac{n}{3}\right)=1-\frac{2}{3}n$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{3}\right)=n-\frac{2}{3}(1+2+\cdots+n)=$$

$$n-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=-\frac{1}{3}n^2+\frac{2}{3}n$$

(3) 设 $x_1 < x_2$,则 $x_2 - x_1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1 + x_1) - f(x_1) =$$

$$f(x_2 - x_1) - 1 = f(x_2 - x_1) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 =$$

$$f(x_2 - x_1 + \frac{1}{2}) < 0(\text{用(Ⅲ)})$$

所以 $f(x_1) > f(x_2)$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减.

(4) 由(Ⅰ)得

$$f(m + n) - 1 = [f(m) - 1] + [f(n) - 1]$$

令 $f(x) - 1 = g(x)$,得 $g(m + n) = g(m) + g(n)$.所以可选 $g(x) = kx$($k$ 为常数).

由(Ⅱ),得 $g(\frac{1}{2}) = -1$,所以 $g(x) = -2x$,$f(x) = 1 - 2x$.

即选 $f(x) = 1 - 2x$ 满足题意.(由(3)及(Ⅰ)知这是唯一的答案)

**例 3** 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x + 2) = f(2 - x)$,$f(x + 7) = f(7 - x)$;方程 $f(x) = 0$ 在 $[0,7]$ 上的根只有 1,3.

(1) 判定 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 求方程 $f(x) = 0$ 在 $[-2\,005,2\,005]$ 上根的个数;

(3) 求出方程 $f(x) = 0$ 在 $[-2\,007,2\,007]$ 上的所有根.

**分析** 由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$,$x = 7$ 均对称,可画出满足题意的一个函数 $f(x)$ 的图象:

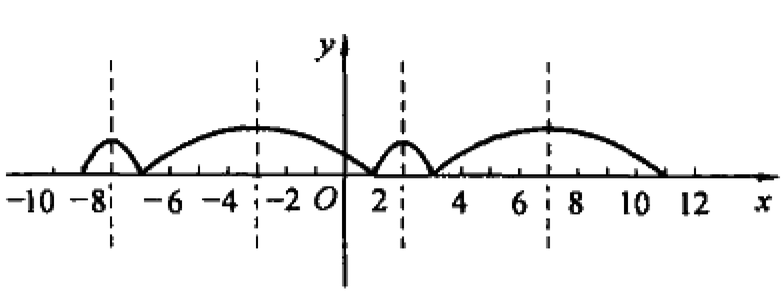



图 1

由此可分析出解题思路.

**解** (1) 由题意,可得 $f(x) = f(4 - x) = f[7 - (x + 3)] = f[7 + (x + 3)] = f(10 + x)$,所以 $f(x)$ 的一个周期是 10.

因为 $f(0) \neq 0$,所以 $f(x)$ 不是奇函数.

因为 $f(-3) = f(7) \neq 0$,而 $f(3) = 0$,所以 $f(-3) \neq f(3)$,得 $f(x)$ 不是偶函数.

所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2) 当 $x \in (7,10)$ 时,$14 - x \in (4,7)$.

$$f(x)=f(14-x)\neq 0$$

所以方程 $f(x)=0$ 在一个周期[0,10)上仅有两个根1,3.

也可得 $f(x)=0$ 在一个周期 $[x_0,x_0+10]$(或 $(x_0,x_0+10]$)上的根也只有两个:因为 $f(x)$ 在每一个周期上所取的函数值相同,且每一个函数值所取的次数也相同.

方程 $f(x)=0$ 在[-2 005,2 005)共 $\frac{2\,005-(-2\,005)}{10}=401$ 个周期上共有802个根;又 $f(2\,005)=f(5)\neq 0$,所以 $f(x)=0$ 在[-2 005,2005]上根的个数是803.

(3) 用(2)的方法可以求解,但以下解法更好:

上面已证 $f(x)=0$ 在一个周期[0,10)上仅有两个根1,3,所以 $f(x)=0$ 的根均可表为 $10n+1,10n+3(n\in\mathbf{Z})$ 的形式,且 $10n+1,10n+3\in[-2\,007,2\,007]$,分别得 $-200\leqslant n\leqslant 200$, $-201\leqslant n\leqslant 200$,且 $n\in\mathbf{Z}$.

得方程 $f(x)=0$ 在[-2 007,2 007]上的根为

$$x=10n+1\quad(-200\leqslant n\leqslant 200,n\in\mathbf{Z})$$

或

$$x=10n+3\quad(-201\leqslant n\leqslant 200,n\in\mathbf{Z})$$

记住一些典型的抽象函数的模型,在解与抽象函数有关的选择题和填空题(这些题的答案往往是唯一的)时就比较容易入手了,有时也可给出抽象函数解答题的解题思路.下表给出一些抽象函数的模型,供大家参考.

| 函数 $f(x)$ 的定义域 | 函数 $f(x)$ 满足的条件 | 可选的函数模型 |
|---|---|---|
| $\mathbf{R}$ | $f(x+y)=f(x)+f(y)$ | $y=kx(k\neq 0)$ |
| $\mathbf{R}$ | $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ | $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ |
| $\mathbf{R}^+$ | $f(xy)=f(x)+f(y)$ | $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ |
| $\mathbf{R}^+$ | $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$ | $y=x^a(a\neq 0)$ |
| $\mathbf{R}$ | $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ | $y=\cos x$ |
| 不明确给出 | $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$ | $y=\tan x$ |

**注** 表中提到的“可选”的意思是所给的函数满足所给条件,但不一定是满足条件的唯一函数;若再添上“$f(x)$ 为单调函数”这个条件,则所给的函数一

定是满足条件的唯一函数.(参见文献[1],按照"自然数→整数→有理数→实数"的证明方法可证明这个结论).

## 参考文献

[1] 徐汉文.探寻三类函数特征的数学设计[J].数学通讯,2006(11):4-5.

# 一个问题的解决

本文将解决文献[1]末提出的如下问题：

**问题1** 求函数 $y=\sum_{i=1}^{n}F_i\mid x-F_i\mid$ 的最小值，其中 $x\in\mathbf{R}$，$\{F_n\}_{n\geqslant 0}$ 为 Fibonacci 数列，它由 $F_0=0,F_1=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N})$ 确定.

**引理1** 当且仅当 $x\in[a,b]$ 时，函数 $y=\mid x-a\mid+\mid x-b\mid(a,b,x\in\mathbf{R},a<b)$ 取到最小值.（即文献[1]的命题1）.

**引理2** (1) $F_1+F_2+\cdots+F_{n-2}=F_n-1(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$；

(2) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_{n-2}^2=F_{n-2}F_{n-1}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$.

（易用数学归纳法证明）

**问题1的解决** 当 $n=1,2$ 时，均得当且仅当 $x=1$ 时，$y$ 取到最小值，且最小值为0.

当 $n\geqslant 3$ 时，由引理2(1)，得

$$\begin{aligned}y={}&F_1(\mid x-F_1\mid+\mid x-F_n\mid)+F_2(\mid x-F_2\mid+\mid x-F_n\mid)+\cdots+\\&F_{n-2}(\mid x-F_{n-2}\mid+\mid x-F_n\mid)+(\mid x-F_{n-1}\mid+\mid x-F_n\mid)+\\&(F_{n-1}-1)\mid x-F_{n-1}\mid\end{aligned}$$

由引理1知，上式右边的 $n$ 部分分别当且仅当 $x\in[F_1,F_n],x\in[F_2,F_n],\cdots,x\in[F_{n-2},F_n],x\in[F_{n-1},F_n],x=F_{n-1}$ 时取到最小值，又由 $F_1=F_2<F_3<\cdots<F_{n-1}<F_n$ 知，当且仅当 $x=F_{n-1}$ 时，$y$ 取到最小值，且最小值为

$$\begin{aligned}&F_1(F_{n-1}-F_1)+F_2(F_{n-1}-F_2)+\cdots+F_{n-2}(F_{n-1}-F_{n-2})+F_n(F_n-F_{n-1})=\\&F_{n-1}(F_1+F_2+\cdots+F_{n-2}-F_n)+F_n^2-(F_1^2+F_2^2+\cdots+F_{n-2}^2)=\\&-F_{n-1}+F_n^2-F_{n-2}F_{n-1}(\text{利用引理2})=\\&F_n^2-F_{n-1}(F_{n-2}+1)\end{aligned}$$

所以，问题1的答案是：若 $n=1$，则当且仅当 $x=F_1$ 时 $y$ 取到最小值，且最小值为0；若 $n\geqslant 2$，则当且仅当 $x=F_{n-1}$ 时 $y$ 取到最小值，且最小值为 $F_n^2-F_{n-1}(F_{n-2}+1)$.

文献[1]还提出了下面的问题2.

**问题2** 对于函数 $y=\sum_{i=1}^{n}a_i\mid x-b_i\mid(a_i,b_i,x\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$，如

何求其最小值?能否找到其有最小值的判断方法?

关于此问题,笔者得到:

(1) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$ 时,函数 $y$ 无最大值;

(2) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$ 时,函数 $y$ 无最小值.

**证明** (1) 这是因为 $\lim_{x\to\infty} y = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x-b_i) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x - \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i-x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)(-x)\right] = +\infty$$

(2) 由(1) 得 $\lim_{x\to\infty}(-y) = +\infty$,所以 $\lim_{x\to\infty} y = -\infty$.

**猜想** 对于问题 2,有

(1) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$ 时,函数 $y$ 的值域是 $[m, +\infty)$,在 $x = b_1, b_2, \cdots$,或 $b_n$ 时,$y$ 能取到最小值 $m$;

(2) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$ 时,函数 $y$ 的值域是 $(-\infty, M]$,在 $x = b_1, b_2, \cdots$,或 $b_n$ 时,$y$ 能取到最大值 $M$;

(3) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ 时,函数 $y$ 的值域是 $[-m, m]$,在 $x = b_1, b_2, \cdots$,或 $b_n$ 时,$y$ 既能取到最小值 $-m$,也能取到最大值 $m$.

## 参考文献

[1] 贺航飞.一类绝对值函数的最值问题[J].数学通报,2007(4):28-30.

[2] 揭方琢. 菲波那契数列[J]. 华中师范大学学报(自然科学版,数学史专辑),1987(3):72-85.

# 形似质异的函数题

## 1 定义域与值域

**例 1** 设函数 $y=\lg(x^2+2x+2a)$:

(1) 若该函数的定义域为 $\mathbf{R}$,求实数 $a$ 的取值范围;

(2) 若该函数的值域为 $\mathbf{R}$,求实数 $a$ 的取值范围.

**解** (1) 即 $x\in\mathbf{R}$ 时,$x^2+2x+2a>0$ 恒成立,结合抛物线 $y=x^2+2x+2a$ 知,即 $\Delta<0$,解得 $a>\frac{1}{2}$.故所求 $a$ 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2) 即 $x^2+2x+2a$ 的值能取遍全体正数,结合抛物线 $y=x^2+2x+2a$ 知,其充要条件是 $\Delta\geqslant 0$,解得 $a\leqslant\frac{1}{2}$.所求 $a$ 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

## 2 值域与函数值的变化范围

**例 2** 设函数 $f(x)=3x^2-(2m+6)x+m+3$:

(1) 若该函数的值为非负数,求实数 $m$ 的取值范围;

(2) 若该函数的值域为非负数集,求实数 $m$ 的取值范围.

**解** (1) 结合抛物线 $f(x)=3x^2-(2m+6)x+m+3$ 知,即 $\Delta\leqslant 0$,得 $m$ 的取值范围是$[-3,0]$.

(2) 结合抛物线 $f(x)=3x^2-(2m+6)x+m+3$ 知,即$[f(x)]_{\min}=0$,也即 $\Delta=0$,得 $m$ 的取值范围$\{-3,0\}$.

## 3 定义域与有意义

**例 3** 设函数 $f(x)=\sqrt{\sqrt{x(4-x)}-mx}$:

(1) 若该函数在$[0,3]$上有意义,求实数 $m$ 的取值范围;

(2) 若该函数的定义域为$[0,3]$,求实数 $m$ 的取值范围.

**解** (1) 题意即$\sqrt{x(4-x)}\geqslant mx$ 在$[0,3]$上恒成立,也即在$(0,3]$上恒成立,即$\sqrt{\frac{4}{x}-1}\geqslant m$ 在$(0,3]$上恒成立,也即

$$\left(\sqrt{\frac{4}{x}-1}\right)_{\min}\geqslant m$$

即
$$m \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$
所以所求 $m$ 的取值范围是$\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

(2) 题意即关于 $x$ 的不等式$\sqrt{x(4-x)} \geqslant mx$ 的解集是$[0,3]$.

先由 3 是方程$\sqrt{x(4-x)} \geqslant mx$ 的根,即得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

还可验证当 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,不等式$\sqrt{x(4-x)} \geqslant mx$ 的解集是$[0,3]$.

所以所求 $m$ 的取值范围是$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

**例 4** (1) 已知函数$f(x) = \sqrt{1 + 2^x + 3^x a}$ 的定义域为$(-\infty, 1]$,求实数 $a$ 的取值范围;

(2) 已知函数 $f(x) = \sqrt{1 + 2^x + 3^x a}$ 在$(-\infty, 1]$上有意义,求 $a$ 的取值范围.

**答案** (1)$\{-1\}$; (2)$[-1, +\infty)$.

## 4 有解与恒成立

**例 5** 设$f(x) = x^2 + 2x$;

(1) 若 $f(x) > a$ 在$[1,3]$上有解,求实数 $a$ 的取值范围;

(2) 若 $f(x) > a$ 在$[1,3]$上恒成立,求实数 $a$ 的取值范围.

**解** (1) 即 $x \in [1,3]$ 时,$[f(x)]_{\max} > a$.

又可得当且仅当 $x = 3$ 时,$f(x)$ 取到最大值,且$[f(x)]_{\max} = 15$.

所以所求 $a$ 的取值范围是$(-\infty, 15)$.

(2) 即 $x \in [1,3]$时,$[f(x)]_{\min} > a$.进而可求得 $a$ 的取值范围是$(-\infty, 3)$.

## 5 反函数与反函数值

**例 6** (1) 已知 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,求$\left(\frac{1}{x}\right)$的反函数;

(2) 已知 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,求 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

**解** (1) 先得$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+x}{1-x}$,再求得$f\left(\frac{1}{x}\right)$的反函数是$y = \frac{x-1}{x+1}$.

(2) 先得 $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$,再得 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+x}{1-x}$.

## 6 主元与次元

**例 7** 设$f(x) = x^2 + ax + 1$.

(1) 若 $f(x)>0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，求实数 $a$ 的取值范围；

(2) 若 $a\in[0,2]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 $x$ 的取值范围.

**解** (1) 即 $f(x)>0$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，也即

$$-a<\left(1+\frac{1}{x}\right)_{\min}(0<x\leqslant 2)$$

所以 $$-a<2$$

即 $$a>-2$$

故所求 $a$ 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

(2) 设 $g(a)=ax+x^2+1$，则 $g(a)$ 是 $a$ 的形式上的一次函数（即 $g(a)=ka+b(k,b\in\mathbf{R})$）. 可得满足题设的充要条件是

$$\begin{cases}g(0)=x^2+1>0\\g(2)=x^2+2x+1>0\end{cases}$$

故所求 $x$ 的取值范围是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

## 7 $f[g(x)]$ 反函数与 $f^{-1}[g(x)]$

**例 8** 已知 $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$，求：

(1) $f(x+1)$ 的反函数；

(2) $f^{-1}(x+1)$.

**答案** (1) $f(x+1)$ 的反函数为 $y=\dfrac{x}{1-x}$；(2) $f^{-1}(x+1)=-\dfrac{1}{x}$.

## 8 方程 $f(x)=0$ 在 $A$ 内有解与方程 $f(x)=0$ 的解在 $A$ 内

**例 9** (1) 若关于 $x$ 的方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 在区间 $(2,5)$ 内有解，求 $m$ 的取值范围；

(2) 若关于 $x$ 的方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的解在区间 $(2,5)$ 内，求 $m$ 的取值范围.

**解** 因为方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的解为 $m\pm1$，所以：

(1) $2<m+1<5$ 或 $2<m-1<5$，可求得 $m$ 的取值范围是 $(1,6)$.

(2) $2<m+1<5$ 且 $2<m-1<5$，可求得 $m$ 的取值范围是 $(3,4)$.

## 9 $f(x)$ 的周期与 $f(px)$ 的周期

**例 10** 若存在正常数 $p$ 使函数 $f(x)$ 满足 $f(px)=f\left(px-\dfrac{p}{2}\right)(x\in\mathbf{R})$，求：

(1) 函数 $f(px)$ 的一个正周期；

(2) 函数 $f(x)$ 的一个正周期.

**答案** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{p}{2}$.

## 10 $f(x)$ 的奇偶性与 $f[g(x)]$ 的奇偶性

**例 11** 已知函数 $f(x)=x^2+mx+n$,且 $f(x+2)$ 为偶函数,请比较 $f(1)$, $f(2.5)$, $f(3.5)$ 的大小.

**解** 可得 $f(-x+2)=f(x+2)$, $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称,从而可得 $f(2.5)<f(1)<f(3.5)$.

# 幂、指函数图象交点个数的完整结论

幂函数 $y = x^{\alpha}$ 与指数函数 $y = a^{x}(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 图象的交点坐标即关于 $x,y$ 的方程组 $\begin{cases} y = x^{\alpha} \\ y = a^{x} \end{cases}$ 的实数解 $(x,y)$，所以两图象的交点的个数即关于 $x$ 的方程

$$a^{x} = x^{\alpha}(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \quad ①$$

的实数解的个数.

文献[1]研究了这个问题，但只解决了 $a > 1$ 且 $\alpha$ 为正有理数的情形，本文将给出这个问题的完整结论.

**定理 1**　关于 $x$ 的方程

$$a^{x} = x^{\alpha}(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, \alpha \neq 0, x > 0) \quad ②$$

的解满足：

（Ⅰ）当 $a = e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时，② 有唯一解（这个解为 e）；

（Ⅱ）当 $\alpha < 0$ 且 $0 < a < e^{\frac{\alpha}{e}}$ 或 $\alpha > 0$ 且 $a > e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时，② 无解；

（Ⅲ）当 $\alpha < 0$ 且 $e^{\frac{\alpha}{e}} < a < 1$ 或 $\alpha > 0$ 且 $1 < a < e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时，② 有且仅有两个解（且这两个解分别在 $(1,e)$，$(e,+\infty)$ 上）；

（Ⅳ）当（$\alpha < 0$ 且 $a > 1$）或（$\alpha > 0$ 且 $0 < a < 1$）时，② 有唯一解（且这个解在 $(0,1)$ 上）.

**证明**　方程 ② 即

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{\alpha}(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, \alpha \neq 0, x > 0) \quad ③$$

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^{2}}$.

令 $f'(x) = 0$，得 $x = e$.

当 $x \in (0,e)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 严格递增；

当 $x \in (e,+\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 严格递减.

所以 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x = e$ 时取到最大值 $\frac{1}{e}$，且 $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$，$f(1) = 0$.

所以可画出 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象如图 1 所示，从而可得当 $\frac{\ln a}{\alpha}=\frac{1}{e}$，即 $a=e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时，方程③即②有唯一解（这个解为 e）.

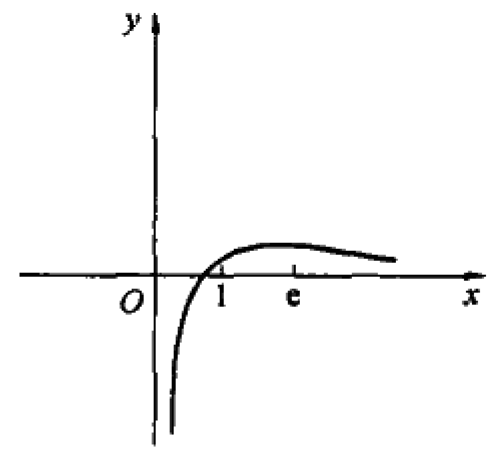


图 1

当 $\frac{\ln a}{\alpha}>\frac{1}{e}$ 时，方程③即②无解，从而可得定理 1(Ⅱ)成立.

当 $0<\frac{\ln a}{\alpha}<\frac{1}{e}$ 时，方程③即②有两个解，从而可得定理 1(Ⅲ)成立.

当 $\frac{\ln a}{\alpha}<0$ 时，方程③即②有唯一解，从而可得定理 1(Ⅳ)成立.

**定理 2** 关于 $x$ 的方程

$$a^x=x^\alpha(a>0\text{且}a\neq 1,\alpha\neq 0,x<0) \quad ④$$

的解满足：

（Ⅰ）当 $\alpha$ 是无理数，或 $\alpha=\frac{n}{m}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$m$ 是偶数，$(m,n)=1$）时，④无解.

（Ⅱ）当 $\alpha=\frac{n}{m}$（$m$ 是正奇数，$n$ 是非零偶数，$(m,n)=1$）时，④的解满足：

①当 $a=e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时，④有唯一解（这个解为 $-e$）；

②当 $\alpha<0$ 且 $a>e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 或 $\alpha>0$ 且 $0<a<e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时，④无解；

③当 $\alpha<0$ 且 $1<a<e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 或 $\alpha>0$ 且 $e^{-\frac{\alpha}{e}}<a<1$ 时，④有且仅有两个解（且这两个解分别在 $(-\infty,-e)$，$(-e,-1)$ 上）；

④当 $\alpha<0$ 且 $0<a<1$ 或 $\alpha>0$ 且 $a>1$ 时，④有唯一解（且这个解在 $(-1,0)$ 上）.

**证明** （Ⅰ）注意“负数的无理数次幂无意义”及“负数不能开偶次方”即知成立.

（Ⅱ）方程④即

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}=(-x)^\alpha(a>0\text{且}a\neq 1,\alpha\neq 0,-x>0)$$

再由定理 1 知结论（Ⅱ）成立.

**定理 3** 关于 $x$ 的方程

$$a^x=x^\alpha(a>0\text{且}a\neq 1) \quad ⑤$$

的实数解满足：

（Ⅰ）当 $\alpha=0$ 时，⑤无解.

(Ⅱ) 当 $\alpha$ 是无理数,或 $\alpha=\frac{n}{m}(n\in\mathbf{N}^*,m$ 是偶数,$(m,n)=1)$ 时,⑤只有正数解,解的情形见定理 1.

(Ⅲ) 当 $\alpha=\frac{n}{m}$($m$ 是正奇数,$n$ 是非零偶数,$(m,n)=1$)时,⑤的解满足:

① 当 $a=e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有且仅有两个解(且这两个解一个在 $(-1,0)$ 上,另一个是 e).

② $a=e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有且仅有两个解(且这两个解一个是 $-e$,另一个在 $(0,1)$ 上).

③ 当 $\alpha<0$ 时,

(i) 又 $0<a<e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有唯一解(且这个解在 $(-1,0)$ 上);

(ii) 又 $e^{\frac{\alpha}{e}}<a<1$ 时,⑤有且仅有三个解(且这三个解分别在 $(-1,0)$,$(1,e)$,$(e,+\infty)$ 上);

(iii) 又 $1<a<e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有且仅有三个解(且这三个解分别在 $(-\infty,-e)$,$(-e,-1)$,$(0,1)$ 上);

(iv) 又 $a>e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有唯一解(且这个解在 $(0,1)$ 上).

④ 当 $\alpha>0$ 时,

(i) 又 $0<a<e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有唯一解(且这个解在 $(0,1)$ 上);

(ii) 又 $e^{-\frac{\alpha}{e}}<a<1$ 时,⑤有且仅有三个解(且这三个解分别在 $(-\infty,-e)$,$(-e,-1)$,$(0,1)$ 上);

(iii) 又 $1<a<e^{-\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有且仅有三个解(且这三个解分别在 $(-1,0)$,$(1,e)$,$(e,+\infty)$ 上);

(iv) 又 $a>e^{\frac{\alpha}{e}}$ 时,⑤有唯一解(且这个解在 $(-1,0)$ 上).

**证明** 由定理 1,2 可证,简述如下:

(Ⅰ) 易知成立.

(Ⅱ) 由定理 2(Ⅰ) 及定理 1 得.

(Ⅲ)① 由定理 1(Ⅰ) 及定理 2(Ⅱ)④ 得.

② 由定理 2(Ⅱ)① 及定理 1(Ⅳ) 得.

③(i) 由定理 1(Ⅱ) 及定理 2(Ⅱ)④ 得;

(ii) 由定理 1(Ⅲ) 及定理 2(Ⅱ)④ 得;

(iii) 由定理 2(Ⅱ)③ 及定理 1(Ⅳ) 得;

(iv) 由定理 2(Ⅱ)② 及定理 1(Ⅳ) 得.

④(i) 由定理 2(Ⅱ)② 及定理 1(Ⅳ) 得.

(ii) 由定理 2(Ⅱ)③ 及定理 1(Ⅳ) 得;

(iii) 由定理 1(Ⅲ) 及定理 2(Ⅱ)④ 得;

(iv) 由定理 1(Ⅱ) 及定理 2(Ⅱ)④ 得.

文献[1] 末说“用类似的方法还可以得出对数函数与幂函数以及指数函数与对数函数图象的交点个数”,即可以求出关于 $x$ 的方程

$$\log_a x = x^a (a > 0 \text{且} a \neq 1, x > 0) \quad ⑥$$

$$a^x = \log_b x (a, b \in (0,1) \cup (1, +\infty), x > 0) \quad ⑦$$

解的个数,笔者认为并不是很容易.

当然,方程 ⑦ 中 $a = b$ 时的情形已有很多文献给出了结果,比如文献[2],[3].

定理 3(Ⅲ)①,② 中还有如下

**问题** 求方程 $e^{-x} = x^e$(e是自然对数的底,$0 < x < 1$) 的解.

## 参考文献

[1] 谢绍义.幂指函数图象交点问题[J].数学通报,2007(9):17-18.

[2] 邹庆禹.指数函数与其反函数的交点问题探讨[J].中学数学,2007(8):12-13.

[3] 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.

# 一元二次方程根的分布

用 $x_1, x_2(x_1 \leqslant x_2)$ 表示一元二次方程 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0(a > 0)$ 的两个根，判别式 $\Delta = b^2 - 4ac, h = -\frac{b}{2a}$，则

(1) $m < x_1 < x_2 \Leftrightarrow (\Delta > 0, h > m, f(m) > 0)$;

(2) $x_1 < x_2 < n \Leftrightarrow (\Delta > 0, h < n, f(n) > 0)$;

(3) $x_1 < p < x_2 \Leftrightarrow f(p) < 0$;

(4) $m < x_1 \leqslant x_2 < n \Leftrightarrow (\Delta \geqslant 0, m < h < n, f(m) > 0, f(n) > 0)$;

(5) 当 $m < p < n$ 时，$m < x_1 < p < x_2 < n \Leftrightarrow (f(m) > 0, f(p) < 0, f(n) > 0)$;

(6) 当 $m < n$ 时，$x_1 < m < n < x_2 \Leftrightarrow (f(m) < 0, f(n) < 0)$;

(7) 当 $m < n$ 时，$x_1, x_2$ 中有且仅有一个在 $(m, n)$ 内 $\Leftrightarrow$

$$f(m) \cdot f(n) < 0$$

或
$$f(m) = 0, m < h < \frac{m+n}{2}$$

或
$$f(n) = 0, \frac{m+n}{2} < h < n$$

由二次函数的图象及其对称性，可证以上结论成立.

# 谈凸函数

全日制普通高级中学教科书《数学·第一册(上)》第102页第3(2)题是："证明：若 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$."

这道题的背景是高等数学中的"凸函数"，本文就此谈谈凸函数的知识.

**定义** 如图1，当 $x\in(a,b)$ 时，若函数 $f(x)$ 的图象的任一段都在这段图象所对弦的上方，就说 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内上凸；当 $x\in(b,c)$ 时，若 $f(x)$ 的图象的任一段都在这段图象所对弦的下方，就说 $f(x)$ 在 $(b,c)$ 内下凸(注：把定义中的开区间统一改为其他形式的区间也可).

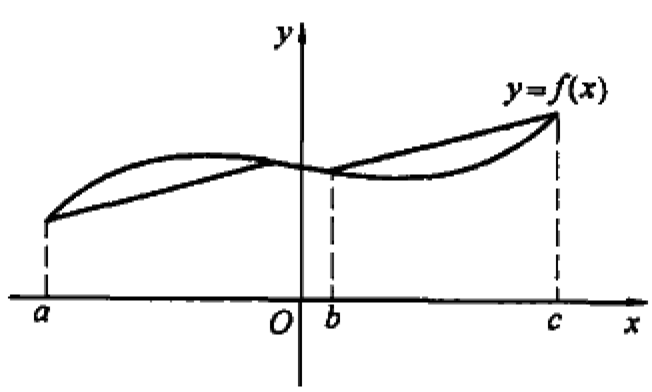


图1

由定义可知，开口向下的抛物线在 $\mathbf{R}$ 内上凸，对数函数 $y=\log_a x(a>1)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 内上凸.

凸函数具有以下性质：

若 $f(x)$ 为区间 $I$ 内的上(下)凸函数，则当 $x_1,x_2\in I$ 时，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant(\leqslant)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\text{(当且仅当 }x_1=x_2\text{ 时取等号)}$$

下面只证上凸的情形，下凸的情形留给同学们练习.

**证明** 如图2，设 $y=f(x)$ 为区间 $I$ 内的上凸函数，$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象上的任意两点 $(x_1<x_2)$，则线段 $AB$ 的中点 $M$ 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$

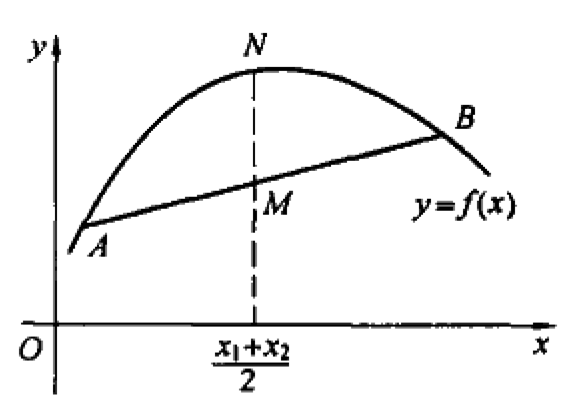


图2

过点 $M$ 作 $x$ 轴的垂线交 $f(x)$ 的图象于点 $N$，则 $N$ 点的坐标为

$$N\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$$

由上凸函数的定义知，点 $N$ 在点 $M$ 的上方，所以

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

当 $x_1=x_2$ 时，显然有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

所以若 $f(x)$ 为区间 $I$ 内的上凸函数，则当 $x_1,x_2\in I$ 时，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

# 订正一道题的答案及简解两道题

笔者发现《数学通讯》2008 年第 2,4 期合刊《高一年级期末自测题》(作者:田富德) 中第 18 题的答案(见第 58 页) 有误,第 23 题第(2) 问有简洁的解法.

18. 已知全集 $U = \mathbf{R}, A = \{x \mid \log_2 x < 0\}, B = \left\{x \mid \frac{x+2}{x-4} \leqslant 0\right\}, C = \left\{x \mid \left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant a\right\}$.

(1) 求集合 $A \cap B$ 和 $C_U(A \cup B)$;

(2) 若 $(A \cap B) \subseteq C$,求实数 $a$ 的取值范围.

原解法没有注意到 $A$ 中的 $x$ 应当满足 $x > 0$,而导致解法错误,正确的解法为:

**解**　(1) 易求得 $A = (0,1), B = [-2,4)$,所以 $A \cap B = (0,1), A \cup B = [-2,4), C_U(A \cup B) = (-\infty, -2) \cup [4, +\infty)$.

(2) 易知 $a > 0$,所以 $C = \left[\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2} + a\right]$,再由 $(0,1) \subseteq C$,得

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - a \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + a \geqslant 1; \end{cases}$$

解得 $a \geqslant \frac{1}{2}$.

所以所求 $a$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$,满足 $S_n = 2a_n - 2n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2(a_n + 2)$, $T_n$ 为数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n + 2}\right\}$ 的前 $n$ 项和,求证:$T_n \geqslant \frac{1}{2}$;

(3) 略.

原解法是先求出(1) 的答案是:$a_n = 2^{n+1} - 2$,再用错位相减法求出 $T_n = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}$,又用作差法证明 $\{T_n\}$ 是递增数列,所以 $T_n \geqslant T_1 = \frac{1}{2}$.

实际上，第(2)问有极简洁的解法：

得 $b_n = n+1, \frac{b_n}{a_n+2} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$，所以 $T_n \geqslant T_1 = \frac{1}{2}$（因为和式 $T_n$ 的各项都是正数）.

建议把第(2)问的结论加强为“求证：$\frac{1}{2} \leqslant T_n < \frac{3}{2}$”（但不能说求 $T_n$ 的取值范围），这样就考查了错位相减法.

《数学通讯》2007年第2,4期合刊《数列》(作者：吴为)中第15题第(2)问也有这种极简洁的解法.这道答题(压轴题)是：

15. 已知函数 $f(x) = -3x^2+6x-2$，$S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，且点 $(n, S_n)(n \in \mathbf{N}^*)$ 在曲线 $y = f(x)+2$ 上.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$；

(2) 若 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$c_n = \frac{a_n b_n}{6}$，且 $T_n$ 是数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和.试问 $T_n$ 是否存在最大值？若存在，求出 $T_n$ 的最大值；若不存在，说明理由.

原解法是先求出(1)的答案是：$a_n = 9-6n$，再用错位相减法求出 $T_n = \frac{2n+1}{2^n} - 1$，又用作商法证明 $\{T_n+1\}$ 是递减数列，所以 $\{T_n\}$ 也是递减数列，得 $T_n \leqslant T_1 = \frac{1}{2}$. 即 $T_n$ 存在最大值，且最大值为 $T_1 = \frac{1}{2}$.

实际上，当 $n \geqslant 2$ 时，$c_n < 0$，所以当且仅当 $n = 1$ 时 $T_n$ 取到最大值，且最大值为 $T_1 = \frac{1}{2}$.

建议把第(2)问的结论加强为“求证：$-1 < T_n \leqslant \frac{1}{2}$”，这样就考查了错位相减法.

我们在编制题目时，一定要仔细揣摩，争取能达到考查某种知识的目的.

# 对数公式大汇集及证明

(1) 对数的定义：$a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b$.

(2) 对数恒等式：$\log_a a^b = b$；$a^{\log_a N} = N$.

(由定义中的两个式子等量代换即得)

(3) 三个常见的对数：$\log_a 1 = 0$；$\log_a a = 1$；$\log_a \frac{1}{a} = -1$.

(由第一个对数恒等式立得)

(4) 对数的运算性质——积、商、幂、方根的对数：

①$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$；

②$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$；

③$\log_a M^n = n\log_a M$；

④$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$.

**证明** ① 由对数的定义知，即证

$$a^{\log_a M + \log_a N} = MN$$

这由第二个对数恒等式易证：

$$a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = MN$$

② 即证

$$\log_a N + \log_a \frac{M}{N} = \log_a M$$

这由 1) 立得.

③ 由对数的定义知，即证

$$a^{n\log_a M} = M^n$$

证明如下：

$$a^{n\log_a M} = (a^{\log_a M})^n = M^n$$

④ 由 ③ 立得.

(5) 对数的换底公式：$\log_a N = \frac{\log_x N}{\log_x a}$.

**证明** 即证 $\log_x N = \log_x a \log_a N$，也即证

$$x^{\log_x a \log_a N} = N$$

证明如下：

$$x^{\log_x a \log_x N} = (x^{\log_x a})^{\log_x N} = a^{\log_x N} = N$$

(6) 对数的阶梯公式：$\log_{a^m} N^n = \frac{n}{m}\log_a N$.

(7) 对数的同次幂公式：$\log_{a^n} N^n = \log_a N$.

(8) 对数的倒数公式：$\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$.

(9) 对数的循环公式：$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \cdots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_1} a_n$；

(10) 对数的重排公式：$\log_{a_1} b_1 \cdot \log_{a_2} b_2 \cdot \cdots \cdot \log_{a_n} b_n = 1$(其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 这两组数仅仅次序不同).

(6) ~ (10) 均可由(5) 证得，下面证明(10)：

$$\log_{a_1} b_1 \cdot \log_{a_2} b_2 \cdot \cdots \cdot \log_{a_n} b_n = \frac{\ln b_1}{\ln a_1} \cdot \frac{\ln b_2}{\ln a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{\ln b_n}{\ln a_n} = 1$$

(11) 幂的换底公式：$a^b = x^{b\log_x a}$(由第二个对数恒等式易证)

**注** 以上公式均在两边有意义时成立.

对数中有很多趣题，其中以对数换底公式的应用最多，这里再介绍一道：

**例** 求证：$a^{\lg b} = b^{\lg a}$.

**证法 1** 只需证

$$\lg a^{\lg b} = \lg b^{\lg a}$$

由幂的对数运算法则知，即证

$$\lg b \lg a = \lg a \lg b$$

而此式显然成立，所以要证结论成立.

**证法 2** 只需证 $a = b^{\frac{\lg a}{\lg b}}$.

由对数的换底公式知，即证 $a = b^{\log_b a}$.

这由对数恒等式，立知成立. 所以要证结论成立.

还可把本题的结论推广为

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$$

# 更正一道选择题的答案

文献[1]的例2是

**例2** 已知$0 < a < 1$,则方程$a^{|x|} = |\log_a x|$的实根个数为(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.1或2或3

**分析** 判断方程的根的个数就是判断函数$y = a^{|x|}$与$y = |\log_a x|$图象的交点个数,画出这2个函数的图象(见文献[1]的图2),易知两图象只有2个交点,故原方程只有2个实根,选B.

事实上,文献[1]的图2作图不准:增函数与减函数的图象若有交点,则交点唯一;而减函数与减函数的图象若有交点,则交点不一定唯一.

文献[2]末的例题已给出了以上例2的修正:

**定理1** 方程$a^{|x|} = |\log_a x|$的实根个数的情形是:

(1)当$a \in (0, e^{-e})$时是4个解;

(2)当$a \in [e^{-e}, 1)$时是2个解;

(3)当$a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$时是3个解;

(4)当$a = e^{\frac{1}{e}}$时是2个解;

(5)当$a \in (e^{\frac{1}{e}}, +\infty)$时是1个解.

文献[2]的解题思路是:

先用导数证得

**定理2** (1)若函数$y = a^x(0 < a < 1)$与$y = \log_a x$相切于唯一公共点$(x_0, a^{x_0})$,则$a = e^{-e}$;

(2)若函数$y = a^x(a > 1)$与$y = \log_a x$相切于唯一公共点$(x_0, a^{x_0})$,则$a = e^{\frac{1}{e}}$.

再由定理2得到(也可由文献[3]得到).

**定理3** 指数函数$y = a^x(a > 0$且$a \neq 1)$与其反函数$y = \log_a x$图象交点个数的情形是:

(1)当$a \in (0, e^{-e})$时是3个交点;

(2)当$a \in [e^{-e}, 1)$时是1个交点;

(3)当$a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$时是2个交点;

(4) 当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时是 1 个交点;

(5) 当 $a \in (e^{\frac{1}{e}}, +\infty)$ 时没有交点.

(文献[2] 推论 ② 中的"$[e^{-e},1]$" 应改为"$[e^{-e},1)$")

由定理 3 可得定理 1 成立.

## 参考文献

[1] 张芳.数形结合思想在解题中的应用[J].中学数学,2007(12):41.
[2] 邹庆禹.指数函数与其反函数的交点问题探讨[J].中学数学,2007(8):12-13
[3] 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.

# 纠正一个流行错误
## ——应尽早引入“确界”的概念

笔者常在刊书报及课堂等很多媒体上见(听)到以下结论:

(1)$f(x)>(\geqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow[f(x)]_{\min}>(\geqslant)$常数$c$;

(2)$f(x)<(\leqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow[f(x)]_{\max}<(\leqslant)$常数$c$;

(3)若存在一个$x$使得$f(x)>(\geqslant)$常数$c\Leftrightarrow[f(x)]_{\max}>(\geqslant)$常数$c$;

(4)若存在一个$x$使得$f(x)<(\leqslant)$常数$c\Leftrightarrow[f(x)]_{\min}<(\leqslant)$常数$c$.

它们用(叙述)起来都很方便,但这些结论均不严谨,并且还在被广泛的引用(笔者于2007年11月6~9日赴荆州参加了湖北省优秀课评比的活动,天门实验高中的一位老师的公开课《导数的应用》就讲述了以上结论),所以应当尽早澄清以上错误,并给出正确的结论.

以上结论(1),(4)只有在$[f(x)]_{\min}$存在时才成立;(2),(3)只有在$[f(x)]_{\max}$存在时才成立.对于一般的情形,必须引入“确界”的概念.

**上(下)界的定义** 若数集$A$中的数均$\leqslant(\geqslant)$常数$a$,就说$a$是数集$A$的一个上(下)界.

显然,一个数集若有上(下)界,就有无数多个上(下)界.因此,自然的又产生了以下定义:

**上(下)确界的定义** 若数集$A$存在最小(大)的上(下)界,则这个最小(大)的上(下)界叫做数集$A$的上(下)确界,记作$\sup A(\inf A)$.

由大学数学教材《数学分析》中的“确界存在定理”知:非空有上(下)界的数集必有唯一的上(下)确界.

可把本文开头的错误结论修正为

**定理1** (1)当$[f(x)]_{\min}$存在时,$f(x)>(\geqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow[f(x)]_{\min}>(\geqslant)$常数$c$;

(2)当$[f(x)]_{\min}$不存在但$\inf[f(x)]$存在时,$f(x)>(\geqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow\inf[f(x)]\geqslant$常数$c$.

(3)当$\inf[f(x)]$不存在时,$f(x)>(\geqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

**定理2** (1)当$[f(x)]_{\max}$存在时,$f(x)<(\leqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow[f(x)]_{\max}<(\leqslant)$常数$c$;

(2) 当$[f(x)]_{max}$不存在但$\sup[f(x)]$存在时,$f(x) < (\leqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow \sup[f(x)] \leqslant$常数$c$.

(3) 当$\sup[f(x)]$不存在时,$f(x) < (\leqslant)$常数$c$恒成立$\Leftrightarrow x \in \varnothing$.

**定理3** (1) 当$[f(x)]_{max}$存在时,若存在一个$x$使得$f(x) > (\geqslant)$常数$c \Leftrightarrow [f(x)]_{max} > (\geqslant)$常数$c$;

(2) 当$[f(x)]_{max}$不存在但$\sup[f(x)]$存在时,若存在一个$x$使得$f(x) > (\geqslant)$常数$c \Leftrightarrow \sup[f(x)] >$常数$c$;

(3) 当$\sup[f(x)]$不存在时,"存在一个$x$使得$f(x) > (\geqslant)$常数$c$"一定成立.

**定理4** (1) 当$[f(x)]_{min}$存在时,若存在一个$x$使得$f(x) < (\leqslant)$常数$c \Leftrightarrow [f(x)]_{min} < (\leqslant)$常数$c$.

(2) 当$[f(x)]_{min}$不存在但$\inf[f(x)]$存在时,若存在一个$x$使得$f(x) < (\leqslant)$常数$c \Leftrightarrow \inf[f(x)] <$常数$c$;

(3) 当$\inf[f(x)]$不存在时,"存在一个$x$使得$f(x) < (\leqslant)$常数$c$"一定成立.

以上定理1 ~ 4必有广泛、简洁的应用,请读者留意.

**例** 已知某商品的价格上涨$x\%$,销售的数量就减少$mx\%$,其中$m$为正常数.若适当地涨价,能使销售总金额增加,求$m$的取值范围.

**解** 设原来的价格为$a$,销售的数量为$b$,题意即$x > 0$时以下不等式能成立:

$$a(1 + x\%) \cdot b(1 - mx\%) > ab$$

由$ab > 0$,并设$x\% = t$,得

$$(1 + t)(1 - mt) > 1$$

由$m > 0, t > 0$,得

$$t < \frac{1}{m} - 1$$

题意即以上不等式在$t > 0$时能成立,求$m$的取值范围.

由定理4(2),得$0 < \frac{1}{m} - 1$,所以$0 < m < 1$.

所求的取值范围是$(0,1)$.

# 例谈构造对偶式解题

根据题中某式 $A$ 的结构特征,构造 $A$ 的对偶式 $B$,在利用 $A$ 与 $B$ 之间的运算(主要是加、减、乘)求得 $A$、$B$ 的两种关系式,从而使问题获得解决,这种方法就叫做构造对偶式解题.

常见的对偶式有:$a+b$ 与 $a-b$,$ab$ 与 $\frac{a}{b}$,$\sin x$ 与 $\cos x$,$\tan x$ 与 $\cot x$,$\frac{a^n}{a+b}$ 与 $\frac{a^n}{a-b}$ 等等.

**例 1** 计算:(1)$\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$;

(2)$\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

**解** (1) 设 $A=\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$,

构造 $A$ 的对偶式 $B=\cos^2 20^\circ+\sin^2 80^\circ-\sqrt{3}\cos 20^\circ\sin 80^\circ$,得

$$\begin{cases}A+B=2-\sqrt{3}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\\A-B=\cos 160^\circ-\cos 40^\circ+\sqrt{3}\sin 100^\circ=0\end{cases}$$

所以
$$A=B=\frac{1}{4}$$

即原式 $=\frac{1}{4}$.

(2) 设 $x=\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$,构造 $x$ 的对偶式 $y=\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$,得

$$xy=\sin 10^\circ\cos 10^\circ\sin 50^\circ\cos 50^\circ\sin 70^\circ\cos 70^\circ=$$
$$\frac{1}{8}\sin 20^\circ\sin 100^\circ\sin 140^\circ=$$
$$\frac{1}{8}\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\frac{1}{8}y$$

又 $y\neq 0$,所以 $x=\frac{1}{8}$.

**例 2** 求函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}(1\leqslant x\leqslant 3)$ 的值域.

**解** 构造函数 $f(x)$ 的对偶函数 $g(x)=x-\frac{4}{x}(1\leqslant x\leqslant 3)$,得增函数

$g(x)$ 的值域是$[-3,\frac{5}{3}]$.

又 $f^2(x)=g^2(x)+16, f(x)>0$,从而可得 $f(x)$ 的值域是$[4,5]$.

**例 3** 求函数 $f(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{2-x}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 的值域.

**解** 构造函数 $f(x)$ 的对偶函数 $g(x)=2\sqrt{x-1}-3\sqrt{2-x}(1\leqslant x\leqslant 2)$,得增函数 $g(x)$ 的值域是$[-2,3]$.

又 $f^2(x)+g^2(x)=13, f(x)>0$,从而可得 $f(x)$ 的值域是$[2,\sqrt{13}]$.

**例 4** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,求证:

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geqslant\frac{1}{2}$$

**证明** 设 $A=\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}$

构造 $A$ 的对偶式

$$B=\frac{x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_3^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1^2}{x_n+x_1}$$

由均值不等式,得

$$A+B=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2+x_n^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2+x_1^2}{x_n+x_1}\geqslant$$
$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_2+x_3)+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)+$$
$$\frac{1}{2}(x_n+x_1)=1$$

$$A-B=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2-x_3^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2-x_n^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2-x_1^2}{x_n+x_1}\geqslant$$
$$(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)+(x_n-x_1)=0$$

可得 $A\geqslant\frac{1}{2}$,要证结论成立.

**例 5** (2006 全国高考题) 函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n|$ 的最小值为(　　)

A. 190　　B. 171　　C. 90　　D. 45

**解** 由 $f(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-19|$,得

$$f(x)=|x-19|+|x-18|+\cdots+|x-1|$$

所以

$$2f(x)=(|x-1|+|x-19|)+(|x-2|+|x-18|)+\cdots+$$
$$(|x-19|+|x-1|)$$

再由绝对值不等式,可得

当且仅当 $x=10$ 时,$f(x)$ 取到最小值,且最小值是 90. 选 C.

**例 6** 设 $x,y,z\in(0,1)$,求证 $\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-y+z}+\frac{1}{1-z+x}\geqslant 3$.

**证明** 令

$$A=\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-y+z}+\frac{1}{1-z+x}$$

$$B=(1-x+y)+(1-y+z)+(1-z+x)$$

由均值不等式,可得 $A+B\geqslant 6$,又 $B=3$,所以 $A\geqslant 3$,即要证结论成立.

**例 7** (2007 福建高考题)已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx,x\in\mathbf{R}$,设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$,求证:$F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

**证明** 由 $F(x)=f(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$,得

$$F(x_1)F(x_2)=\mathrm{e}^{x_1+x_2}+\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)}+\mathrm{e}^{x_1-x_2}+\mathrm{e}^{-x_1+x_2}>\mathrm{e}^{x_1+x_2}+2$$

所以

$$F(1)F(n)>\mathrm{e}^{n+1}+2,F(2)F(n-1)>\mathrm{e}^{n+1}+2,\cdots,$$

$$F(n)F(1)>\mathrm{e}^{n+1}+2$$

把它们相乘,即得要证结论成立.

**例 8** 若实数 $x,y$ 满足 $x^2-3xy+y^2=2$,则 $x^2+y^2$ 的取值范围是________.

**解** 设 $x=u+v,y=u-v$,得 $5v^2-u^2=2$,所以 $v^2=\frac{u^2+2}{5}\geqslant\frac{2}{5}$. $x^2+y^2=4(3v^2-1)\geqslant\frac{4}{5}$,所以 $x^2+y^2$ 的取值范围是 $\left[\frac{4}{5},+\infty\right)$.

**例 9** (1) 求 $\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi$ 的值;

(2) 求 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$ 的值.

**解** (1) 设 $A=\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi,B=\cos\frac{2}{5}\pi-\cos\frac{4}{5}\pi$,得

$$2AB=2\left(\cos^2\frac{2}{5}\pi-\cos^2\frac{4}{5}\pi\right)=\cos\frac{4}{5}\pi-\cos\frac{8}{5}\pi=-B$$

又 $B\neq 0$,所以 $A=\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi=-\frac{1}{2}$.

(2) 设

$$A=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$$

$$B=\cos^2 20°+\sin^2 50°+\cos 20°\sin 50°$$

得

$$A+B=2+\sin 70°$$

$$A-B=-\cos 40°+\cos 100°+\sin(-30°)=-\frac{1}{2}-\sin 70°$$

从而可得 $A=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°=\frac{3}{4}$

**例 10** 求$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$的展开式中 $x$ 的整数次幂项的系数之和.

**解** 设 $A=(\sqrt{x}+2)^{2n+1}, B=(\sqrt{x}-2)^{2n+1}$,

$$f(x)=A+B=(\sqrt{x}+2)^{2n+1}+(\sqrt{x}-2)^{2n+1}$$

由二项式定理可得所求答案为

$$\frac{f(1)}{2}=\frac{3^{2n+1}-1}{2}$$

**例 11** 解方程$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=x$.

**解** 设$\sqrt{2+x}=y$,得

$$\begin{cases}\sqrt{2+x}=y\\ \sqrt{2+y}=x\end{cases}$$

平方相减后可求得原方程的解为 $x=2$.

**例 12** 求证:$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

**证明** 设 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}, B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$.

由 $0<A<B$,得 $A^2<AB=\frac{1}{2n+1}$,所以

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

# 例谈函数问题的解法

## 1 恒成立、能成立、恰成立问题

**例1** (1) 若不等式$|x-4|+|x-3|>a$对一切实数$x$恒成立,则实数$a$的取值范围是________;

(2) 若不等式$x^2-2mx+2m+1>0$对$0\leqslant x\leqslant 1$的实数$x$恒成立,则实数$m$的取值范围是________;

(3) 对于满足$0\leqslant p\leqslant 4$的实数$p$,使$x^2+px>4x+p-3$恒成立的$x$的取值范围是________.

**解** (1) 即$(|x-4|+|x-3|)_{\min}>a$.

由绝对值的几何意义知,当且仅当$3\leqslant x\leqslant 4$时$|x-4|+|x-3|$取到最小值(最小值是1),从而得实数$a$的取值范围是$(-\infty,1)$.

(2) 设$f(x)=x^2-2mx+2m+1(0\leqslant x\leqslant 1)$,题意即

$$f(x)_{\min}>0$$

通过分类讨论可求出$f(x)_{\min}$,进而求解本题.但以下的分离常数法更简洁:

题意即不等式$x^2-2mx+2m+1>0$对$0\leqslant x<1$的实数$x$恒成立(因为$x=1$时即$2>0$),得

$$x^2+1>2m(x-1)\quad(0\leqslant x<1)$$

$$2m>\frac{x^2+1}{x-1}\quad(0\leqslant x<1)$$

设$1-x=t$,得$0<t\leqslant 1$.上式即

$$2-2m<t+\frac{2}{t}\quad(0<t\leqslant 1)$$

该式恒成立,即

$$2-2m<\left(t+\frac{2}{t}\right)_{\min}\quad(0<t\leqslant 1)$$

而函数$g(t)=t+\frac{2}{t}$在$(0,\sqrt{2}]$上是减函数,所以当且仅当$t=1$时$t+\frac{2}{t}$$(0<t\leqslant 1)$取到最小值(最小值是3),从而得实数$m$的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(3) 题意即当 $0 \leqslant p \leqslant 4$ 时,

$$f(p)=(x-1)p+x^2-4x+3>0$$

恒成立,即

$$f(p)_{\min}>0$$

它又等价于

$$\begin{cases}f(0)=x^2-4x+3>0\\f(4)=x^2-1>0\end{cases}$$

从而可求得 $x$ 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

**例 2** 若存在实数 $x$ 使不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 成立,则实数 $a$ 的取值范围是________.

**解** 题意即 $(|x-4|+|x-3|)_{\min}<a$.

由例 2(1) 的解法知,$1<a$,得实数 $a$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

**例 3** 已知 $f(x)=\lg\dfrac{1^x+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$ ($n(>1)$ 是已知的整数),如果 $f(x)$ 恰在 $x\in(-\infty,1)$ 时有意义,求实数 $a$ 的取值范围.

**解** 题意即关于 $x$ 的不等式

$$\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x>-a$$

的解集为 $(-\infty,1)$.

设 $f(x)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^x+\left(\dfrac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^x$,则 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数(因为 $f(x)$ 的每一项都是减函数).

又 $x\in(-\infty,1)\Leftrightarrow f(x)>f(1)$. 所以题意即

$$f(x)>-a\Leftrightarrow f(x)>f(1)$$

又注意到 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,所以 $-a=f(1)$(若 $-a<f(1)$,则 $f(x)>-a$ 不能推出 $f(x)>f(1)$;若 $-a>f(1)$,则 $f(x)>f(1)$ 不能推出 $f(x)>-a$).

得 $-a=f(1)=\dfrac{n-1}{2}$,$a=\dfrac{1-n}{2}$,所求 $a$ 的取值范围是 $\left\{\dfrac{1-n}{2}\right\}$.

**注** 若将题目中的“$x<1$”改为“$x\leqslant 1$”,则答案为 $\varnothing$.

## 2 用以直代曲证不等式

**例 4** 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,$a+b+c=1$,求证:$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}\leqslant\dfrac{27}{10}$.

**证明** 设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,得$f'(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$,$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{5}$,函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$的图象在点$\left(\frac{1}{3},\frac{9}{10}\right)$处的切线方程为

$$y-\frac{9}{10}=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

即

$$y=\frac{11}{10}-\frac{3}{5}x$$

由"以直代曲"的思想(即在局部范围内,可用切线近似的代替曲线),结合本题要证的结论是"$\leqslant$"的形式,所以可以猜测

$$\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{11}{10}-\frac{3}{5}x(0<x<1)(\text{当且仅当 } x=\frac{1}{3}\text{ 时取等号}) \quad ①$$

要证 ① 成立,即证

$$6x^3-11x^2+6x-1\leqslant 0$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)\leqslant 0 \quad (0<x<1)(\text{当且仅当 } x=\frac{1}{3}\text{ 时取等号}) \quad ②$$

当$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},1\right)$时,均可证得

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)<0$$

所以 ② 成立!① 也成立!

在 ① 中令$x=a,b,c$后相加(并用题设)即得欲证.

## 3 解抽象函数问题举例

没有给出函数的具体表达式,只给出了函数满足的若干条性质,由这些性质来求解函数问题就是抽象函数问题.因为没有函数的具体表达式,所以函数的很多性质不明显,只能运用所给出的函数性质求解(常用赋值法),但技巧性较强,下面举例说明这种题型的解法.

**例 5** 定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$同时满足:

(Ⅰ)对于任意的$x,y\in(-1,1)$,有$f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$;

(Ⅱ)当$x\in(-1,0)$时,$f(x)>0$.

请解答:(1)判定$f(x)$的奇偶性、单调性;

(2)对一切$x\in\mathbf{N}^*$,求证:$f(\frac{1}{n+1})-f(\frac{1}{n+2})=f(\frac{1}{n^2+3n+1})$;

(3)求证:$f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})+\cdots+f(\frac{1}{n^2+3n+1})>f(\frac{1}{2})$.

**解** (1)在(Ⅰ)中令$x=0$,得$f(0)=0$;又令$y=-x$,得$f(x)+f(-x)=$

$f(0)=0$,即 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

由(Ⅱ)知 $f(x)=0$ 在 $x\in(-1,1)$ 时不能恒成立,所以 $f(x)$ 是奇函数但不是偶函数(若 $g(x)$ 即是奇函数又是偶函数时,必有 $g(x)=0$).

设 $-1<x_1<x_2<1$,得 $\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$,

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$$

由(Ⅰ)知 $\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\in(-1,1)$,所以 $\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\in(-1,0)$. 由(Ⅱ)得 $f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)>0, f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减.

(2) 先验证 $\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2}\in(-1,1)$,再由(Ⅰ)易证.

(3) 由(2)得:

$f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=$

$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)=$

$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{-1}{n+2}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$

**例 6** 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足:

(Ⅰ)对于任意的 $m,n\in\mathbf{R}$,有 $f(m+n)+1=f(m)+f(n)$;

(Ⅱ)$f(\frac{1}{2})=0$;

(Ⅲ)当 $x>\frac{1}{2}$ 时 $f(x)<0$,请解答:

(1) 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$;

(2) 求 $f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+\cdots+f(\frac{n}{3})$;

(3) 判定 $f(x)$ 的单调性;

(4) 找出一个具体的函数 $f(x)$(要写出 $f(x)$ 的解析式),使它满足题意.

**解** (1) 在(Ⅰ)中令 $m=n=\frac{1}{2}$,得 $f(1)=-1$;又令 $n=1$ 得 $f(n+1)-f(n)=-2$.

所以数列 $\{f(n)\}$ 是首项为 $-1$,公差为的等差数列,得 $f(n)=-(2n-1)$.

$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=-[1+3+\cdots+(2n-1)]=-n^2$.

(2) 由(Ⅰ)得,$f(m+n)=f(m)+f(n)-1$

又可得 $f(m+n+p)=f(m+n)+f(p)-1=$

$$f(m)+f(n)+f(p)-2$$

所以
$$f(n)=3f(\frac{n}{3})-2=-(2n-1)$$

$$f\left(\frac{n}{3}\right)=1-\frac{2}{3}n$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{3}\right)=$$

$$n-\frac{2}{3}(1+2+\cdots+n)=n-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=-\frac{1}{3}n^2+\frac{2}{3}n$$

(3) 设 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$,

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=$

$$f(x_2)-f(x_1)-1=f(x_2-x_1)+f(\frac{1}{2})-1=$$

$$f(x_2-x_1+\frac{1}{2})<0 \quad (用(Ⅲ))$$

所以 $f(x_1)>f(x_2)$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减.

(4) 由(Ⅰ),得

$$f(m+n)-1=[f(m)-1]+[f(n)-1]$$

令 $f(x)-1=g(x)$,得

$$g(m+n)=g(m)+g(n)$$

所以可选 $g(x)=kx$($k$ 为常数).

由(Ⅱ),得 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$,所以 $g(x)=-2x$,$f(x)=1-2x^2$,即选 $f(x)=1-2x$ 满足题意(由(3)及(Ⅰ)知这是唯一答案).

**例 7** 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$,$f(x+7)=f(7-x)$;方程 $f(x)=0$ 在$[0,7]$上的根只有 1,3.

(1) 判定 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 求方程 $f(x)=0$ 在$[-2\,005,2\,005]$上根的个数;

(3) 求方程 $f(x)=0$ 在$[-2\,007,2\,007]$上所有的根.

**分析** 由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$,$x=7$ 均对称,由此可分析出解题思路.

**解** (1) 由题意,可得 $f(x)=f(4-x)=f[7-(x+3)]=f[7+(x+3)]=f(10+x)$,所以 $f(x)$ 的一个周期为 10.

因为 $f(0)\neq 0$,所以 $f(x)$ 不是奇函数.

因为 $f(-3)=f(7)\neq 0$,而 $f(3)=0$,所以 $f(-3)\neq f(3)$,得 $f(x)$ 不是偶函数.

所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2) 当 $x \in (7,10)$ 时, $14 - x \in (4,7)$, $f(x) = f(14 - x) \neq 0$.

所以方程 $f(x) = 0$ 在一个周期$[0,10)$上仅有两个根 1,3.

也可得 $f(x) = 0$ 在一个周期$[x_0, x_0 + 10)$上的根也只有两个:因为 $f(x)$ 在每一个周期上所取的函数值相同,且每一个函数值所取的次数也相同.

方程 $f(x) = 0$ 在$[-2\,005, 2\,005]$上共$\frac{2\,005 - (2\,005)}{10} = 401$个周期上共有 802 个根;又 $f(2\,005) = f(5) \neq 0$,所以 $f(x) = 0$ 在$[-2\,005, 2\,005]$上根的个数是 803.

(3) 用(2)的方法可以求解,但以下解法更好:

上面已证 $f(x) = 0$ 在一个周期$[0,10)$上仅有两个根 1,3,所以 $f(x) = 0$ 的根均可表为 $10n + 1, 10n + 3(n \notin \mathbf{Z})$ 的形式,且 $10n + 1, 10n + 3 \in [-2\,007, 2\,007]$,分别得 $-200 \leqslant n \leqslant 200$, $-201 \leqslant n \leqslant 200$,且 $n \in \mathbf{Z}$.

得方程 $f(x) = 0$ 在$[-2\,007, 2\,007]$上所有的根为 $x = 10n + 1(-200 \leqslant n \leqslant 200, n \in \mathbf{Z})$ 或 $x = 10n + 3(-201 \leqslant n \leqslant 200, n \in \mathbf{Z})$.

## 4 一类绝对值函数的最值问题

**例 8** 求函数 $y = |x - 1| + 2|x - 2| + \cdots + 100|x - 100| (x \in \mathbf{R})$ 的最小值.

**解** 先将原函数写成 $1 + 2 + \cdots + 100 = 5\,050$ 个绝对值之和的形式,再首尾配对,层层分组,得

$$f(x) = (|x - 1| + |x - 100|) + (|x - 2| + |x - 100|) + \cdots + (|x - 71| + |x - 71|)$$

当且仅当 $x \in [1,100]$ 时,以上等式右边第一个括号取到最小值;当且仅当 $x \in [2,100]$ 时,以上等式右边第二个括号取到最小值;…;当且仅当 $x = 71$ 时,以上等式右边最后一个括号取到最小值.所以,当且仅当 $x = 71$ 时, $f(x)$ 取到最小值.可算得最小值是 99 080.

**例 9** 求函数 $y = |x - 1| + \sqrt{2}|x - \sqrt{2}| + \sqrt{3}|x - \sqrt{3}| + \sqrt{4}|x - \sqrt{4}| + \sqrt{5}|x - \sqrt{5}| (x \in \mathbf{R})$ 的最小值.

**解** 先将原函数写成 $y = (|x - 1| + |x - \sqrt{5}|) + (\sqrt{5} - 1)(|x - \sqrt{5}| + |x - \sqrt{2}|) + (1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})(|x - \sqrt{2}| + |x - 2|) + \sqrt{3}(|x - \sqrt{3}| + |x - 2|) + (1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3})|x - 2|$

同前的讨论得,当且仅当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取到最小值,且最小值是 $1 + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$.

## 5 对一组容易混淆问题的剖析

(该部分曾发表于《数学通讯》2008 年第 8 期)

**例 10** 已知函数 $f(x)=(x-1)^2, g(x)=x^3-3x^2-6x+m$.

(1) 若对于任意的 $x_1\in[-2,2], x_2\in[-2,2]$,都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立,求实数 $m$ 的取值范围;

(2) 若对于任意的 $x_1\in[-2,2]$,都有 $f(x_1)\leqslant g(x_1)$ 成立,求实数 $m$ 的取值范围;

(3) 若对于任意的 $x_1\in[-2,2]$,总存在 $x_2\in[-2,2]$,都有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立,求实数 $m$ 的取值范围.

**解** 对于(1),有学生这样解:

记 $h(x)=g(x)-f(x)=x^3-4x^2-4x+m-1$.

令 $h'(x)=3x^2-8x-4=0$,得 $x=\dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$,易知在 $\left(-2,\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}\right)$ 上 $h^1(x)>0$,因而 $h(x)$ 在 $\left(-2,\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}\right)$ 上单调递增;同理,$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{4+2\sqrt{7}}{3},2\right)$ 上单调递减,所以 $h(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最小值是 $h(2)=m-17$,依题意的 $h(x)$ 在 $[-2,2]$ 上非负,即 $h(x)\geqslant0$,所以 $m\geqslant17$.

事实上,"若 $x_1\in I, x_2\in I$,都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$"与"$x_1\in I$,都有 $f(x_1)\leqslant g(x_1)$"意义不同,前者表明函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的点 $x_1$ 的函数值不超过 $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的点 $x_2$($x_1$ 不一定等于 $x_2$)的函数值,用图象通俗的解释就是在两条平行线 $x=\pm2$ 之间,函数 $f(x)$ 图象上不但没有一点在函数 $g(x)$ 图象的上方,而且 $f(x)$ 图象上的最高点不高于 $g(x)$ 图象的最低点,由于 $x_1, x_2$ 的任意性,即函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值不超过函数 $g(x)$ 的最小值,而后者则表示 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的任一点 $x_1$ 的函数值不超过 $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的同一点 $x_1$ 的函数值,用图象解释就是在两条平行线 $x=\pm2$ 之间,函数 $f(x)$ 图象上没有一点是在函数 $g(x)$ 图象的上方的,两者容易混淆.

上述解法是错误的,实际上是(2) 的正确解法,(1) 的正确解法是:

求出 $[-2,2]$ 上 $f(x)_{\max}=f(-2)=9, g(x)_{\min}=g(2)=m-16$,由 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\min}$,得 $m\geqslant25$.

关于(3),要准确理解"对于任意的 $x_1\in[-2,2]$ 总存在 $x_2\in[-2,2]$,都有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立"的含义,它说明 $f(x)$ 的值域 $\subseteq g(x)$ 的值域,即 $[0,9]\subseteq[m-16, m+6\sqrt{3}-8]$,$m$ 的取值范围是 $[17-6\sqrt{3},16]$,而不能认为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域相等,或 $f(x)$ 的值域 $\supseteq g(x)$ 的值域等等.

## 6 函数在解析几何中的应用举例

**例 11** 在平面直角坐标系 $xOy$ 中,有一条定抛物线 $\Gamma: x^2 = 2py(p \neq 0)$ 和一个定点 $C(r,q)$,点 $A$ 是 $\Gamma$ 上的任意一点,$\Pi$ 是以 $AC$ 为直径的圆,是否存在一条直线 $l$,使得 $l$ 被圆 $\Pi$ 截得的弦长恒为定值?若存在,求出 $l$ 的方程;若不存在,说明理由.

**解** 可设点 $A$ 的坐标是 $(2pt,2pt^2)(t \in \mathbf{R})$,又 $C(r,q)$.

由全日制普通高级中学(必修)《数学》(第二册·上)(2004 年人民教育出版社)第 82 页第 3 题的结论(此结论可叫做圆的直径式方程),立得圆 $\Pi$ 的方程为

$$\Pi:(x-2pt)(x-r)+(y-2pt^2)(y-q)=0 \qquad ③$$

又设直线 $l$ 与圆 $\Pi$ 的交点为 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

当直线 $l$ 的斜率不存在时,可设 $l$ 的方程为 $x=h$,将其代入 ③,得

$$y^2-(2pt^2+q)y+2pqt^2+(h-r)(h-2pt)=0$$

$$|MN|^2=|y_1-y_2|^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=$$

$$(2pt^2+q)^2-8pqt^2-4(h-r)(h-2pt) \qquad ④$$

因为弦长 $|MN|$ 与 $t(t \in \mathbf{R})$ 的值无关,所以式 ④ 右边展开式中 $t^4$ 的系数 $4p^2=0$,得 $p=0$,与题设 $p \neq 0$ 矛盾!这就说明满足题意的直线 $l$ 若存在,则 $l$ 的斜率存在,所以可设 $l$ 的方程为 $l: y=kx+b$,将其代入式 ③,得

$$x^2-(r+2pt)x+2prt+(kx+b-q)(kx+b-2pt^2)=0$$

$$(k^2+1)x^2+[k(2b-q-2pt^2)-r-2pt]x+2prt+(b-q)(b-2pt^2)=0$$

⑤

由弦长公式,得

$$|MN|^2=(k^2+1)|x_1-x_2|^2=(k^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=$$

$$(k^2+1)\left\{\left[\frac{k(2b-q-2pt^2)-r-2pt}{k^2+1}\right]^2+\frac{4(q-b)(b-2pt^2)-8prt}{k^2+1}\right\}$$

⑥

因为式 ⑥ 右边的值与 $t(t \in \mathbf{R})$ 无关,所以式 ⑥ 右边展开式中 $t^4$ 的系数 $\frac{4p^2k}{k^2+1}=0$,得 $k=0$,所以

$$|MN|^2=(r+2pt)^2+4(q-b)(b-2pt^2)-8prt=$$

$$[4p^2-8p(q-b)]t^2-4prt+r^2+4b(q-b)$$

进而,得

$$\begin{cases}-4pr=0\\4p^2-8p(q-b)=0,\end{cases}$$

$$k = r = 0, b = q - \frac{p}{2} \quad ⑦$$

此时,方程⑤即

$$x^2 - 2ptx + \frac{p}{2}(2pt^2 - q + \frac{p}{2}) = 0$$

直线 $l$ 与圆 $\Pi$ 有两个不同交点的充要条件是

$$\Delta = p(2q - p) > 0$$

且有

$$|MN|^2 = p(2q - p)$$

由⑦得,此时 $l$ 的方程是 $y = kx + b = q - \frac{p}{2}$.

综上所述,得本题的完整答案是:

当且仅当 $r = 0, p(2q - p) > 0$ 时,直线 $l$ 存在,且此时 $l$ 的方程是 $y = q - \frac{p}{2}$.

(一眼就看出:本题是2007年高考湖北卷文科压轴题(即理科第19题)的一般情形.)

**例12** 当 $m, a, b$ 满足什么关系时,椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a, b \in \mathbf{R}^+, a \neq b)$ 和抛物线 $y = x^2 + m$ 有四个不同的交点?并证明这四个交点共圆.

**解** 题设即方程组

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2(a, b \in \mathbf{R}^+, a \neq b) & ⑧ \\ y = x^2 + m & ⑨ \end{cases}$$

有四组实数解 $(x, y)$.

也即关于 $y$ 的一元二次方程

$$a^2y^2 + b^2y - b^2(m + a^2) = 0(y > m \text{ 且 } y \neq \pm b)$$

有两个不同的实数解. 它等价于

$$\begin{cases} \Delta = b^2 + 4a^2m + 4a^4 > 0 \\ \frac{-b^2 - b\sqrt{b^2 + 4a^2m + 4a^4}}{2a^2} > m \\ m \neq \pm b \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > -a^2 - \frac{b^2}{4a^2} \\ m < -\frac{b^2}{2a^2} \text{ 且 } m < -b \end{cases}$$

当 $-\frac{b^2}{2a^2} \leqslant -b$ 即 $b \geqslant 2a^2$ 时, $-a^2 - \frac{b^2}{4a^2} < m < -\frac{b^2}{2a^2}$. 但 $-a^2 - \frac{b^2}{4a^2} <$

$-\frac{b^2}{2a^2}\Leftrightarrow b<2a^2$,说明此时 $m\in\varnothing$.

从而得 $b<2a^2$ 且 $-a^2-\frac{b^2}{4a^2}<m<-b$.这就是所求的 $m,a,b$ 满足的关系.

计算 ⑧ + ⑨ × $(b^2-a^2)$ 并整理得

$$x^2+y^2+(\frac{b^2}{a^2}-1)y+m-b^2-\frac{mb^2}{a^2}=0 \qquad ⑩$$

因为题设中四个交点的坐标一定适合方程⑩,所以方程⑩一定表示圆,即题设中的四个交点一定共圆.

本题题意简洁,但难度却很大.它是由《青年科学》杂志社发起的征集优秀数学命题活动(后由辽宁科技出版社编成《中学生优秀数学命题选集》一书)中的一道题.第一问的原答案是 $b<-m<a^2$,此答案有误.事实上,取 $a=2$, $b=1,m=-4$,仍可得到四个交点$(\pm 2,0)$,$(\pm\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4})$.

## 7 导数在函数中的应用举例

### 7.1 求切线

**例 13** 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P(2,\frac{8}{3})$,求该曲线过该点的切线.

**解** $y'=x^2$,因为点 $P$ 在曲线上,所以 $P$ 可为切点.

(1) $P$ 为切点时,$k=4$,$y-\frac{8}{3}=4(x-2)$,即 $12x-3y-16=0$.

(2) 若 $P$ 不为切点时,可设切点 $Q(x_0,\frac{1}{3}x_0^3)(x_0\neq 2)$,得:

$$k=\frac{\frac{1}{3}x_0^3-\frac{8}{3}}{x_0-2}=x_0^2$$

$$x_0^2-x_0-2=0$$

因为 $x_0\neq 2$,所以 $x_0=-1$.

切点为 $Q(-1,-\frac{1}{3})$.切线为 $y+\frac{1}{3}=1(x+1)$,即 $3x-3y+2=0$.

### 7.2 求单调区间

**例 14** 若函数 $y=\sqrt{x^2+1}-ax(a>0)$ 在$[0,+\infty)$上单调,求 $a$ 的范围.

**解** 即函数 $y$ 在$(0,+\infty)$上单调.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - a = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - a$$

由 $x > 0$,得 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ 的范围是$(0,1)$.

若 $y$ 是增函数,则 $y' \geqslant 0, 0 \geqslant a$,与题设"$0 < a$"矛盾.

若 $y$ 是减函数,则 $y' \leqslant 0, 1 \leqslant a$,即 $a \geqslant 1$,满足 $a > 0$.

综上,得 $a \geqslant 1$.

### 7.3　讨论方程根的个数

**例 15**　讨论关于 $x$ 的方程 $\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = k$ 根的个数.

**解**　先由导数知识可画出 $y = f(x)$ 的图象如图 1 所示:

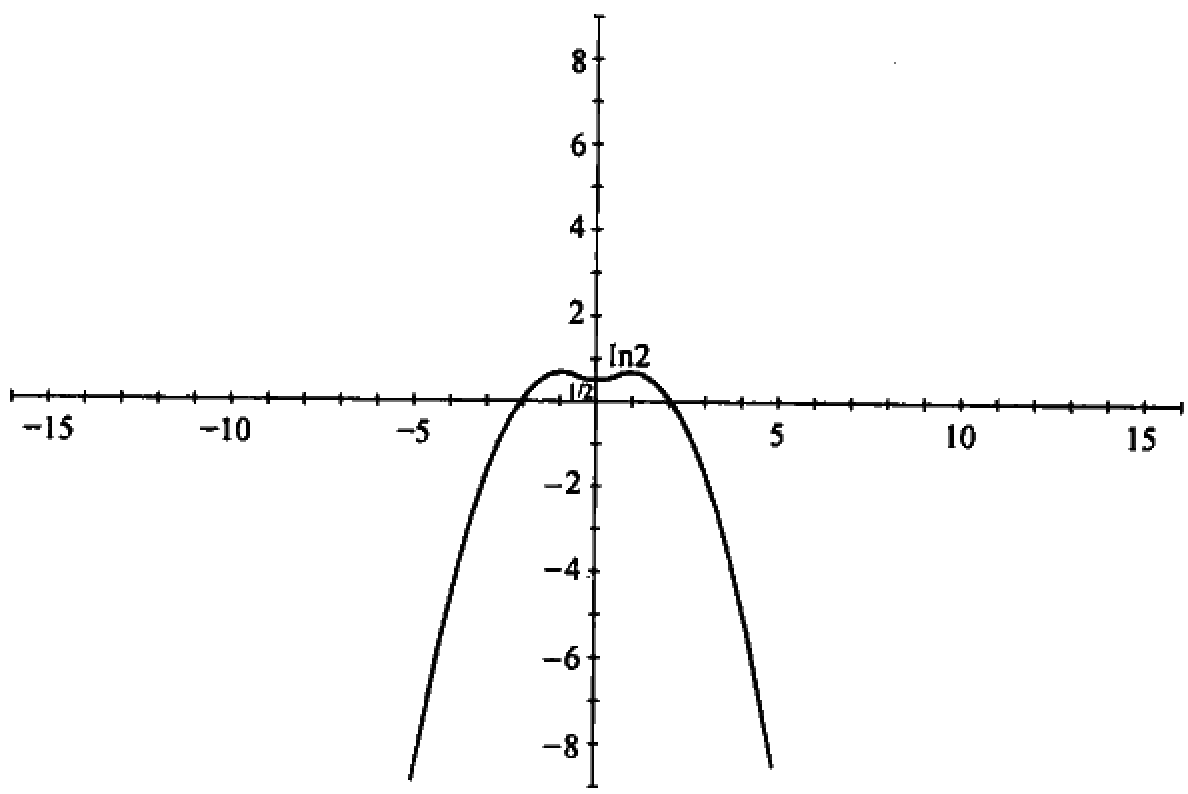



图 1

所以(1) 当 $k > \ln 2$ 时,无解;

(2) 当 $k = \ln 2$ 或 $k < \frac{1}{2}$ 时,两个解;

(3) 当$\frac{1}{2} < k < \ln 2$ 时,四个解;

(4) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时,三个解.

### 7.4　证不等式

**例 16**　证明不等式:

(1)$x > \ln(x+1)(x>0)$;

(2)$x \geqslant \ln(x+1)$;

(3) 已知 $m,n \in \mathbf{N}^*, 1 < m < n$,求证:$(1+m)^n > (1+n)^m$.

**证明** (1) 设 $f(x) = x - \ln(x+1) \quad (x>0)$,得

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$$

所以 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是增函数.

由 $x>0$,得 $f(x) > f(0) = 0$.

(2) 即证 $f(x) = x - \ln(x+1)(x>-1)$ 的最小值是 $f(0)$,读者可证.

(3) 即证 $n\ln(1+m) > m\ln(1+n)$,

$$\frac{\ln(1+m)}{m} > \frac{\ln(1+n)}{n}$$

设 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}(x>1)$,只需证 $f'(x) \geqslant 0$ 即可,读者可证.

## 7.5 求极值、最值

**例 17** 一长方体的长、宽、高之和为 1,表面积为$\dfrac{16}{27}$,求其体积的最大值.

**错解** 设长方体的长、宽、高分别为 $x,y,z$,体积为 $V(x)$,得

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=\dfrac{8}{27} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} y+z=1-x \\ yz=\dfrac{8}{27}-x(1-x) \end{cases}$$

$$V(x) = xyz = x\left(\frac{8}{27} - x + x^2\right)(0<x<1)$$

令 $V'(x) = \dfrac{8}{27} - 2x + 3x^2 = 0$,得 $x = \dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9}$.

$$V\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{20}{729}, V\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{729},$$

$$V(0) = 0, V(1) = \frac{8}{27} > \frac{20}{729} > \frac{16}{729} > 0$$

所以无最大值.

**正解** 设长方体的长、宽、高分别为 $x,y,z$,体积为 $V(x)$,得

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=\dfrac{8}{27} \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} y+z=1-x \\ yz=\frac{8}{27}-x(1-x) \end{cases}$$

所以 $y,z$ 可以看成方程 $A^2+(x-1)+\frac{8}{27}-x(1-x)=0$ 的两个正根.

由 $\Delta\geqslant 0$,解得$\frac{1}{9}\leqslant x\leqslant\frac{5}{9}$ 为所求定义域.

$$V\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{20}{729},V\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{16}{729},V\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{20}{729},V\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{729}$$

所以
$$V(x)_{\max}=V\left(\frac{2}{9}\right)=V\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{20}{729}$$

## 8 三次方程根的情况的简明结论

笔者在论文《三次方程根的情况的简明结论》(发表于《中学数学》2007 年第 10 期)中用导数得到

**定理** 对于一元三次方程 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0(a\in\mathbf{R}^*,b,c,d\in\mathbf{R})$,设方程 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的各种情形是:

(1) 方程 $f(x)=0$ 有三个不同实根 $\Leftrightarrow\Delta>0$ 且 $f(x)$ 的两个极值异号;(此时,$f(x)$ 的两个极值点分别为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$,则这三个根分别在 $(-\infty,\alpha)$,$(\alpha,\beta)$,$(\beta,+\infty)$ 内)

(2) 方程 $f(x)=0$ 有一个二重根和一个一重根 $\Leftrightarrow\Delta>0$ 且 $f(x)$ 有一个极值为 0;(此时极值点就是二重实根);

(3) 方程 $f(x)=0$ 有三重实根 $\Leftrightarrow\Delta=0$(即 $b^2=3ac$)且 $b^3=27a^2d\Leftrightarrow f(x)$ 是完全立方式;(此时三重实根为$\frac{-b}{3a}$)

(4) 方程 $f(x)=0$ 有一个实根和两个共轭虚根 $\Leftrightarrow$ 除(1),(2),(3)外的所有情形.

**例 18** 讨论方程 $x^3+px+1=0(p\in\mathbf{R})$ 的根的情况.

**解** 由定理,可得

(1) 当 $p<-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 时,原方程有三个相异实根;

(2) 当 $P=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 时,原方程有一个二重根$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$和一个一重根$(-\sqrt[3]{4})$

(3) 当 $p>-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 时,原方程有一个实根和两个共轭虚根.

## 9 巩固练习

1. 若指数函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的部分对应值如下表,则不等式

$f^{-1}(|x|)<0$ 的解集为(　　)

A. $\{x|-1<x<1\}$　　B. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<0$ 或 $0<x<1\}$

| $x$ | $-2$ | 0 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.592 | 1 |

2. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f(x-1)$ 与函数 $y=f^{-1}(x-1)$ 的图象　　(　　)

A. 关于直线 $y=x$ 对称　　B. 关于直线 $y=x-1$ 对称

C. 关于直线 $y=x+1$ 对称　　D. 关于直线 $y=1$ 对称

3. 若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $|x|\geqslant ax$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A. $a<-1$　　B. $|a|\leqslant 1$　　C. $|a|<1$　　D. $a\geqslant 1$

4. 某市出租汽车的车费计算方式如下：路程在 3 公里以内(含 3 公里)为 8.00 元；达到 3 公里后，每增加 1 公里收 1.40 元；达到 8 公里后，每增加 1 公里收 2.10 元．增加不足 1 公里按四舍五入计算．某乘客乘坐该种出租车交了 44.4 元车费，则此乘客乘该出租车行驶路程为的公里数是(　　)(只需从以下答案中选择一个正确的即可)

A. 22　　B. 24　　C. 26　　D. 28

5. 若函数 $f(x)=(a-2)x^2+2(a-2)x-4$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(-\infty,1]$，则满足条件的实数 $a$ 组成的集合是________.

6. 设函数 $f(x)=xe^x$，则 $f'(1)=$ ________.

7. 已知 $a=0.9^{1.1}$，$b=1.1^{0.9}$，$c=\log_2 0.9$，则 $a,b,c$ 按从小到大的顺序排列为________.

8. 物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述：设物体的初始温度是 $T_0$，经过一定时间 $t$ 后的温度是 $T$，则 $T-T_a=(T_0-T_a)\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{t}{h}}$，其中 $T_a$ 称为环境温度，$h$ 称为半衰期．现有一杯用 88℃ 热水冲的速溶咖啡，放在 24℃ 的房间中，如果咖啡降到 40℃ 需要 20 min，那么此杯咖啡从 40℃ 降温到 32℃ 时，还需要________ min.

9. 某日中午 12 时整，甲船自 $A$ 处以 16 km/h 速度向正东行驶，乙船自 $A$ 的正北 18 km 处以 24 km/h 的速度向正南行驶，则当日 12 时 30 分时两船之间的距离对时间的变化率是________.

10. 设集合 $A=\{x|x^2+px+q=0\}$，$B=\{x|qx^2+px+1=0\}$ 同时满足 $A\cap B\neq\varnothing$；$A\cap \complement_R B=\{-2\}$，其中实数 $p,q$ 均不为 0，则 $2p-q=$

________.

11. 已知$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,且方程$f(x)=x$无实数根,下列命题:

① 方程$f[f(x)]=x$也一定没有实数根;

② 若$a>0$,则不等式$f[f(x)]>x$对一切实数$x$都成立;

③ 若$a<0$,则必存在实数$x_0$,使$f[f(x_0)]>x_0$;

④ 若$a+b+c=0$,则不等式$f[f(x)]<x$对一切实数$x$都成立.

其中正确命题的序号是____.(把你认为正确的命题的所有序号都填上)

12. 已知函数$f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$($a,b$为常数,且$a\neq 0$),满足$f(1)=\dfrac{1}{2}$,$f(x)=x$有唯一解,求函数$f(x)$的解析式和$f[f(-3)]$的值.

13. 设$a\in\mathbf{R}$,二次函数$f(x)=ax^2-2x-2a$,若$f(x)>0$的解集为$A$,$B=\{x\mid 1<x<3\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,求实数$a$的取值范围.

14. 已知函数$f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$($a,b$为常数),且方程$f(x)-x+12=0$有两个实根$x_1=3,x_2=4$.

(1) 求函数$f(x)$的解析式;

(2) 设$k>1$,解关于$x$的不等式$f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

15. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{N}^*$上的函数,且满足$f(f(3k))=3k,f(1)=2$,设$a_n=f(3^{n-1}),b_1=1,b_n-\log_3 f(n)=b_1-\log_3 f(a_1)$.

(1) 求证:$\dfrac{b_1}{f(a_1)}+\dfrac{b_2}{f(a_2)}+\cdots+\dfrac{b_n}{f(a_n)}<\dfrac{b_3}{4}$;

(2) 若$\dfrac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}b_{n+1}}+\dfrac{f(a_{n+2})}{a_{n+2}b_{n+2}}+\cdots+\dfrac{f(a_{2n})}{a_{2n}b_{2n}}+\dfrac{f(a_{4n+1})}{a_{4n+1}b_{4n+1}}\leqslant m$对于任意大于1的正整数$n$恒成立,求实数$m$的取值范围.

16. 若椭圆$\dfrac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$与抛物线$y^2=\dfrac{1}{2}x$有公共点,求实数$a$的取值范围.

17. 求抛物线$y^2=x$与圆$(x+2)^2+y^2=1$的公共点的个数.

18. 求抛物线$y^2=9x$与圆$(x-\dfrac{5}{2})^2+y^2=\dfrac{9}{4}$的公共点的个数.

19. 求抛物线$y^2=9x$与圆$(x-1)^2+y^2=1$的公共点的个数,并证明它们相切.

20. 若椭圆$\dfrac{x^2}{n}+\dfrac{y^2}{9}=1$和抛物线$y=x^2-m$有四个不同的交点,求实数$m,n$的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c(-1 \leqslant x \leqslant 1)$，是否存在实数 $b,c$ 使 $|f(x)|_{max} = \frac{1}{2}$?若存在，求 $b,c$ 的值;若不存在，说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = ax^2 - bx + 1$.

(1) 是否存在实数 $a,b$ 使 $f(x) > 0$ 的解集是(3,4)，若存在，求实数 $a,b$ 的值，若不存在请说明理由.

(2) 若 $a$ 为整数，$b = a + 2$，且函数 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上恰有一个零点，求 $a$ 的值.

23. 北京奥运会纪念章某特许专营店销售纪念章，每枚进价为 5 元，同时每销售一枚这种纪念章还需向北京奥组委交特许经营管理费 2 元，预计这种纪念章以每枚 20 元的价格销售时该店一年可销售 2 000 枚，经过市场调研发现每枚纪念章的销售价格在每枚 20 元的基础上每减少 1 元则增加销售 400 枚，而每增加 1 元则减少销售 100 枚，现设每枚纪念章的销售价格为 $x$ 元.

(1) 写出该特许专营店一年内销售这种纪念章所获得的利润 $y$(元) 与每枚纪念章的销售价格 $x$(元) 的函数关系式(并写出这个函数的定义域);

(2) 当每枚纪念章销售价格 $x$ 为多少元时，该特许专营店一年内利润 $y$(元) 最大?并求出这个最大值.

24. 设函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = 3x + 2$.

(1) 求 $a,b,c$ 的值;

(2) 若对任意 $x \in (0,1]$ 都有 $f(x) \leqslant \frac{k}{x}$ 成立，求实数 $k$ 的取值范围;

(3) 若对任意 $x \in (0,3]$ 都有 $|f(x) - mx| \leqslant 16$ 成立，求实数 $m$ 的取值范围.

25. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $M(t,f(t))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a > 0$，如果过点 $(a,b)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线，证明：$-a < b < f(a)$.

**巩固练习答案**

1 ~ 4 D B B A 5. $\{-3\}$ 6. 2e 7. $c,a,b$ 8. 10. 9. $-1.6$ km/h 10. $-4$ 11. ①②④

5. 设 $a - 2 = b$，得 $f(x) = bx^2 + 2bx - 4$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(-\infty,1]$ 的充要条件是

$$\begin{cases} b < 0 \\ f(x) \text{ 的最小值} \dfrac{-16b - 4b^2}{4b} = 1 \end{cases}$$

得 $b=-5, a=-3$.

10. 集合 $A$ 中的方程 $x^2+px+q=0$(由 $q\neq 0$,得 $x\neq 0$),即

$$q\left(\frac{1}{x}\right)^2+p\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$$

让该方程与集合 $B$ 中的方程

$$qx^2+px+1=0$$

相比较知,集合 $A$ 中的方程的根与集合 $B$ 中的方程的根互为倒数.

由韦达定理知,$A$ 中方程的两个根是:$-2, -\frac{q}{2}$;所以 $B$ 中方程的两个根是:$-\frac{1}{2}, -\frac{2}{q}$.

再由 $A\cap B\neq\varnothing$;$A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\{-2\}$ 知,$A$ 与 $B$ 中的两个方程有公共根,但此公共根不是 $-2$,所以只能是 $-\frac{q}{2}$. 得 $-\frac{q}{2}$ 是 $B$ 中方程的根:

(1) $-\frac{q}{2}=-\frac{1}{2}$,得 $q=1$,此时有 $A=B$,$A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$,不满足题意.

(2) $-\frac{q}{2}=-\frac{2}{q}$,得 $q=\pm 2$.

若 $q=2$,得 $p=3$(因为 $-2-\frac{q}{2}=-p$),$A=\{-2,-\frac{1}{2}\}$,$B=\{-\frac{1}{2},-1\}$,满足题意,此时 $2p-q=-4$;

若 $q=-2$,得 $p=1$,$A=\{-2,1\}$,$B=\{-\frac{1}{2},1\}$,也满足题意,此时也得 $2p-q=-4$.

12. 由 $f(1)=\frac{1}{2}$,得 $b=2-a$,$f(x)=\frac{x}{ax+2-a}$(常数 $a\neq 0$).

方程 $f(x)=x$,即

$$\frac{x}{ax+2-a}=x \quad ⑪$$

得

$$ax^2=(a-1)x$$

$$x=0,\text{或}\frac{a-1}{a}$$

检验(即 ⑪ 中分母的值不为 0):

$x=\frac{a-1}{a}$ 一定是 ⑪ 的根;当且仅当 $a\neq 2$ 时 $x=0$ 是 ⑪ 的根.

从而,得

(1) 当 $a=2$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}(x\neq 0)$,⑪ 一定有唯一解 $x=\frac{a-1}{a}=\frac{1}{2}$;此时 $f[f(-3)]=\frac{1}{2}$.

(2) 当 $a \neq 2$ 时,⑪ 有唯一解 $\Leftrightarrow \frac{a-1}{a}=0 \Leftrightarrow a=1$,此时 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ $(x \neq -1)$,$f[f(-3)]=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{5}$.

13. 由 $f(x)$ 是二次函数知 $a \neq 0$.

令 $f(x)=0$ 的两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a}}$,$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a}}$.

由此可知 $x_1<0$,$x_2>0$.

(1) 当 $a>0$ 时,$A=\{x \mid x<x_1\} \cup \{x \mid x>x_2\}$.

$A \cap B \neq \varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$,即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a}}<3$.

解得 $a>\frac{6}{7}$.

(2) 当 $a<0$ 时,$A=\{x \mid x_1<x<x_2\}$.

$A \cap B \neq \varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$,即:$\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a}}>1$.

解得 $a<-2$.

综上,$A \cap B \neq \varnothing$ 时实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-2) \cup (\frac{6}{7},+\infty)$.

14. (1) 将 $x_1=3$,$x_2=4$ 分别代入 $f(x)=\frac{x^2}{ax+b}$,得

$$\begin{cases}\frac{9}{3x+b}=-9\\ \frac{16}{4x+b}=-8\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$$

所以

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x}(x \neq 2)$$

(2) 不等式即

$$\frac{x^2}{2-x}<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$$

可化为

$$\frac{x^2-(k+1)x-k}{2-x}<0$$

即

$$(x-2)(x-1)(x-k)>0$$

① 当 $1<k<2$ 时,解集为 $x \in (1,k) \cup (2,+\infty)$;

② 当 $k=2$ 时,不等式为 $(x-2)^2(x-1)>0$,解集为 $x \in (1,2) \cup (2,+\infty)$;

③ 当 $k>2$ 时,解集为 $x \in (1,2) \cup (k,+\infty)$.

15. (1) $f(a_n)=f(f(3^{n-1}))=3 \cdot 3^{n-1}=3^n$,$\log_3 f(a_n)=n$.

由 $b_n - \log_3 f(n) = b_1 - \log_3 f(a_1)$,得 $b_n - n = b_1 - 1 = 0, b_n = n$.

设 $S_n = \frac{b_1}{f(a_1)} + \frac{b_2}{f(a_2)} + \cdots + \frac{b_n}{f(a_n)}$,得

$$S_n = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3^2} + \cdots + n \times \frac{1}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} S_n = 1 \times \frac{1}{3^2} + 2 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + n \times \frac{1}{3^{n+1}}$$

所以
$$\frac{2}{3} S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - n \times \frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1}}(n + \frac{3}{2}) < \frac{1}{2}$$

$S_n < \frac{3}{4} = \frac{b_3}{4}$,及结论(1)成立.

(2) 由 $f(f(3k)) = 3k$,得

$$f(f(f(3k))) = f(3k)$$

且
$$f(f(f(k))) = 3f(k)$$

所以
$$f(3k) = 3f(k)$$

$$a_{n+1} = f(3^n) = f(3 \times 3^{n-1}) = 3f(3^{n-1}) = 3a_n$$

又 $a_1 = f(1) = 2$,得 $a_n \neq 0$,所以数列$\{a_n\}$是首项为2,公比为3的等比数列,所以

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\frac{f(a_n)}{a_n b_n} = \frac{3^n}{2 \times 3^{n-1} \times n} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{n}$$

设
$$g(n) = \frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1} b_{n+1}} + \frac{f(a_{n+2})}{a_{n+2} b_{n+2}} + \cdots + \frac{f(a_{2n})}{a_{2n} b_{2n}} + \frac{f(a_{4n+1})}{a_{4n+1} b_{4n+1}} =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n+1}\right)$$

则
$$g(n+1) - g(n) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4n+5}\right) -$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n+1}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{4n+1}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{4}{(4n+1)(4n+5)}\right] =$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{-3}{(2n+1)(2n+2)(4n+1)(4n+5)} < 0$$

得 $g(n) > g(n+1)$，所以当 $n > 1, n \in \mathbf{N}^*$ 时，$g(n)$ 单调递减，又

$$g(n) \leqslant g(2) = \frac{25}{24}$$

所以 $m$ 的取值范围是 $\left[\frac{25}{24}, +\infty\right)$.

16. 题意即方程组 $\begin{cases}\dfrac{(x-a)^2}{2} + y^2 = 1\\ y^2 = \dfrac{1}{2}x\end{cases}$ 有实数解，也即方程

$$x^2 - (2a-1)x + a^2 - 2 = 0 \qquad ⑫$$

有非负实数解(由 $y^2 = \frac{1}{2}x$ 知 $x \geqslant 0$)，它等价于(令 $f(x) = x^2 - (2a-1)x + a^2 - 2$)：

$$\begin{cases}\Delta \geqslant 0\\ f(0) \geqslant 0 \quad 或 f(0) \leqslant 0\\ \dfrac{2a-1}{2} \geqslant 0\end{cases}$$

解得 $a \in \left[-\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right]$，此即所求 $a$ 的取值范围.

**注**　也可这样求解，方程⑫有非负实数解 $\Leftrightarrow$ 方程⑫的较小解 $\frac{2a-1-\sqrt{\Delta}}{2} \geqslant 0$. 这种直接求根后解不等式的方法有时比用数形结合法解一元二次方程根的分布问题更简洁，请读者注意.

17. 题意即求方程组 $\begin{cases}y^2 = x\\ (x+2)^2 + y^2 = 1\end{cases}$ 的实数解的组数.

其中 $x$ 的值即方程

$$x^2 + 5x + 3 = 0 \qquad ⑬$$

的非负实数解(由 $y^2 = x$ 知 $x \geqslant 0$)，而⑬中的 $x$ 显然是负数，所以该方程组无实数解，所求公共点的个数是 0.

**注**　以上方程组实数解的组数并不一定是方程⑬的实数解的个数，因为由⑬中的一个 $x$ 可能得到两个 $y$. 这也是读者应当注意的.

18. 题意即方程组 $\begin{cases}y^2 = 9x\\ (x-\frac{5}{2})^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}\end{cases}$ 的实数解的组数.

其中 $x$ 的值即方程

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad ⑭$$

的非负实数解(由 $y^2 = 9x$ 知 $x \geqslant 0$)，而⑭中的 $x = -2$，所以该方程组无实数

解，所求公共点的个数是0.

19. 由$\begin{cases}y^2=9x\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$

得
$$x^2+7x=0(x\geqslant 0)$$

$x=0$，进而得交点为$O(0,0)$，所以所求公共点的个数是1.

显然题中的抛物线与圆在点$O$处的切线重合(均为$y$轴)，所以它们相切.

20. 题设即方程组
$$\begin{cases}9x^2+ny^2=9n \quad (n>0\text{且}n\neq 9)\\y=x^2-m\end{cases} \tag{15}$$
有四组实数解$(x,y)$.

也即关于$y$的一元二次方程
$$ny^2+9y+9(m-n)=0 \quad (y>-m\text{且}y\neq\pm 3) \tag{16}$$
有两个不同的实数解.它等价于(令$f(y)=ny^2+9y+9(m-n)$)：
$$\begin{cases}\Delta>0\\f(-m)>0\\-\dfrac{9}{2n}>-m\\m\neq\pm 3\\n>0\text{且}n\neq 9\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}m>3\\\dfrac{9}{2n}<m<n+\dfrac{9}{4n}\\n>0\text{且}n\neq 9\end{cases} \tag{17}$$

⑰就是题设中的椭圆和抛物线有四个不同的交点的充要条件.

下面由⑰求实数$m,n$的取值范围.

在平面直角坐标系$nOm$中画出⑰表示的区域，从而可得$m,n$的取值范围分别是$(3,+\infty)$，$(\frac{3}{2},9)\cup(9,+\infty)$.

21. 假设存在满足题意的$b,c$，令$x=0,1,-1$，得
$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant c\leqslant\dfrac{1}{2} & (18)\\-\dfrac{1}{2}\leqslant 1+b+c\leqslant\dfrac{1}{2} & (19)\\-\dfrac{1}{2}\leqslant 1-b+c\leqslant\dfrac{1}{2} & (20)\end{cases}$$

⑲+⑳，得$-\frac{3}{2}\leqslant c\leqslant-\frac{1}{2}$，

再由 ⑱,得 $c=-\frac{1}{2}$.

将 $c=-\frac{1}{2}$ 代入 ⑲,⑳,得

$-1\leqslant b\leqslant 0,0\leqslant b\leqslant 1$,所以 $b=0$.

可验证知 $b=0,c=-\frac{1}{2}$ 满足题意.所以满足题意的 $b,c$ 存在且唯一:$b=0,c=-\frac{1}{2}$.

22.(1) 不等式 $ax^2-bx+1>0$ 的解集是(3,4),故方程 $ax^2-bx+1=0$ 的两根是 $x_1=3,x_2=4$.

所以 $$\frac{1}{a}=x_1x_2=12,\frac{b}{a}=x_1+x_2=7$$

所以 $$a=\frac{1}{12},b=\frac{7}{12}$$

而当 $a=\frac{1}{12}>0$ 时,不等式 $ax^2-bx+1>0$ 的解集是 $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$,不是(3,4),故不存在实数 $a,b$ 的值,使不等式 $ax^2-bx+1>0$ 的解集是(3,4).

(2) 因为 $b=a+2$,所以 $f(x)=ax^2-(a+2)x+1,\Delta=(a+2)^2-4a>0$.

函数 $f(x)=ax^2-bx+1$ 必有两个零点,又函数 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上恰有一个零点,所以

$$f(-2)f(-1)<0,(6a+5)(2a+3)<0,-\frac{3}{2}<a<-\frac{5}{6}$$

又 $a\in\mathbf{Z}$,所以 $a=-1$.

23.(1) 依题意,得

$$y=\begin{cases}[2\,000+400(20-x)](x-7),0<x\leqslant 20\\ [2\,000-100(20-x)](x-7),20<x<40\end{cases}$$

所以 $$y=\begin{cases}400(25-x)(x-7),0<x\leqslant 20\\ 100(40-x)(x-7),20<x<40\end{cases}$$

此函数的定义域为(0,40).

(2) $$y=\begin{cases}400[-(x-16)^2+81],0<x\leqslant 20\\ 100\left[-\left(x-\frac{27}{4}\right)^2+\frac{1\,089}{4}\right],20<x<40\end{cases}$$

当 $0<x\leqslant 20$,则当 $x=16$ 时,$y_{\max}=32\,400$(元);

当 $20<x<40$,则当 $x=\frac{47}{2}$ 时,$y_{\max}=27\,225$(元);

综上可得当 $x=16$ 时,该特许专营店获得的利润最大,为 32 400 元.

24.(1) 因为函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$.

因为 $a(-x)^3+b(-x)+c=-(ax^3+bx+c)$,所以 $c=0$.

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=3x+2$,$f'(x)=3ax^2+b$,所以 $f'(1)=3$,且 $f(1)=5$,所以

$$\begin{cases}3a+b=3\\a+b=5\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}a=-1\\b=6\end{cases}$$

(2)$f(x)=-x^3+6x$,依题意 $-x^3+6x\leqslant\frac{k}{x}$ 对任意的 $x\in(0,1]$ 恒成立,所以 $-x^4+6x^2\leqslant k$ 对任意的 $x\in(0,1]$ 恒成立,即 $k\geqslant-(x^2-3)^2+9$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立,所以 $k\geqslant5$.

(3) **解法 1** $|f(x)-mx|\leqslant16$,即 $-16\leqslant f(x)-mx\leqslant16$,

所以

$$\begin{cases}-x^3+6x-mx\leqslant16\\-x^3+6x-mx\geqslant-16\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}m\geqslant-x^2-\dfrac{16}{x}+6\\m\leqslant-x^2+\dfrac{16}{x}+6\end{cases}$$

对任意的 $x\in(0,3]$ 恒成立.

记 $g(x)=-x^2-\frac{16}{x}+6$,其中 $x\in(0,3]$,则

$$g'(x)=-2x+\frac{16}{x^2}=-\frac{2}{x^2}(x^3-8)$$

所以当 $x\in(0,2)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增,

当 $x\in(2,3)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $(0,3]$ 上的最大值是 $g(2)=-6$,得 $m\geqslant-6$;

记 $h(x)=-x^2+\frac{16}{x}+6$,其中 $x\in(0,3]$,则 $h'(x)=-2x-\frac{16}{x^2}<0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减,$h(x)$ 在 $(0,3]$ 上的最小值是 $h(3)=\frac{7}{3}$,则 $m\leqslant\frac{7}{3}$.

综上可得所求实数 $m$ 的取值范围是 $-6\leqslant m\leqslant\frac{7}{3}$.

**解法 2** 设 $g(x)=f(x)-mx=-x^3+(6-m)x$,则 $g'(x)=-3x^2+(6-m)$.

当 $x\in(0,3]$ 时，$-27\leqslant -3x^2\leqslant 0$.

① 当 $m\geqslant 6$ 时，在 $x\in(0,3]$ 上 $g'(x)=-3x^2+(6-m)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $x\in(0,3]$ 上单调递减，所以

$$\begin{cases} m\geqslant 6 \\ g(0)\leqslant 16 \\ g(3)\geqslant -16 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} m\geqslant 6 \\ 0\leqslant 16 \\ m\leqslant \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

没有适合条件的 $m$；

② 当 $m\leqslant -21$ 时，在 $x\in(0,3]$ 上 $g'(x)=-3x^2+(6-m)\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $x\in(0,3]$ 上单调递增，所以

$$\begin{cases} m\leqslant -21 \\ g(0)\geqslant -16 \\ g(3)\leqslant 16 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} m\leqslant -21 \\ 0\geqslant -16 \\ m\geqslant -\dfrac{25}{3} \end{cases}$$

没有适合条件的 $m$；

③ 当 $-21\leqslant m\leqslant 6$ 时，$g'(x)=-3x^2+(6-m)=0$，$x=\sqrt{\dfrac{6-m}{3}}$（$x=-\sqrt{\dfrac{6-m}{3}}$ 舍去），则 $g(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{6-m}{3}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\sqrt{\dfrac{6-m}{3}},3\right)$ 上单调递减，所以

$$\begin{cases} -21\leqslant m\leqslant 6 \\ g\left(\sqrt{\dfrac{6-m}{3}}\right)\leqslant 12 \\ g(3)\geqslant -12 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -21\leqslant m\leqslant 6 \\ m\geqslant -6 \\ m\leqslant \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

所以 $-6\leqslant m\leqslant \dfrac{7}{3}$；

综上可得所求实数 $m$ 的取值范围是 $-6 \leqslant m \leqslant \frac{7}{3}$.

25.(1)$y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程.为

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

即
$$y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

(2) 如果有一条切线过点$(a, b)$,则存在 $t$ 使得

$$b = (3t^2 - 1)a - 2t^3$$

于是,若过点$(a, b)$可作 $y = f(x)$ 的三条切线,则方程

$$g(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$$

有三个相异的实根.由本文的定理,得

$$g'(t) = 6t^2 - 6at = 0$$

的判别式 $\Delta = 36a^2 > 0$;$f(x)$ 的两个极值异号,即

$$g(0) \cdot g(a) = (b + a)(b - f(a)) < 0$$

也即
$$-a < b < f(a)(因为\ a > 0)$$

进而知过点$(a, b)$可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线 $\Leftrightarrow -a < b < f(a)$.

# 浅探过一点作 $n$ 次曲线切线的条数问题

2007 年全国卷(Ⅱ)的压轴题是:

已知函数 $f(x)=x^3-x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a>0$,如果过点 $(a,b)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线,证明: $-a<b<f(a)$.

(注文献[1]末得到:在本题中有,过点 $(a,b)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线 $\Leftrightarrow -a<b<f(a)$.)

由此题引发了众多文献研究"过一点可作三次曲线的几条切线"的问题(比如文献[2],[3]),本文将"浅探过一点可作 $n$ 次曲线的几条切线"的问题.

**定理 1** 当且仅当已知点 $M$ 在已知直线 $l$ 上时,直线 $l$ 过点 $M$ 的切线存在(且切线存在时,切线就是直线 $l$).

**证明** 不妨设点 $M(x_0,y_0)$, $l:y=kx+b$,得 $y'=k$.

若直线 $l$ 过点 $M$ 的切线 $l_0$ 存在,设切点为 $(t,kt+b)$,得

$$l_0:y-(kt+b)=k(x-t)$$

即

$$y=kx+b$$

说明切线 $l_0$ 与直线重合,从而可得定理 1 成立.

**定理 2** 过已知点 $M(x_0,y_0)$ 可作已知的 $n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$ 次曲线

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\in\mathbf{R}^*,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{R}) \quad ①$$

切线的条数即关于 $t$ 的一元 $n$ 次方程(因为以下多项式 $g(t)$ 的首项系数 $a_n(1-n)\neq 0$)

$$g(t)=f(t)+(x_0-t)f'(t)-y_0=0 \quad ②$$

的相异实数解的个数.

**证明** 设切点为 $(t,f(t))$,得切线方程为

$$l_0:y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

由 $M\in l_0$,得

$$y_0-f(t)=f'(t)(x_0-t)$$

此即方程②,从而可得定理 2 成立.

**推论 1** (1) 过已知点作已知的 $n$($n$ 是正偶数) 次曲线切线的条数可以是

$0,1,2,\cdots,n$;

(2) 过已知点作已知的 $n(n$ 是奇数,$n \geqslant 3)$ 次曲线切线的条数可以是 $1,2,\cdots,n$;

(3) 过已知点作已知的 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次曲线切线的条数最少是0,最多是 $n$.

**证明**　(1) 当 $n$ 是正偶数时,由"实系数一元 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次方程的虚根成对出现"(见文献[4] 第 118 页定理 2) 知,方程 ② 可以没有实根,此时所作切线的条数为 0. 事实上,当已知点在已知二次曲线内部(即含抛物线焦点的区域)时,所作的切线就是 0 条.

当 $n$ 是正偶数时,$n$ 次方程 ② 可以有 $n$ 个相异实根,也可以让 $n$ 个实根中恰有 2个,3个,$\cdots$,$n-1$个相等,$n$ 个全相等,从而得方程 ② 相异实数解的个数是 $n,n-1,\cdots,1$.

所以结论(1) 成立.

(2) 当 $n(n \geqslant 3)$ 是奇数时,由"实系数一元 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次方程的虚根成对出现"知,此时方程 ② 至少有一个实根,得此时的切线为一条. 而后同上可证得结论(2) 成立.

(3) 由(1),(2) 知成立.

**引理 1**[1]　设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a \in \mathbf{R}^*, b, c, d \in \mathbf{R})$,方程 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$,则

(1) 方程 $f(x) = 0$ 有三个不同实根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 且 $f(x)$ 的两个极值异号;

(2) 方程 $f(x) = 0$ 有一个二重根和一个一重根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 且 $f(x)$ 有一个极值为 0;

(3) 方程 $f(x) = 0$ 有三重实根 $\Leftrightarrow \Delta = 0$ 且 $b^3 = 27a^2d$;

(4) 方程 $f(x) = 0$ 有一个实根和两个共轭虚根 $\Leftrightarrow$ 除(1),(2),(3) 之外的所有情形.

**引理 2**　设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a \in \mathbf{R}^*, b, c, d \in \mathbf{R})$,方程 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$(当 $\Delta > 0$ 时,设 $f'(x) = 0$ 的两根为 $x_1, x_2$),则方程 $f(x) = 0$ 的相异实根个数的情形是:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 有三个不同实根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$;

(2) 方程 $f(x) = 0$ 有且仅有两个相异实根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$;

(3) 方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根 $\Leftrightarrow$ 除(1),(2) 之外的所有情形 $\Leftrightarrow (\Delta > 0$ 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0)$ 或 $\Delta \leqslant 0$.

由引理 2 及定理 2,得

**推论 2**　过已知点 $M(x_0, y_0)$ 作已知的曲线 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a \in \mathbf{R}^*, b, c, d \in \mathbf{R})$ 的切线条数为 1,2 或 3. 具体的情形是(以下 $G =$

$[f(x_0)-y_0]\cdot[f'(-\frac{b}{3a})(x_0+\frac{b}{3a})+f(-\frac{b}{3a})-y_0])$:

(1) 所作切线的条数为 $3\Leftrightarrow G<0$;

(2) 所作切线的条数为

$$2\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq-\dfrac{b}{3a}\\G=0\end{cases}$$

(3) 所作切线的条数为

$$1\Leftrightarrow\left(x_0=-\frac{b}{3a}\text{ 或}\begin{cases}x_0\neq-\dfrac{b}{3a}\\G>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x_0=-\dfrac{b}{3a}\\y_0=f(-\dfrac{b}{3a})\end{cases}\text{或 } G>0\right)$$

**证明**　此时的方程②,即

$$g(t)=f(t)+(x_0-t)f'(t)-y_0=$$
$$-2at^3+(3ax_0-b)t^2+2bx_0t+d+cx_0-y_0=0$$
$$g'(t)=-6at^2+2(3ax_0-b)t+2bx_0=-6a(t-x_0)\left(t+\frac{b}{3a}\right)$$

可以验证引理 2 中的 $f(x_1)\cdot f(x_2)$ 即这里的 $g(x_0)\cdot g(-\frac{b}{3a})(g(x_0)\cdot g(-\frac{b}{3a})=G$ 用 $g(t)=f(t)+(x_0-t)f'(t)-y_0)$,由定理 2 及引理 2 可证推论 2 成立,再细加说明如下:

(1) 所作切线的条数为 $3\Leftrightarrow x_0\neq-\frac{b}{3a}$ 且 $G<0\Leftrightarrow G<0$(因为:当 $G<0$ 时用反证法可证 $x_0\neq-\frac{b}{3a}$).

(3) 第二个"$\Leftrightarrow$"是因为可证:当 $x_0=-\frac{b}{3a}$,$y_0\neq f(-\frac{b}{3a})$ 时 $G>0$.

三次曲线 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0(a\in\mathbf{R}^*,b,c,d\in\mathbf{R})$ 在对称中心(即拐点)处的切线方程为

$$l:y-f(-\frac{b}{3a})=f'(-\frac{b}{3a})(x+\frac{b}{3a})$$

即
$$l:f'(-\frac{b}{3a})(x+\frac{b}{3a})+f(-\frac{b}{3a})-y=0$$

从而可得推论 2(1),(2),(3) 的右边的条件所表示的区域(与文献[3] 的"表 2"第三栏一致).

实际上,"表 2"第二栏的后两行

"$g(x_0)<y_0<kx_0+m$"　或　"$kx_0+m<y_0<g(x_0)$"

可综合成

$$[g(x_0)-y_0]\cdot[kx_0+m-y_0]<0$$

按此思路,可把文献[3]"表 2"第二栏的结论简化为推论 2.

再把文献[3]的"表 2"简化为下表(下表中 $G=[f(x_0)-y_0]\cdot[f'(-\frac{b}{3a})(x_0+\frac{b}{3a})+f(-\frac{b}{3a})-y_0]$,$l$ 为曲线 $\Gamma:f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0(a\in\mathbf{R}^*,b,c,d\in\mathbf{R})$ 在对称中心(即拐点)$\left(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a})\right)$ 处的切线):

| 过已知点 $M(x_0,y_0)$ 作已知曲线 $\Gamma$ 的切线条数 | 点 $M(x_0,y_0)$ 满足的条件 | 点 $M$ 的位置 |
|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases}x_0=-\frac{b}{3a}\\y_0=f(-\frac{b}{3a})\end{cases}$ 或 $G>0$ | 曲线 $\Gamma$ 的上(下)方及切线 $l$ 的上(下)方的公共区域或 $\Gamma$ 的对称中心(即拐点) |
| 2 | $\begin{cases}x_0\neq-\frac{b}{3a}\\G=0\end{cases}$ | 曲线 $\Gamma$ 上或切线 $l$ 上的点(但去掉的对称中心(即拐点)) |
| 3 | $G<0$ | 曲线 $\Gamma$ 的上(下)方及切线 $l$ 的下(上)方的公共区域 |

## 参考文献

[1] 甘志国.三次方程根的情况的简明结论[J].中学数学,2007(10):20-21.
[2] 贺兵,黄福.过那些点可以作三次函数图像的三条切线[J].数学通讯,2007(21):17-18.
[3] 张必平.2007 年高考全国卷 Ⅱ 第 22 题的推广探究[J].数学教学,2007(11):36-37.
[4] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983.

# 实系数一元三次方程的求根公式

## 1 实系数一元三次方程的求根公式

### 1.1 历史上解一元三次方程的方法

方程，是代数学最重要的研究对象之一．直到大约一百年以前，代数学的全部含义还被理解为方程理论．时至今日，代数学的内容已远远不止方程的理论，其研究对象产生了根本的变化，研究方法更加抽象，应用范围也不断拓宽．然而，它们都是以解方程为契机发展起来的．比如，抽象代数的基本概念——群，就是研究高次代数方程是否可以用根式来解的直接产物．

早在古埃及时（公元前两千年左右），人类就能求解一元一次方程；古巴比伦时期（公元前一千九百年左右），就能求解一元二次方程；然而直到16世纪，才由泰塔格利亚(Tartaglia)发现了一元三次方程的解法，而卡丹(Cardan, 1501—1576)将此法写入了他1545年出版的著作《大法》中，后人就误认为发现一元三次方程的解法是卡丹的功劳，也把一元三次方程的求根公式叫做卡丹公式[1]（这是应当及早修正的），下面简单介绍这一解法[2]：

可不妨设实系数一元三次方程的一般形式为

$$y^3+by^2+cy+d=0(b,c,d\in\mathbf{R}) \qquad ①$$

令 $y=x+h$，得

$$x^3+(3h+b)x^2+(3h^2+2bh+c)x+(h^3+bh^2+ch+d)=0$$

选 $h=-\dfrac{b}{3}$，得方程①变为以下形式：

$$x^3+px+q=0(p,q\in\mathbf{R}) \qquad ②$$

其中

$$p=c-\frac{1}{3}b^2,\ q=\frac{2}{27}b^3-\frac{1}{3}bc+d,\ y=x-\frac{b}{3} \qquad ③$$

所以要求解一般的三次方程，只需求解方程②．

在②中令 $x=y+z$，可得

$$x^3-3yz\cdot x-(y^3+z^3)=0 \qquad ④$$

③，④表示同一方程的充要条件是

$$\begin{cases} y^3+z^3=-q \\ y^3\cdot z^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \qquad ⑤$$

由⑤知，$y^3,z^3$ 是关于 $t$ 的一元二次方程

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

的两个根，所以

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

由于 $yz=-\frac{p}{3}$，所以应选取 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 的一个立方根 $y_1$(另两个立方根就必为 $\omega y_1$ 与 $\omega^2 y_1$，其中 $\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$)，再适当地选取 $-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 的一个立方根 $z_1$，使 $y_1z_1=-\frac{p}{3}$. 于是，方程②的全部根为

$$x_1=y_1+z_1,\quad x_2=\omega y_1+\omega^2 z_1,\quad x_3=\omega^2 y_1+\omega z_1 \tag{⑥}$$

**注** 有人由⑥把方程②的全部根表示为下面的卡丹公式(但以下公式只有在$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqslant 0$时，各式的意义才是明确的；否则，虚数的立方根不唯一，因而各式的意义不明确)：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\x_2&=\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\x_3&=\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\end{aligned}\right\} \tag{⑦}$$

还可得方程②的根的虚实情形是：

**定理1** (1) 当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$时，方程②的三个根是一个实数和两个共轭虚数；

(2) 当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$时，方程②的三个根全是实数且至少有两个相等；

(3) 当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$时，方程②的三个根是两两互异的实数(此种情形叫做实系数一元三次方程②的不可约情形(即 $4p^3+27q^2<0$(此时必有 $p<0$)时)).

卡丹公式的缺陷是在不可约情形时不好用，本文将解决这一情形.

### 1.2 实系数一元三次方程不可约情形的根的简明结论

下面在 $4p^3+27q^2<0$(此时必有 $p<0$) 时,求出方程 ② 的三个实根.

此时方程 ②,即

$$x^3+px+q=0(p,4p^3+27q^2\in\mathbf{R}^-,q\in\mathbf{R},) \qquad ⑧$$

(1) 由 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$,得

$$(2t\sin\alpha)^3-3t^2(2t\sin\alpha)+2t^3\sin3\alpha=0$$

所以在方程 ⑧ 中可选

$$p=-3t^2,q=2t^3\sin 3\alpha,x=2t\sin\alpha$$

进而知,在 ⑧ 中可选

$$t=\sqrt{-\frac{p}{3}},\sin3\alpha=-\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\text{(可证 }-1<-\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}<1)$$

$$x=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)$$

这就说明 $x=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)$ 是方程 ⑦ 的根.

(2) 由 $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$,得

$$(2t\cos\alpha)^3-3t^2(2t\cos\alpha)-2t^3\cos3\alpha=0$$

所以在方程中可选

$$p=-3t^2,q=-2t^3\cos3\alpha,x=2t\cos\alpha$$

① 在方程 ⑧ 中可选

$$t=\sqrt{-\frac{p}{3}},\cos3\alpha=\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}},x=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)$$

这就说明 $x=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)$ 是方程 ⑧ 的根.

② 在方程 ⑧ 中可选

$$t=-\sqrt{-\frac{p}{3}},\cos3\alpha=-\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}},$$

$$x=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{-3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)$$

这就说明 $x=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{-3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)$ 是方程 ⑧ 的根.所以:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right),\\x_2&=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{-3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)\\x_3&=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)\end{aligned}\right\}\qquad ⑨$$

均是方程 ⑧ 的根(这也可以直接验证).

下面证明 ⑨ 就是方程 ⑧ 的所有根,只需证明在 ⑨ 中 $x_1=x_2,x_2=x_3,x_3=x_1$ 均不会成为关于 $p,q$ 的恒等式.

由 ⑨ 可得方程 $x^3-3x+1=0$ 的三个根为

$$x_1=2\cos 40°,x_2=-2\cos 20°,x_3=2\sin 10°$$

从而可以说明"在 ⑨ 中 $x_1=x_2,x_2=x_3,x_3=x_1$ 均不会成为关于 $p,q$ 的恒等式",所以有

**定理 2** ⑨ 是方程 ⑧(实系数一元三次方程不可约情形)的所有根.

**1.3 实系数一元三次方程的简明求根公式**

由 ⑦ 及定理 1,2,得

**定理 3** (1) 当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ 时,方程 ② 的三个根是一个实数和两个共轭虚数(即 ⑦ 中的 $x_1,x_2,x_3$);

(2) 当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ 时,方程 ② 的三个根全是实数且至少有两个相等(即 ⑦ 中的 $x_1,x_2,x_3$ 也即 $x_1=-\sqrt[3]{4q},x_2=x_3=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$);

(3) 当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 时,方程 ② 的三个根是两两互异的实数(即 ⑨ 中的 $x_1,x_2,x_3$).

再由 ③ 可得方程 ① 的根的结论为

**定理 4** 设 $\Delta=\left(\frac{b^3}{27}-\frac{bc}{6}+\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{3}-\frac{b^2}{9}\right)^3=\frac{1}{108}(4b^3d-b^2c^2-18bcd+4c^3+27d^2)$,得

(1) 当 $\Delta>0$ 时,方程 ① 的三个根是一个实数和两个共轭虚数:

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{b}{3}$$

$$y_2=\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{b}{3}$$

$$y_3 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}+\sqrt{\Delta}} + \omega \cdot \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}-\sqrt{\Delta}} - \frac{b}{3}$$

其中
$$\omega = \cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

(2) 当 $\Delta = 0$ 时,方程 ① 的三个根是全是实数且至少有两个相等:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}} - \frac{b}{3}, y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+\frac{bc}{6}-\frac{d}{2}} - \frac{b}{3}$$

(3)$\Delta < 0$ 时,方程 ① 的三个根是两两互异的实数:

$$y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{b^2-3c}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\delta\right) - \frac{b}{3}$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{b^2-3c}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(-\delta)\right] - \frac{b}{3}$$

$$y_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{b^2-3c}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\delta\right) - \frac{b}{3}$$

其中
$$\delta = \frac{2b^3-9bc+27d}{54c-18b^2}\sqrt{b^2-3c}$$

## 2 实系数一元四次方程的解法

可不妨设实系数一元四次方程的一般形式为

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0(p,q,r,s\in\mathbf{R}) \qquad ⑩$$

该方程等价于

$$x^4+px^3+(a+q)x^2+(b+r)x+(c+s)=ax^2+bx+c \quad (b^2=4ac) \qquad ⑪$$

并让式 ⑪ 的左边恒等于$\left(x^2+\frac{p}{2}x+m\right)^2$,由此,得

$$\begin{cases} a = 2m+\frac{p^2}{4}-q \\ b = pm-r \\ c = m^2-s \end{cases} \qquad ⑫$$

再由 $b^2=4ac$,得

$$m^3-\frac{q}{2}m^2+\left(\frac{pr}{4}-s\right)m-\frac{1}{8}[(p^2-4q)s+r^2]=0 \qquad ⑬$$

求解三次方程 ⑬ 后,从而可以求解方程 ⑪ 即 ⑩,这里就不详述了(见文献[2]第 51 ~ 52 页的一元四次方程的第三种解法).

## 3 结论的应用

**例** 设 $\alpha,\beta,\gamma$ 为给定的正数,求函数

$$f(x,y,z)=\frac{\alpha yz+\beta zx+\gamma xy}{x^2+y^2+z^2}\quad(x,y,z\in\mathbf{R}^+)$$

的最大值.

**解** 引入正参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得

$$\alpha yz\leqslant\frac{\alpha}{2}(\lambda_1y^2+\frac{1}{\lambda_1}z^2)$$

$$\beta zx\leqslant\frac{\beta}{2}(\lambda_2z^2+\frac{1}{\lambda_2}x^2)$$

$$\gamma xy\leqslant\frac{\gamma}{2}(\lambda_3x^2+\frac{1}{\lambda_3}y^2)$$

再把它们相加,得

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy\leqslant\frac{1}{2}(\lambda_3\gamma+\frac{\beta}{\lambda_2})x^2+\frac{1}{2}(\lambda_1\alpha+\frac{\gamma}{\lambda_3})y^2+\frac{1}{2}(\lambda_2\beta+\frac{\alpha}{\lambda_1})z^2$$

令
$$\lambda_3\gamma+\frac{\beta}{\lambda_2}=\lambda_1\alpha+\frac{\gamma}{\lambda_3}=\lambda_2\beta+\frac{\alpha}{\lambda_1}=m \tag{14}$$

则
$$f(x,y,z)\leqslant\frac{m}{2}$$

且该式当且仅当

$$\lambda_1=\frac{z}{y},\lambda_2=\frac{x}{z},\lambda_3=\frac{y}{x} \tag{15}$$

时取等号.

把 ⑮ 代入 ⑭ 可得关于 $x,y,z$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}-mx+\gamma y+\beta z=0\\ \gamma x-my+\alpha z=0\\ \beta x+\alpha y-mz=0\end{cases} \tag{16}$$

该方程组有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}-m & \gamma & \beta\\ \gamma & -m & \alpha\\ \beta & \alpha & -m\end{vmatrix}=0$$

即
$$m^3-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)m-2\alpha\beta\gamma=0 \tag{17}$$

用导数可以研究一元三次方程根的情形(文献[3] 给出了这方面的完整结论),从而可知方程 ⑰ 有唯一的正根,下面用上面的定理来求方程 ⑰ 的正根:

(1) 当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时,易求得方程 ⑪ 的正根为 $m=2\alpha$.

(2) 当 $\alpha,\beta,\gamma$ 不全相等时,由均值不等式可证得方程 ⑰ 的系数

$$p=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),q=-2\alpha\beta\gamma(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^+)$$

满足 $4p^3+27q^2<0$,由定理 2 可求得方程 ⑰ 的正根为

$$m=\frac{2}{3}\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos 3\sqrt{3}\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

因为情形(1)也适合情形(2),所以方程 ⑰ 的唯一正根为

$$m=\frac{2}{3}\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos 3\sqrt{3}\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

得所求函数的最大值为

$$\frac{1}{3}\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos 3\sqrt{3}\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

当且仅当 $x,y,z$ 满足条件 ⑯ 时所求函数取到最大值.

用这种方法还可研究 $n$ 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\lambda_1x_1x_2+\lambda_2x_2x_3+\cdots+\lambda_{n-1}x_{n-1}x_n+\lambda_nx_nx_1}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

($\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为已知的正数,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$)的最大值.

## 参考文献

[1] 郭熙汉.解方程的发展史略[J].华中师范大学学报(自然科学版,数学史专辑),1987(3):20-28.

[2] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983.

[3] 甘志国.三次方程根的情况的简明结论[J].中学数学,2007(10):20-21.

# 数学问题 1703 的一般情形

《数学通报》2007 年第 12 期第 61 页刊登了数学问题 1703 及其解法(厉倩提供),这道题是:

1703 解方程 $25^y + 60^y = 39^y + 52^y$.(答案:$y = 0,2$)

当 $y = 2$ 时,原方程即

$$5^2(5^2 + 12^2) = 13^2(3^2 + 4^2)$$

它可由勾股数组(3,4,5),(5,12,13)得到.

由此,可把该问题推广为

**定理** 若 $ac + ad, ad + bd, bc - ad \in \mathbf{R}^+$, $a, b, c, d, ac - bd$ 均是非零实数,则关于 $x$ 的方程

$$(a + b)^x(c^x + d^x) = (a^x + b^x)(c + d)^x \qquad ①$$

的解集为 $\{0,1\}$.

**证明** 显然 0,1 是方程 ① 的解,所以只需证明:

当 $x \neq 0,1$ 时,等式 ① 不成立.

设 $f(u) = (u + p)^x - u^x (u > 0, p > 0; p, x$ 为常数).原解法中已用导数证得当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时,$f(u)$ 是增函数;当 $0 < x < 1$ 时,$f(u)$ 是减函数.

又设 $u_1 = ac + ad, u_2 = ad + bd, p = bc - ad (p > 0)$,得等式 ① 即

$$(ac + bc)^x - (ac + ad)^x = (bc + bd)^x - (ad + bd)^x$$

$$f(u_1) = f(u_2)$$

而当 $x \neq 0,1$ 时,$f(u)$ 是单调函数,所以 $u_1 = u_2, ac = bd$,这与题设"$ac - bd$ 是非 0 实数"矛盾!所以要证结论成立!

在定理中令 $a = 4^2, b = 3^2, c = 12^2, d = 5^2$,可得问题 1703 的结论.

**推论** 若 $ac + ad, ad + bd, bc - ad \in \mathbf{R}^+$, $(a + b)^x(c^x + d^x) = (a^x + b^x)(c + d)^x (x \neq 0,1)$,则 $ac = bd$.

# 也谈一类绝对值函数的最值问题
## ——兼谈一个猜想的判明

先看看文献[1]的两个例题:

**例1** 求函数 $y=|x-1|+2|x-2|+\cdots+100|x-100|(x\in\mathbf{R})$ 的最小值.

**解** 先将原函数写成 $1+2+\cdots+100=5\ 050$ 个绝对值之和的形式,再首尾配对,层层分组,得

$$f(x)=(|x-1|+|x-100|)+(|x-2|+|x-100|)+\cdots+(|x-71|+|x-71|)$$

当且仅当 $x\in[1,100]$ 时,以上等式右边第一个括号取到最小值;当且仅当 $x\in[2,100]$ 时,以上等式右边第二个括号取到最小值;…;当且仅当 $x=71$ 时,以上等式右边最后一个括号取到最小值.所以,当且仅当 $x=71$ 时,$f(x)$ 取到最小值.可算得最小值是 99 080.

**例2** 求函数 $y=|x-1|+\sqrt{2}|x-\sqrt{2}|+\sqrt{3}|x-\sqrt{3}|+\sqrt{4}|x-\sqrt{4}|+\sqrt{5}|x-\sqrt{5}|(x\in\mathbf{R})$ 的最小值.

**解** 先将原函数写成

$$\begin{aligned}y=&(|x-1|+|x-\sqrt{5}|)+(\sqrt{5}-1)(|x-\sqrt{5}|+|x-\sqrt{2}|)+\\&(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})(|x-\sqrt{2}|+|x-2|)+\\&\sqrt{3}(|x-\sqrt{3}|+|x-2|)+(1+\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})|x-2|\end{aligned}$$

同例1的讨论得,当且仅当 $x=2$ 时,$f(x)$ 取到最小值,且最小值是 $1+2(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

文献[1]末用这种“首尾配对,层层分组”的巧妙方法给出了一类函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x-b_i|(a_i\in\mathbf{R}^+,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n),\ b_1<b_2<\cdots<b_n;x\in\mathbf{R})\qquad ①$$

的最小值的简便求法(设 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(k=1,2,\cdots,n)$):

(1)若 $S_n\in(2S_k,2S_{k+1})$,则当且仅当 $x=b_{k+1}$ 时,$f(x)$ 取到最小值;

(2)若 $S_n=2S_k$,则当且仅当 $x\in[b_k,b_{k+1}]$ 时,$f(x)$ 取到最小值.

文献[1]还提出

**问题 1** 能否找到函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x-b_i|(a_i\in\mathbf{R}^*(\mathbf{R}^*=R_+\cup R_-),$$
$$b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n),b_1<b_2<\cdots<b_n;x\in\mathbf{R}) \qquad ②$$

是否有最小值的判断方法?若有最小值,如何求其最小值?

关于此问题,笔者得到了更广泛的结论:

**定理 1** 对于函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x-b_i|+ax(a_i\in\mathbf{R}^*,$$
$$a,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n),b_1<b_2<\cdots<b_n;x\in\mathbf{R}) \qquad ③$$

的值域 $A$ 为(以下 $m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}f(b_i),M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}f(b_i)$):

(1) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a=0$ 时,$A=[m,M]$.

(2) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\in(-a,a)(a>0)$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\in(a,-a)(a<0)$ 时,$A=\mathbf{R}$.

(3) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a>0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=-a>0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\pm a>0$ 时,$A=[m,+\infty)$.

(4) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a<0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=-a<0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\pm a<0$ 时,$A=(-\infty,M]$.

**证明** 因为函数 ③ 在分段点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 处均连续,所以可把函数 ③ 改写成如下分段函数:

$$f(x)=\begin{cases}(a-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i & x\in(-\infty,b_1]\\ a'_1x+b'_1 & x\in[b_1,b_2]\\ a'_2x+b'_2 & x\in[b_2,b_3]\\ \vdots & \vdots\\ a'_{n-1}x+b'_{n-1} & x\in[b_{n-1},b_n]\\ (a+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)x-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i & x\in(b_n,+\infty)\end{cases} \qquad ④$$

其中常数 $a'_j,b'_j\in\mathbf{R}(j=1,2,\cdots,n-1)$.

(1) 得 $x\in(-\infty,b_1]$ 时,$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$;$x\in[b_n,+\infty)$ 时,$f(x)=$

$-\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

因为分段函数的最小值、最大值(存在时)分别就是各段函数最小值、最大值(存在时)中的最小值、最大者,又④中各段函数都是闭区间上的一次函数或常数函数,其最小值、最大值一定是某个端点的函数值,所以函数③的最小值、最大值分别为 $m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f(b_i)$、$M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f(b_i)$.

再由函数③在 $\mathbf{R}$ 上连续,立得函数③的值域是$[m, M]$.

(2) 当 $a > 0$ 时,得 $a \pm \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$,所以 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

当 $a < 0$ 时,得 $a \pm \sum_{i=1}^{n} a_i < 0$,所以 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

再由函数③在 $\mathbf{R}$ 上连续,立得函数③的值域是 $\mathbf{R}$.

(3) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a > 0$ 时,由④得 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,进而可得此时要证结论成立.

其余的情形,也可证得要证结论成立.

(4) 同(3)可证.

在定理中,令 $a = 0$,可得

**推论** 对于函数②,有(以下 $m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f(b_i)$, $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f(b_i)$):

(1) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$ 时,函数②的值域是$[m, +\infty)$,且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

(2) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$ 时,函数②的值域是$(-\infty, M]$,且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

(3) 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ 时,函数②的值域是$[m, M]$.

本文的推论用比较简洁的方法给出了问题1[1]的完整答案,但当 $\prod_{i=1}^{n} a_i < 0$ 时是否有类似于本文开头的简洁结论,请读者研究;能否由本文的推论证得本文开头的结论,也请读者研究.文献[2]还解决了文献[1]末提出的另一个问题.

由推论知,文献[2]末的猜想1),2)均成立;猜想3)不成立,但把猜想3)中的"值域是$[-m, m]$"改成"值域是$[m, M]$"后就成立了(还可参见以下例题).

**例3** 求函数 $f(x) = |x| - |x-1| - |x-2| + |x-3|$ $(x \in \mathbf{R})$ 的值域.

**解** $f(0) = 1, f(1) = f(2) = 2, f(3) = 0$.

由推论3),得 $[f(x)]_{\min} = \min\{f(0), f(1), f(2), f(3)\} = 0$; $[f(x)]_{\max} =$

$\max\{f(0),f(1),f(2),f(3)\}=2.$

再由函数 $f(x)$ 的连续性可画出 $f(x)$ 的图象,从而得

当且仅当 $x\geqslant 3$ 时,$f(x)$ 取到最小值;当且仅当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)$ 取到最大值.

本文再提出

**问题 2** 设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x-b_i|^{\alpha}(a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n);$$
$$\alpha\neq 0,1;b_1<b_2<\cdots<b_n;x\in\mathbf{R}) \quad ②$$

求函数 $f(x)$ 的值域.

笔者只解决了其中的部分情形,得到

**定理 2** 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-b_i|^{\alpha}(\alpha>1;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是公差为 $d(d\geqslant 0)$ 的实数项等差数列),则函数 $f(x)$ 的值域是 $[A,+\infty)$,且有:

(1) 若 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$,则当且仅当 $x=b_k=b_1+(k-1)d$ 时,$f(x)$ 取到最小值 $A$,且 $A=2d^{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k-1}i^{\alpha}$(当 $k=1$ 时,$A=0$);

(2) 若 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$,则当且仅当 $x=\dfrac{b_1+b_{2k}}{2}=b_1+\left(k-\dfrac{1}{2}\right)d$ 时,$f(x)$ 取到最小值 $A$,且 $A=2^{1-\alpha}d^{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}(2i-1)^{\alpha}$.

**证明** 若 $d=0$,要证结论显然成立.下证 $d>0$ 时也成立,得 $b_1<b_2<\cdots<b_n$.

只证结论(1),(2).可先用导数证得:

设 $g(x)=x^{\alpha}(\alpha>1;x>0)$,则 $g(x)$ 是增函数;且 $g''(x)>0$,所以 $g(x)$ 是下凸函数,得

$$\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}(a,b\in\mathbf{R}^+,\alpha>1)(\text{当且仅当 } a=b \text{ 时取等号})$$

(1) $|x-b_1|^{\alpha}+|x-b_{2k-1}|^{\alpha}\geqslant 2\left(\dfrac{|x-b_1|+|x-b_{2k-1}|}{2}\right)^{\alpha}$(当且仅当 $|x-b_1|=|x-b_{2k-1}|$,即 $x=\dfrac{b_1+b_{2k-1}}{2}=b_k=b_1+(k-1)d$ 时取等号)$\geqslant 2\left(\dfrac{b_{2k-1}-b_1}{2}\right)^{\alpha}$(因为 $|x-b_1|+|x-b_{2k-1}|\geqslant|(x-b_1)-(x-b_{2k-1})|$,当且仅当 $x\in[b_1,b_{2k-1}]$ 时取等号)

又 $b_k\in[b_1,b_{2k-1}]$,所以

$$|x-b_1|^{\alpha}+|x-b_{2k-1}|^{\alpha}\geqslant 2\left(\frac{b_{2k-1}-b_1}{2}\right)^{\alpha}(=2d^{\alpha}(k-1)^{\alpha})$$

（当且仅当 $x=b_k=b_1+(k-1)d$ 时取等号）

同理，可得

$$|x-b_2|^{\alpha}+|x-b_{2k-2}|^{\alpha}\geqslant 2\left(\frac{b_{2k-2}-b_2}{2}\right)^{\alpha}(=2d^{\alpha}(k-2)^{\alpha})$$

（当且仅当 $x=b_k=b_1+(k-1)d$ 时取等号）

…

$$|x-b_{k-1}|^{\alpha}+|x-b_{k+1}|^{\alpha}\geqslant 2\left(\frac{b_{k+1}-b_{k-1}}{2}\right)^{\alpha}(=2d^{\alpha}\cdot 1^{\alpha})$$

（当且仅当 $x=b_k=b_1+(k-1)d$ 时取等号）

$|x-b_k|^{\alpha}\geqslant 0$（当且仅当 $x=b_k=b_1+(k-1)d$ 时取等号）

把这些不等式相加，便可得结论(1)成立.

(2) 同(1)可证.

请读者再研究问题1中剩下的一些问题，比如

**问题3** 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-b_i|^{\alpha}(0<\alpha<1;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是公差为 $d(d\geqslant 0)$ 的实数项等差数列)，求函数 $f(x)$ 的最小值.

**问题4** 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-b_i|^{\alpha}(\alpha<0;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是公差为 $d(d\geqslant 0)$ 的实数项等差数列)，求函数 $f(x)$ 的最小值.

笔者认为，关于问题1也有类似于以上推论（即文献[2]末猜想修正后的结论）的

**猜想** 对于函数②，有

(1) 当 $\alpha>0$ 时：

① 又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i>0$ 时，函数②的值域是 $[m,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$；

② 又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<0$ 时，函数②的值域是 $(-\infty,M]$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$；

③ 又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$ 时，函数②的值域是 $[m,M]$.

(2) 当 $\alpha<0$ 时：

① 又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i>0$ 时，函数②的值域是 $(0,M]$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$；

② 又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<0$ 时，函数②的值域是 $[m,0)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$；

③ 又$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$时,函数 ② 的值域是$[m, M]$.

(3) 在结论(1),(2) 中的最小值 $m$,最大值 $M$ 均可在$x = b_1$,或 $b_2,\cdots$,或 $b_n$ 时取到.

## 参考文献

[1] 贺航飞.一类绝对值函数的最值问题[J].数学通报,2007(4):28-30.
[2] 甘志国.一个问题的解决[J].数学通讯,2007(21):31.

# 一道应用题的简解及推广

**例** 如图1,工厂 $A$ 距河岸 $MN$ 的距离 $AC = h, BC = a$,要在线段 $BC$ 上的点 $D$ 处建一码头,使 $A$ 处的货物经过陆路 $AD$ 和水路 $DB$ 运至 $B$ 处,已知陆路单位距离的运费是水路单位距离运费的 $p(p > 0)$ 倍.要使总运费最少,问码头 $D$ 应建在何处?

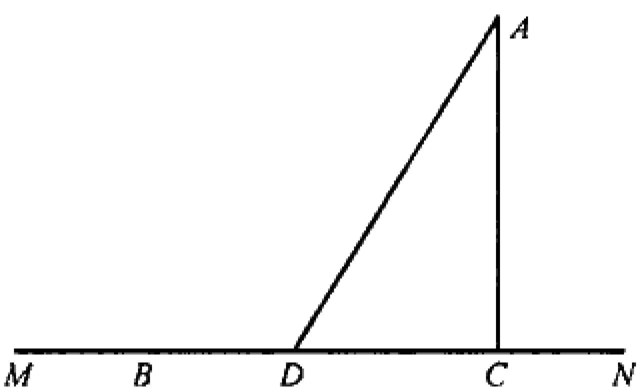



图1

**解** 设 $|DC| = x$,水路单位距离的运费是 $\alpha(\alpha > 0)$ 元,得总运费为

$$z = p|AD| + |DB| \quad ①$$

$$z = p\alpha\sqrt{x^2 + h^2} + \alpha(h - x)(0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$\frac{z}{\alpha} - h = p\sqrt{x^2 + h^2} - x(0 \leqslant x \leqslant a)$$

要求总运费 $z$ 最少,即求函数

$$f(x) = p\sqrt{x^2 + h^2} - x(0 \leqslant x \leqslant a)(a, p, h \in \mathbf{R}^+) \quad ②$$

的最小值.

解决这类问题,一般用判别式法、三角换元法、导数法,下面再给出一种简洁解法——作图法.

(1) 当 $0 < p \leqslant 1$ 时,得

$z = p|AD| + |DB| \geqslant p(|AD| + |DB|)$($p = 1$ 时,恒取"$=$";$0 < p < 1$ 时,当且仅当 $|DB| = 0$ 时取"$=$")$\geqslant p|AB|$(当且仅当 $|DB| = 0$ 时取"$=$")

所以,此时当且仅当 $|DB| = 0$ 即 $D, B$ 重合时总运费 $z$ 最少,也即当且仅当 $x = a$ 时,函数

$$f(x) = p\sqrt{x^2 + h^2} - x(0 \leqslant x \leqslant a)(a, h \in \mathbf{R}^+, 0 < p \leqslant 1) \quad ③$$

取到最小值.

事实上,可证函数

$$f(x) = p\sqrt{x^2+h^2} - x(x \geqslant 0)(h \in \mathbf{R}^+, 0 < p \leqslant 1) \quad ④$$

是减函数:因为

$$f(x) = p\sqrt{x^2+h^2} - x = p(\sqrt{x^2+h^2} - x) - (1-p)x = \frac{ph^2}{\sqrt{x^2+h^2}+x} - (1-p)x(x \geqslant 0) \quad (h \in \mathbf{R}^+, 0 < p \leqslant 1)$$

是减函数.由此也可得以上结论成立.进而,还可得

**定理 1** 函数 ④ 是减函数,其值域是$(-\infty, ph]$($0 < p < 1$ 时)或$(0, ph]$ ($p = 1$ 时).

**定理 2** 当且仅当 $x = 0$ 时,函数 $f(x) = p\sqrt{x^2+h^2} - x \quad (x \in \mathbf{R})(h \in \mathbf{R}^+, 0 < p \leqslant 1)$ 取到最小值.

**证明** 这是因为当 $x < 0$ 时,$f(x) > f(-x)$.在 ② 中当 $p > 1$ 时:

如图 2,在直线 $MN$ 的点 $A$ 的异侧作射线 $BEF$,使 $\angle NBE = \theta = \arcsin\frac{1}{p}$,作 $DE \perp BE$,$AF \perp BE$,垂足分别为 $E$,$F$.又设 $AF$ 与 $MN$ 交于点 $G$,有:

$z = p|AD| + |DB| = p(|AD| + |DB|\sin\angle NBE) = p(|AD| + |DE|) \geqslant p|AF|$(当且仅当 $D$,$G$ 重合时取“=”)

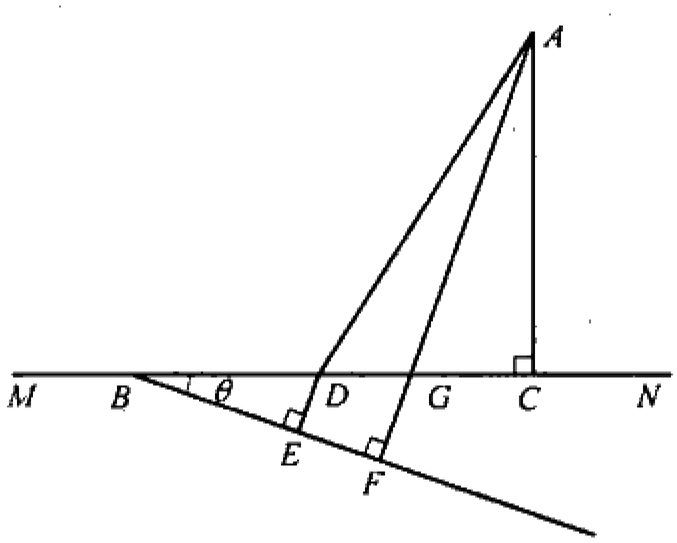



图 2

所以,此时当且仅当 $D$,$G$ 重合时总运费 $z$ 最少,也即当且仅当

$$\frac{x}{h} = \tan\angle CAF = \tan\angle NBE = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}$$

即

$$x = \frac{h}{\sqrt{p^2-1}}$$

时,函数

$$f(x) = p\sqrt{x^2 + h^2} - x(0 \leqslant x \leqslant a)(a, h \in \mathbf{R}^+, p > 1) \qquad ⑤$$

取到最小值.进而,还可得

**定理3** 当且仅当 $x = \dfrac{h}{\sqrt{p^2 - 1}}$ 时,函数 $f(x) = p\sqrt{x^2 + h^2} - x(x \in \mathbf{R})$ $(h \in \mathbf{R}^+, p > 1)$ 取到最小值.

(证明同定理2的证明)

# 一道周期函数例题的一般情形

**例** 若 $a$ 是非零常数,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$,求证:$f(x)$ 是周期函数.

**证明** 由 $f(x+a)\geqslant\frac{1}{2}$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立,得 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立.

进而可验证 $f(x+2a)=f(x)$,再由 $a$ 是非零常数知要证结论成立.

这道例题的结论可以推广吗?

事实上,设 $g(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-x^2}\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$,可以验证 $g^{-1}(x)=g(x)$.从而可得下面一般性的结论:

**定理** 若 $g^{-1}(x)$(表示函数 $g(x)$ 的反函数) $=g(x)$,且函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\lambda)=g(f(x))$($\lambda$ 是非零常数),则 $f(x+2\lambda)=f(x)$,即 $f(x)$ 是周期函数且有一个周期是 $2\lambda$.

**证明** $f(x+2\lambda)=g(f(x+\lambda))=g(g(f(x)))=g(g^{-1}(f(x)))=f(x)$

(以上内容曾发表于《中学数学杂志(高中)》2008 年第 3 期)

**推论** 若 $a$ 是非零常数,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 满足下列条件之一:

(1)$f(x+a)=-f(x)$;

(2)$f(x+a)=\dfrac{c}{f(x)}$ ($c$ 是非零常数);

(3)$f(x+a)+f(x-a)=f(x)$;

(4)$f(x+a)=\dfrac{a\cdot f(x)+b}{c\cdot f(x)-a}$ $(a^2+bc\neq 0)$;

(5)$f(x+a)=k+\sqrt{l+2kf(x)-(f(x))^2}$ $(k^2+l>0)$;

(6)$f(x+a)=k-\sqrt{l+2kf(x)-(f(x))^2}$ $(k^2+l>0)$,

则 $f(x)$ 均是周期函数,且 $2a,2a,6a,2a,2a,2a$ 分别是函数 $f(x)$ 的一个周期.

**证明** 在定理中选适当的 $g(x)$ 和非零常数 $\lambda$ 可证这些结论.

(1) 选 $g(x)=-x,\lambda=a$.

(2) 选 $g(x)=\frac{c}{x}$, $\lambda=a$.

(3) 可得 $f(x+2a)=f(x+a)-f(x)=-f(x-a)$,所以 $f(x+3a)=-f(x)$.

再由(1)得结论(3)成立.

(4) 设 $g(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$,由 $a^2+bc\neq0$ 知,$g(x)$ 存在反函数,且 $g^{-1}(x)=g(x)$.

在定理中再选 $\lambda=a$,可得要证结论成立.

(5) 因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=k+\sqrt{l+2kf(x)-(f(x))^2}(k^2+l>0)$,所以 $f(x+a)\geqslant k$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立,从而 $f(x)\geqslant k$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立.

选 $g(x)=k+\sqrt{l+2kx-x^2}(x\geqslant k)$,可以验证 $g^{-1}(x)=g(x)$.

在定理中再选 $\lambda=a$,可得要证结论成立.

(6) 因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=k-\sqrt{l+2kf(x)-(f(x))^2}(k^2+l>0)$,所以 $f(x+a)\leqslant k$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立,从而 $f(x)\leqslant k$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立.

选 $g(x)=k-\sqrt{l+2kx-x^2}(x\leqslant k)$,可以验证 $g^{-1}(x)=g(x)$.

在定理中再选 $\lambda=a$,可得要证结论成立.

在结论(5)中选 $k=\frac{1}{2}$, $l=0$ 立得本文开头例题的结论.

**注** 在例题中可选 $a=1$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|\right)$.

# 增函数与其反函数图象的交点在直线 $y=x$ 上

**定理** 增函数与其反函数图象的交点在直线 $y=x$ 上.

**证明** 即证方程组 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}$ 若有解 $(a,b)$，则 $a=b$. 得 $\begin{cases} b=f(a) \\ b=f^{-1}(a) \end{cases}$，所以 $\begin{cases} b=f(a) \\ a=f(b) \end{cases}$.

假设 $a>(<)b$，由 $y=f(x)$ 是增函数，得 $f(a)>(<)f(b)$，即 $b>(<)a$，这与 $a>(<)b$ 矛盾！所以 $a=b$.

利用该结论可方便地解决求增函数与其反函数图象的交点问题.即若 $y=f(x)$ 是增函数，则 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$ 同解.例如，如何求 $y=x^2-1(x>0)$ 与其反函数图象的交点坐标?(答案：$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$)

**注** 减函数与其反函数的图象的交点不一定在直线 $y=x$ 上.

**反例1** $y=\sqrt{7-3x}\left(x\leqslant\frac{7}{3}\right)$ 与其反函数 $y=\frac{7-x^2}{3}(x\geqslant 0)$ 图象的交点 $(1,2)$，$(2,1)$ 均不在直线 $y=x$ 上.

**反例2** $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ 与其反函数 $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ 图象的交点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 均不在直线 $y=x$ 上.

# 2008 年高考试题(上海理科卷)填空压轴题的另解

2008 年高考试题(上海理科卷)第 11 题是(第一大题填空题的压轴题):

方程 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象交点的横坐标.若方程 $x^4+ax-4=0$ 的各个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_k(k\leqslant 4)$ 所对应的点 $\left(x_i,\frac{4}{x_i}\right)(i=1,2,\cdots,k)$ 均在直线 $y=x$ 的同侧,则实数 $a$ 的取值范围是________.

原参考解答是:

原方程可化为 $x^3+a=\frac{4}{x}$,由条件可知

$$(1)\begin{cases}\frac{4}{x}>x\\x^3+a>x\end{cases}\quad 或(2)\begin{cases}\frac{4}{x}<x\\x^3+a<x\end{cases}$$

由(1)中的 $\frac{4}{x}>x$,得 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$,问题转化为存在 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ 使 $x^3+a>x$ 即 $a>x-x^3$ 成立,而 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ 时,$x-x^3>6$,得 $a>6$.

由(2),得 $a<-6$.

所以所求实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$.

下面给出的解法更容易理解:

**解** 原方程可化为 $x^3+a=\frac{4}{x}$,所以原方程的解即函数 $y=x^3+a$ 的图象(由函数 $y=x^3$ 的图象上下平移可得)与函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象交点的横坐标.

由画图可知,两者有且仅有两个交点 $A,B$(分别在一、三象限),又函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点是 $C(2,2),D(-2,-2)$.

(1)$A,B$ 都在直线 $y=x$ 的下方,即方程 $x^3+a=\frac{4}{x}$ 也即方程

$$f(x)=x^3+a-\frac{4}{x}=0$$

的两根分别在$(-2,0)$,$(2,+\infty)$上.又函数$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上均是增函数,$f(-2)=a-6$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$;$f(2)=a+6$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,所以其成立的充要条件是

$$\begin{cases}a-6<0\\a+6<0\end{cases}$$

即 $a<-6$.

(2)$A$,$B$ 都在直线$y=x$的上方,即方程 $x^3+a=\dfrac{4}{x}$ 也即方程

$$f(x)=x^3+a-\frac{4}{x}=0$$

的两根分别在$(-\infty,-2)$,$(0,2)$上.又函数$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上均是增函数,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,$f(-2)=a-6$;$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$f(2)=a+6$,所以其成立的充要条件是

$$\begin{cases}a-6>0\\a+6>0\end{cases}$$

即 $a>6$.

所以所求实数 $a$ 的取值范围是$(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$.

# 两道 2008 年高考题的简解

2008 年高考试题(山东理科卷)的第 21 题(即倒数第二题)是：

已知函数 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+a\ln(x-1)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$a$ 为常数.

(Ⅰ)当 $n=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

(Ⅱ)当 $a=1$ 时，证明：对任意的正整数 $n$，当 $x\geqslant 2$ 时，有 $f(x)\leqslant x-1$.

下面给出第(Ⅱ)问的简证. 即证

$$\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)\leqslant x-1(n\in\mathbf{N}^*,x\geqslant 2)$$

(1) 当 $n$ 为正偶数时，设 $x-1=t$，即证

$$\frac{1}{t^n}+\ln t\leqslant t(\frac{n}{2}\in\mathbf{N}^*,t\geqslant 1)$$

只需证 $$1+\ln t\leqslant t(t\geqslant 1) \quad ①$$

设 $g(t)=t-\ln t-1(t\geqslant 1)$，得 $g'(t)=1-\frac{1}{t}\geqslant 0(t\geqslant 1)$，所以函数 $g(t)$ 是增函数，得 $g(t)\geqslant g(1)=0$，即 ① 成立，说明此时要证结论成立！

(2) 当 $n$ 为正奇数时，因为 $\frac{1}{(1-x)^n}<0(x\geqslant 2)$，所以只需证明

$$\ln(x-1)\leqslant x-1(x\geqslant 2)$$

而这由 ① 立得，说明此时要证结论也成立！

(由以上证明还可得：在第(II)问的结论“$f(x)\leqslant x-1$”中，当且仅当 $n$ 为正偶数且 $x=2$ 时取等号.)

原题第(Ⅱ)问也即求证关于 $n,x$ 的二元函数

$$z=\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)-(x-1)(n\in\mathbf{N}^*,x\geqslant 2)$$

的最大值不大于 0.

这样的问题在 2008 年高考试题(天津理科卷)第 20 题的第(Ⅲ)问中也出现了，这一小问是：

已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}+b(x\neq 0)$. 其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

(Ⅲ)若对于任意的 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，不等式 $f(x)\leqslant 10$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上恒成立，求

$b$ 的取值范围.

原参考解答需要用到第(II) 问的结论,下面给出一种直接解法.

题意即:当 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,$x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$时,$x+\frac{a}{x}+b\leqslant 10$恒成立,求 $b$ 的取值范围.

先求关于 $a,x$ 的二元函数$z=x+\frac{a}{x}+b$ 的最大值.

有 $z=x+\frac{a}{x}+b\leqslant x+\frac{2}{x}+b$(因为 $x>0,a\leqslant 2$),又对勾函数 $y=x+\frac{2}{x}$ 在$(0,\sqrt{2}]$上是减函数,所以当 $x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$时,$y_{\max}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{33}{4}$,进而得 $z_{\max}=\left(x+\frac{a}{x}+b\right)\Big|_{a=2,x=\frac{1}{4}}=\frac{33}{4}+b$,所以由题意,得

$$\frac{33}{4}+b\leqslant 10,b\leqslant\frac{7}{4}$$

所求 $b$ 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)$.

# 数学问题 1750 的伴随问题

《数学通报》2008 年第 9 期刊登了数学问题 1750 及其解答(作者:谢广喜)(下简称谢文),在解答的末尾还给出了该问题的一般情形的解法,下面把这个解法写得更清楚些:

**问题 1** 设 $n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3;\lambda_i(i=1,2,\cdots,n-1),k_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是正的实常数,求关于 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的函数 $z=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i x_{i+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j x_j^2}$ 的最大值.

先令 $\sqrt{k_j}x_j=x'_j(j=1,2,\cdots,n)$,得

$$z=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_ik_{i+1}}}x'_ix'_{i+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x'^2_j}$$

所以只需研究问题 1 中 $k_j=1(j=1,2,\cdots,n)$ 的情形,即

**问题 2** 设 $n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3;\lambda_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是正的实常数,求关于 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的函数 $z=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i x_{i+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2}$ 的最大值.

**解** 设 $0<\alpha_k<1(k=2,3,\cdots,n)$,得

$$x_1^2+\alpha_2x_2^2\geqslant 2\sqrt{\alpha_2}x_1x_2$$

$$(1-\alpha_2)x_2^2+\alpha_3x_3^2\geqslant 2\sqrt{(1-\alpha_2)\alpha_3}x_2x_3$$

$$(1-\alpha_3)x_3^2+\alpha_4x_4^2\geqslant 2\sqrt{(1-\alpha_3)\alpha_4}x_3x_4$$

$$\vdots$$

$$(1-\alpha_{n-2})x_{n-2}^2+\alpha_{n-1}x_{n-1}^2\geqslant 2\sqrt{(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}}x_{n-2}x_{n-1}$$

$$(1-\alpha_{n-1})x_{n-1}^2+x_n^2\geqslant 2\sqrt{1-\alpha_{n-1}}x_{n-1}x_n$$

令

$$\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_1}=\frac{\sqrt{(1-\alpha_2)\alpha_3}}{\lambda_2}=\frac{\sqrt{(1-\alpha_3)\alpha_4}}{\lambda_3}=\cdots=$$

$$\frac{\sqrt{(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}}}{\lambda_{n-2}}=\frac{\sqrt{1-\alpha_{n-1}}}{\lambda_{n-1}}=\alpha \qquad ①$$

即

$$\frac{\alpha_2}{\lambda_1^2}=\frac{(1-\alpha_2)\alpha_3}{\lambda_2^2}=\frac{(1-\alpha_3)\alpha_4}{\lambda_3^2}=\cdots=$$
$$\frac{(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}}{\lambda_{n-2}^2}=\frac{1-\alpha_{n-1}}{\lambda_{n-1}^2}=\alpha^2 \qquad ②$$

把上面的一些不等式相加,得

$$\sum_{j=1}^{n}x_j^2\geqslant 2\alpha\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1},z\leqslant\frac{1}{2\alpha}$$

并且当且仅当

$$x_1=\sqrt{\alpha_2}x_2,\sqrt{1-\alpha_2}x_2=\sqrt{\alpha_3}x_3,\sqrt{1-\alpha_3}x_3=\sqrt{\alpha_4}x_4,\cdots,$$
$$\sqrt{1-\alpha_{n-2}}x_{n-2}=\sqrt{\alpha_{n-1}}x_{n-1},\sqrt{1-\alpha_{n-1}}x_{n-1}=x_n \qquad ③$$

$z$ 取到最大值$\frac{1}{2\alpha}$.

**定理 1** 若存在 $0<\alpha_k<1(k=2,3,\cdots,n)$ 使得 ① 成立(也即 ② 成立),则问题2中的函数 $z$ 有最大值,并且当且仅当 ③ 成立时 $z$ 取到最大值(且最大值是$\frac{1}{2\alpha}$).

**猜想** 存在 $0<\alpha_k<1(k=2,3,\cdots,n;n\geqslant 3)$ 使得 ① 成立(也即 ② 成立).

(若猜想成立,就可以用上述待定系数法求解问题 2 和问题 1,当然有时会遇到解高次方程的新问题.)

可以证明猜想在 $n=3,4$ 时均成立:

当 $n=3$ 时,存在 $\alpha_2=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\alpha=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}$(显然 $0<\alpha_2<1$) 满足题意,并且有

**推论 1** 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是正的实常数,则关于 $x_1,x_2,x_3$ 的函数 $z=\frac{\lambda_1x_1x_2+\lambda_2x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 有最大值,且最大值是$\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{2}$(当且仅当 $x_1:x_2:x_3=\lambda_1:\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}:\lambda_2$ 时取到最大值).

当 $n=4$ 时,存在

$$\alpha_2=\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-\sqrt{(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)^2+4\lambda_1^2\lambda_2^2}}{2\lambda_3^2}$$
$$\alpha_3=\frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2+\sqrt{(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)^2+4\lambda_1^2\lambda_2^2}}{2\lambda_1^2} \qquad ④$$

(可证 $0 < \alpha_2 < 1, 0 < \alpha_3 < 1$) 满足题意,并且有

**推论 2** 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是正的实常数,则关于 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 的函数 $z = \frac{\lambda_1x_1x_2 + \lambda_2x_2x_3 + \lambda_3x_3x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ 有最大值,且最大值是 $\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\alpha_2}}\left(= \frac{\lambda_1\lambda_3}{\sqrt{2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 - 2\sqrt{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2}}}\right)$(当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4 = \sqrt{\alpha_2\alpha_3}:\sqrt{\alpha_3}:\sqrt{1-\alpha_2}:\sqrt{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}$ 时取到最大值),其中 $\alpha_2,\alpha_3$ 见④.

顺便指出,谢文左栏倒数第五行末的"$\frac{\sqrt{45}-\sqrt{13}}{4}$"应为"$\frac{\sqrt{45}+\sqrt{13}}{4}$",最好改为"$\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{13}}{4}$";左栏倒数第二行中 $U$ 的等式分母中的"$Kx_1^2$"应为"$K_1x_1^2$";右栏"证明"的头两行"容易看出,若 $x_i$ 中有一个或几个负值,对应的 $U$ 必不是最小上界"是错误的,因为若在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 时 $U$ 取到最小上界,则在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 时 $U$ 也取到最小上界,所以这些话去掉即可.另外,谢文中没有讨论(*)式中的 $\alpha_i(i = 1,2,\cdots,n-2)$ 是否存在,也是不严谨、不完整的.

本文将提出问题 2 的伴随问题:

**问题 3** 设 $n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3$; $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是正的实常数,求关于 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的函数 $z = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_ix_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$(这里约定 $x_{n+1} = x_1$)的最大值.

先看 $n = 3$ 时的情形.

**例** 设 $\alpha,\beta,\gamma$ 为给定的正数,求函数

$$f(x,y,z) = \frac{\alpha yz + \beta zx + \gamma xy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

的最大值.

**解** 引入正参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得

$$\alpha yz \leqslant \frac{\alpha}{2}(\lambda_1y^2 + \frac{1}{\lambda_1}z^2)$$

$$\beta zx \leqslant \frac{\beta}{2}(\lambda_2z^2 + \frac{1}{\lambda_2}x^2)$$

$$\gamma xy \leqslant \frac{\gamma}{2}(\lambda_3x^2 + \frac{1}{\lambda_3}y^2)$$

再把它们相加，得

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy\leqslant\frac{1}{2}(\lambda_3\gamma+\frac{\beta}{\lambda_2})x^2+\frac{1}{2}(\lambda_1\alpha+\frac{\gamma}{\lambda_3})y^2+\frac{1}{2}(\lambda_2\beta+\frac{\alpha}{\lambda_1})z^2$$

令

$$\lambda_3\gamma+\frac{\beta}{\lambda_2}=\lambda_1\alpha+\frac{\gamma}{\lambda_3}=\lambda_2\beta+\frac{\alpha}{\lambda_1}=m \qquad ⑤$$

则

$$f(x,y,z)\leqslant\frac{m}{2}$$

且该式当且仅当 $\lambda_1 y=z,\lambda_2 z=y,\lambda_3 x=y$（所以 $xyz\neq 0$，否则 $x=y=z=0$，与函数 $f(x,y,z)$ 的定义域相矛盾！），即

$$\lambda_1=\frac{z}{y},\lambda_2=\frac{x}{z},\lambda_3=\frac{y}{x} \qquad ⑥$$

时取等号.

把 ⑥ 代入 ⑤ 可得关于 $x,y,z$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}-mx+\gamma y+\beta z=0\\ \gamma x-my+\alpha z=0\\ \beta x+\alpha y-mz=0\end{cases} \qquad ⑦$$

该方程组有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}-m & \gamma & \beta\\ \gamma & -m & \alpha\\ \beta & \alpha & -m\end{vmatrix}=0$$

即

$$m^3-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)m-2\alpha\beta\gamma=0 \qquad ⑧$$

用导数可以研究一元三次方程根的情形（文献[1] 给出了这方面的完整结论），从而可知方程 ⑧ 有唯一正根，下面用上面的定理来求方程 ⑧ 的正根：

(1) 当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时，易求得方程 ⑧ 的正根为 $m=2\alpha$.

(2) 当 $\alpha,\beta,\gamma$ 不全相等时，由均值不等式可证得方程 ⑧ 的系数

$$p=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),q=-2\alpha\beta\gamma(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^+)$$

满足 $4p^3+27q^2<0$，可验证 $m=\frac{2}{3}\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cdot\cos\left[\frac{1}{3}\arccos 3\sqrt{3}\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$ 是方程 ⑧ 的唯一正根（也可由卡丹公式[2] 求得）.

因为情形(1) 也适合情形(2)，所以方程 ⑧ 的唯一正根为

$$m=\frac{2}{3}\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos 3\sqrt{3}\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

得所求函数的最大值为

$$\frac{1}{3}\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos 3\sqrt{3}\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

当且仅当 $x,y,z$ 满足条件 ⑦ 时所求函数取到最大值.

用这种方法还可解决问题 3.

## 参考文献

[1] 甘志国.三次方程根的情况的简明结论[J].中学数学,2007(10):20-21.

[2] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983.

# 用一个恒等式解一类无理方程

我们知道,有下面的恒等式:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

所以,在实数范围内,有

$$a+b+c=0\Leftrightarrow\begin{cases}abc=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\\ a=b=c\neq 0\text{不成立}\end{cases}$$

**证明** $\Rightarrow$只证 $a=b=c\neq 0$ 不成立.

假设 $a=b=c\neq 0$ 成立,将与 $a+b+c=0$ 矛盾!所以 $a=b=c\neq 0$ 不成立.

$\Leftarrow$由 $abc=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$,可得

$$(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$$

当 $a,b,c$ 不全相等时,可得 $a+b+c=0$.

当 $a,b,c$ 全相等时,因为 $a=b=c\neq 0$ 不成立,所以 $a=b=c=0$,也得 $a+b+c=0$.

令 $a=\sqrt[3]{f(x)},b=\sqrt[3]{g(x)},c=\sqrt[3]{h(x)}$,可得:

**定理** 若 $f(x)+g(x)+h(x)=t(x)$,则方程$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{h(x)}=0$与

$$\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=\left(\dfrac{t(x)}{3}\right)^3\\ f(x)=g(x)=h(x)\neq 0\text{不成立}\end{cases}$$

在实数范围内同解.

**推论** 若$f(x)+g(x)+h(x)=0$,则方程$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{h(x)}=0$与方程 $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=0$ 同解.

文献[1]的命题是错误的(因而文献[1]中例题的解答也不完整),应修正为本文的定理.

**例1** 在实数范围内解方程$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-1}=-1$.

**解** 原方程即

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{1}=0$$

因为
$$x+(2x-1)+1=3x$$

所以由定理得,原方程即

$$\begin{cases}x(2x-1)\cdot 1=x^3\\ x=2x-1=1\neq 0\text{不成立}\end{cases}$$

得
$$x=0$$

所以原方程的实数解为 $x=0$.

**例 2** (河南省第三届初三数学竞赛试题四)在实数范围内解关于 $x$ 的方程:

$$\sqrt[3]{(x+a)^2}+4\sqrt[3]{(x-a)^2}=5\sqrt[3]{x^2-a^2}(a\neq 0)$$

**解** 原方程即 $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{4^3(x-a)^2}+\sqrt[3]{-5^3(x^2-a^2)}=0$. 因为

$$(x+a)^2+4^3(x-a)^2-5^3(x^2-a^2)=-(60x^2+126ax-190a^2)$$

所以由定理得,原方程即

$$\begin{cases}(x+a)^2\cdot 4^3(x-a)^2\cdot[-5^3(x^2-a^2)]=\left(-\dfrac{60x^2+126ax-190a^2}{3}\right)^3\\ (x+a)^2=4^3(x-a)^2=-5^3(x^2-a^2)\neq 0\text{不成立}\end{cases}$$

$$\begin{cases}10(x^2-a^2)=\dfrac{30x^2+63ax-95a^2}{3}\\ (x+a)^2=4^3(x-a)^2=-5^3(x^2-a^2)\neq 0\text{不成立}\end{cases}$$

从而得原方程的解是 $x=\dfrac{65}{63}a$.

## 参考文献

[1] 李忠勇. 三次根式问题的简解[J]. 数学教师,1995(8):17-18.

# 也探函数 $u=\dfrac{b\sin\theta+d}{a\cos\theta+c}$ 的值域

文献[1] 给出了求函数

$$u=\frac{b\sin\theta+d}{a\cos\theta+c} \quad ①$$

值域的多种方法,本文进一步给出圆满的结论.

当 $ab=0$ 时,① 的值域易求,下面研究 $ab\neq0$ 时的情形,此时得

$$u=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\theta+\frac{d}{b}}{\cos\theta+\frac{c}{a}}$$

所以只需求函数

$$v=\frac{\sin\theta-q}{\cos\theta-p} \quad ②$$

的值域.

可把式 ② 变形为

$$v(\cos\theta-p)=\sin\theta-q$$

$$v\cos\theta-\sin\theta=vp-q$$

$$\sqrt{v^2+1}\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+1}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}\sin\theta\right)=vp-q$$

设 $\sin\varphi=\dfrac{v}{\sqrt{v^2+1}}$, $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{v^2+1}}$,得

$$\sin(\theta+\varphi)=\frac{vp-q}{\sqrt{v^2+1}} \quad ③$$

$$|\sin(\theta+\varphi)|=\frac{|vp-q|}{\sqrt{v^2+1}}\leqslant1$$

$$|vp-q|\leqslant\sqrt{v^2+1}$$

$$(vp-q)^2\leqslant v^2+1$$

$$(p^2-1)v^2-2pqv+q^2-1\leqslant0 \quad ④$$

因为函数 ② 的定义域不一定是 $\theta\in\mathbf{R}$,所以 ③ 中的 $\theta+\varphi$ 的取值范围也不一定是 $\mathbf{R}$,函数 ② 的值域不一定是 ④ 的解集(但一定是其子集).

② 中的 $v$ 即过两点 $A(p,q)$, $B(\cos\theta,\sin\theta)$ 的直线的斜率,而点 $B$ 是单位

圆 $x^2+y^2=1$ 上满足 $\cos\theta\neq p$ 的所有点.

(1) 当 $|p|=1$ 时,先看 $p=1$ 时:

① 又当 $q=0$ 时,由图 1 知 $u$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$(记作 $u\in\mathbf{R}$,下同).

② 又当 $q>0$ 时,由图 2 可求出单位圆过点 $A(1,q)$ 的切线 $l_1$ 的斜率为 $\frac{q^2-1}{2q}$,所以 $u\in\left[\frac{q^2-1}{2q},+\infty\right)$.

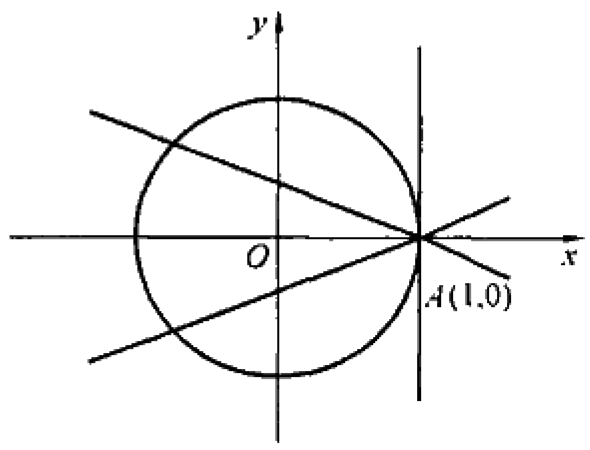



图 1

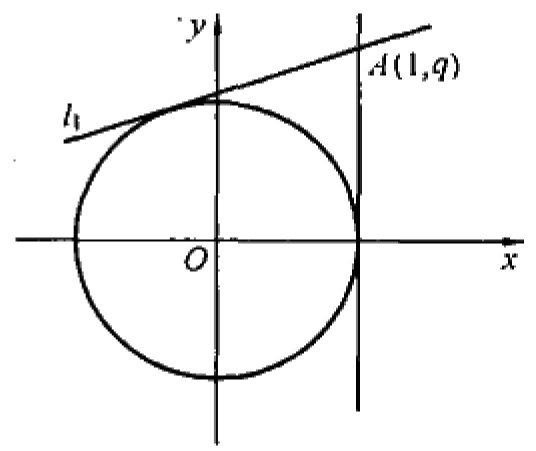



图 2

③ 又当 $q<0$ 时,同 ② 可求出 $u\in\left(-\infty,\frac{q^2-1}{2q}\right]$.

当 $p=-1$ 时,读者画图计算可得:

④ 又当 $q=0$ 时,$u\in\mathbf{R}$.

⑤ 又当 $q>0$ 时,$u\in\left(-\infty,\frac{1-q^2}{2q}\right]$.

⑥ 又当 $q<0$ 时,$u\in\left[\frac{1-q^2}{2q},+\infty\right)$.

(2) 当 $|p|>1$ 时.

先求单位圆 $x^2+y^2=1$ 过点 $A(p,q)$ 的切线斜率 $k$(因为 $|p|>1$,所以 $k$ 存在,如图 3).

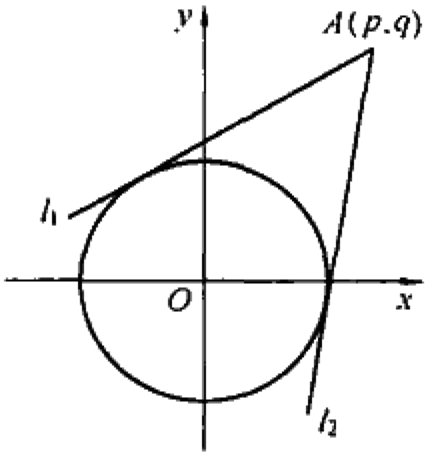



图 3

可设切线方程为 $y-q=k(x-p)$,得

$$kx-y+q-kp=0$$

因为圆心 $O(0,0)$ 到切线的距离等于半径 1,所以

$$\frac{|q-kp|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

$$(p^2-1)k^2-2pqk+q^2-1=0$$

$$k=\frac{pq\pm\sqrt{p^2+q^2-1}}{p^2-1} \qquad ⑤$$

再由图3可得 $u$ 的取值范围是$\left[\frac{pq-\sqrt{p^2+q^2-1}}{p^2-1},\frac{pq+\sqrt{p^2+q^2-1}}{p^2-1}\right]$(注意 $|p|>1$).

(3) 当 $|p|<1$ 时.

① 又 $p^2+q^2>1$ 时(此时点 $A(p,q)$ 在单位圆外),由 ② 中切线斜率的结果⑤及图4可得 $u$ 的取值范围是$\left[\frac{pq+\sqrt{p^2+q^2-1}}{p^2-1},\frac{pq-\sqrt{p^2+q^2-1}}{p^2-1}\right]$(注意 $|p|<1$).

② 又 $p^2+q^2=1$ 时(此时点 $A(p,q)$ 在单位圆上),结合图5可算得 $u$ 的取值范围是 $u\in\mathbf{R}$ 且 $u\neq-\frac{p}{q}$.

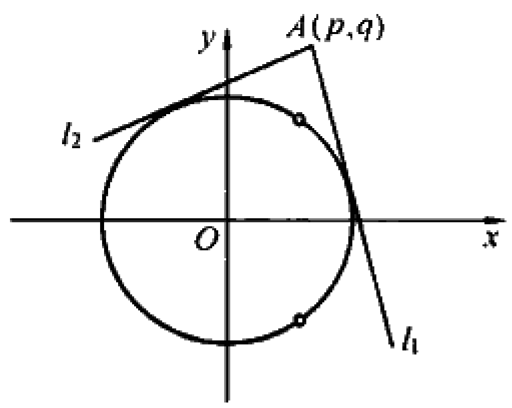



图 4

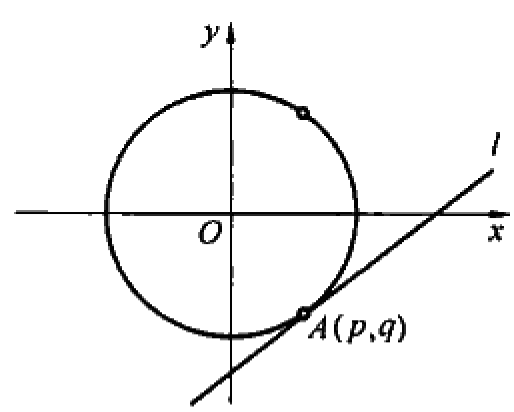



图 5

③ 又 $p^2+q^2<1$ 时(此时点 $A(p,q)$ 在单位圆内),结合图6易得 $u$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

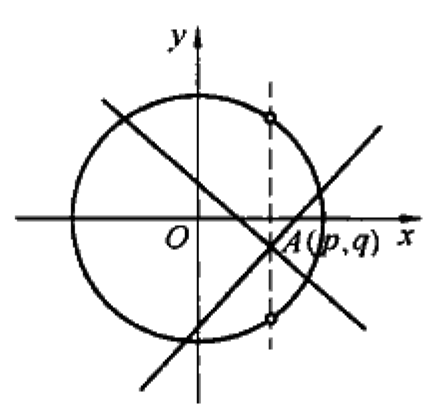



图 6

到此,用斜率已求出了函数 ② 的值域.但情形多,难以记忆.但可以验证:

仅仅情形(3)② 不能通过解不等式④得到,其余的均可.

进而还可得到以下简洁结论:

**定理** (1) 当 $p^2+q^2\neq1$ 时,函数 ② 的值域即不等式 ④ 的解集;

(2) 当 $p^2+q^2=1$ 时,函数 ② 的值域即不等式 ④ 中的"$\leqslant$"改为"$<$"后得到的不等式的解集.

(注:不等式 ④ 并不需要记忆,容易同前推出.)

在函数 ② 中令 $\theta=\frac{\pi}{2}-\theta'$,可得

**推论** 函数 $v_1=\frac{\cos\theta-q}{\sin\theta-p}$ 与函数 $v=\frac{\sin\theta-q}{\cos\theta-p}$ 的值域相同.

**例** 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\sin x-1}$；

(2) $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\sin x+1}$；

(3) $y=\dfrac{2\sin x+3}{2\cos x-1}$；

(4) $y=\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{2\sin x-1}$.

**解** (1) 原函数即 $y=\dfrac{\cos x-\left(-\dfrac{3}{2}\right)}{\sin x-\dfrac{1}{2}}$，可用推论来解.

把 $p=\dfrac{1}{2}, q=-\dfrac{3}{2}$ 代入④，得(④中的"$v$"改为"$y$"，并注意 $p^2+q^2\neq 1$).

$$-\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{2}y+\frac{5}{4}\leqslant 0$$

$$y\leqslant 1-\frac{2}{3}\sqrt{6} \text{ 或 } y\geqslant 1+\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

得所求值域为 $\left(-\infty, 1-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right]\cup\left[1+\dfrac{2}{3}\sqrt{6}, +\infty\right)$.

(2) 也可用推论求解，但也可把所给函数变形为(令 $x=2\pi-x'$)：

$$y=-\frac{2\cos x'+3}{2\sin x'-1}$$

再由(1)知所求值域为 $\left(-\infty, -1-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right]\cup\left[-1+\dfrac{2}{3}\sqrt{6}, +\infty\right)$.

(3) 由推论知所求值域同(1).

(4) 原函数即 $y=\dfrac{\cos x-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sin x-\dfrac{1}{2}}$，用推论来解.

把 $p=\dfrac{1}{2}, q=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 代入④，得(把④中的"$v$"改为"$y$"，因为 $p^2+q^2=1$，所以还应把"$\leqslant$"改为"$<$")：

$$-\frac{3}{4}y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{4}<0$$

$$(\sqrt{3}y-1)^2>0$$

$$y\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

得所求值域是 $\left(-\infty, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

# 参考文献

[1] 杨承毅.探求函数 $u=\frac{b\sin\theta+d}{a\cos\theta+c}$ 的值域[J].数学通讯,2004(19):13-14.

# 2006年高考(湖北卷)选择压轴题欣赏

2006年高考(湖北卷)选择题的压轴题是:

10. 关于 $x$ 的方程 $(x^2-1)^2+|x^2-1|+k=0$,给出下列四个命题:

(1) 存在实数 $k$,使得方程恰有2个不同的实根;

(2) 存在实数 $k$,使得方程恰有4个不同的实根;

(3) 存在实数 $k$,使得方程恰有5个不同的实根;

(4) 存在实数 $k$,使得方程恰有8个不同的实根.

其中假命题中的个数是(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

我们用数形结合来巧解此题:

原方程的解即方程组

$$\begin{cases} t=|x^2-1| & ① \\ k=t-t^2=\dfrac{1}{4}-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 & ② \end{cases}$$

中 $x$ 的值.

先画出①表示的函数图象(图1),由此得方程①的解的情况是:

1) 当 $t<0$ 时,$x$ 不存在;

2) 当 $t=0$ 时,$x$ 的值有2个;

3) 当 $0<t<1$ 时,$x$ 的值有4个;

4) 当 $t=1$ 时,$x$ 的值有3个;

5) 当 $t>1$ 时,$x$ 的值有2个.

且在方程①中,若 $t\geqslant 0$,则不同的 $t$ 对应的 $x$ 一定不相同.

再画出②表示的函数图象(图2),由此得方程②的解的情况,进而可得原方程的解的情况:

1)′ 当 $k>\dfrac{1}{4}$ 时,$t$ 不存在,所以原方程解的个数是0;

2)′ 当 $k=\dfrac{1}{4}$ 时,$t=\dfrac{1}{2}$,由3)知原方程解的个数是4;

3)′ 当 $0<k<\dfrac{1}{4}$ 时,$t$ 的值有2个,且均在(0,1)上,由3)知原方程解的个数是8;

4)′ 当$k = 0$时,$t = 0,1$,由 2),5) 知原方程解的个数是 5;

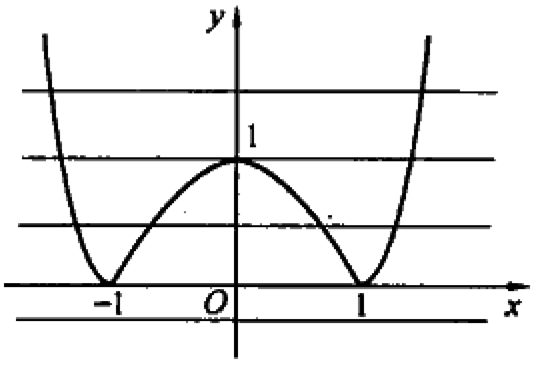



图 1

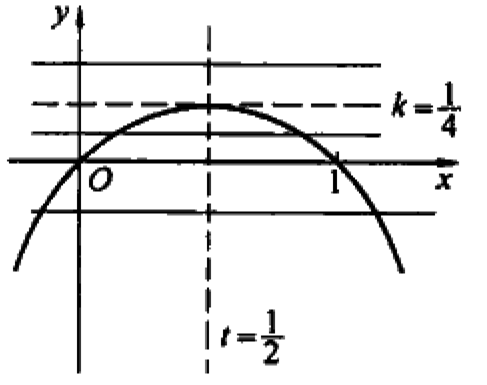



图 2

5)′ 当$k < 0$时,$t$的值有2个,且分别在$(-\infty,0)$,$(1,+\infty)$上,由1),5)知原方程解的个数是 2,所以原题选 A.

# 对数函数的一条性质及其运用

由对数的定义可证得对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1,x>0)$ 有以下性质：

当 $a>1$ 时，若 $x>1$ 则 $y>0$，若 $0<x<1$ 则 $y<0$；

当 $0<a<1$ 时：若 $x>1$ 则 $y<0$，若 $0<x<1$，则 $y>0$.

这里还给出该性质的一种简单记忆方法：

把 $(0,+\infty)$ 以"1"为界分成 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 两个开区间，当底数 $a$ 与真数 $x$ 位于同一个区间时对数 $\log_a x$ 为正，否则为负.

**例 1** 判断下列对数的正负：

(1) $\log_{0.99}0.0001$；(2) $\log_2 1\frac{4}{7}$；(3) $\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}$；(4) $\log_x\frac{x-1}{x+1}$.

**解** (1)，(2) 均为正；(3) 为负.

(4) 由对数的定义有 $x>1$，所以 $0<\frac{x-1}{x+1}<1$，所以此对数值为负.

**例 2** 由以下两种情形均证明 $\log_a N>\log_c N>0$：

(1) $1<a<c,N>1$；

(2) $1>a>c>0;0<N<1$.

**证明**

$$\log_a N=\log_a c\cdot\log_c N \tag{①}$$

在条件(1)或(2)下：由对数函数的单调性得 $\log_a c>\log_a a=1$；又由本文开头叙述的对数函数性质得 $\log_c N>0$，所以 $\log_a c\cdot\log_c N>\log_c N$，又由①得 $\log_a N>\log_c N>0$.

**例 3** 由以下两种情形均证明 $\log_a b>\log_c d>1$.

(1) $1<a<c,\frac{b}{a}\geqslant\frac{d}{c}>1$；

(2) $1>a>c>0,0<\frac{b}{a}\leqslant\frac{d}{c}<1$.

**证明**

$$\log_a\frac{b}{a}-\log_c\frac{d}{c}=\log_a b-\log_c d \tag{②}$$

在条件(1)或(2)下：

由对数函数的单调性，得

$$\log_a\frac{b}{a}\geqslant\log_a\frac{d}{c} \tag{③}$$

由例 2 的结论,得

$$\log_a \frac{d}{c} > \log_c \frac{d}{c} > 0 \quad ④$$

由 ②,③,④ 可得 $\log_a b > \log_c d > 1$.

由例 3(1),还可得一些常见的对数不等式:

$$\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2) \quad (a > 1) \quad ⑤$$

$$\log_a(a+\varepsilon) > \log_{a+\varepsilon}(a+2\varepsilon) \quad (a > 1, \varepsilon > 0) \quad ⑥$$

$$\log_a(a+\varepsilon) > \log_c(c+\varepsilon) \quad (1 < a < c, \varepsilon > 0) \quad ⑦$$

$$\log_a(a+\varepsilon) > \log_c(c+\delta) \quad (1 < a < c, \varepsilon \geqslant \delta \geqslant 0, \varepsilon \neq 0) \quad ⑧$$

(文献[1]第 37 页"试证 …"一行的不等式有误,该不等式中应添上条件"$a \neq 0$".)

**注** 把例 3 中的"$\log_a b > \log_c d > 1$"改为"$0 < \log_b a < \log_d c < 1$"所得结论也成立,⑤ ~ ⑧ 也可作类似的改动.

## 参考文献

[1] 刘晓波,钱长蓉.一个对数不等式的新证法[J].教学与研究(中学数学),1986(3):17-18.

# 用凸函数的性质探求一类条件最值

## 1 凸函数的定义及性质

**定义** 如图1,当 $x \in$ 区间 $I$ 时,若函数 $f(x)$ 的任一段图象都在它所对弦的上(下)方,就说 $f(x)$ 在 $I$ 内上(下)凸,也说 $f(x)$ 是 $I$ 内的上(下)凸函数.

例如,$f(x)=x^{\alpha}(0<\alpha<1,x>0)$,$f(x)=\log_a x(a>1,x>0)$,$f(x)=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 都是上凸函数.

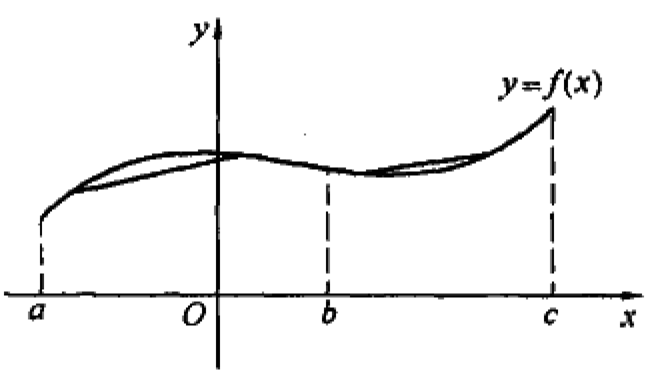


图1

**凸函数的性质** 若 $f(x)$ 为$[a,b]$内的上(下)凸函数,则 $-f(x)$ 是$[a,b]$内的下(上)凸函数.

**琴生不等式** 若 $f(x)$ 为区间 $I$ 内的上(下)凸函数,则对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$,总有 $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\geqslant(\leqslant)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号(见文献[1],第84～86页).

本文将探求如下最值问题:

设 $f(x)$ 是$[a,b]$内的上(下)凸函数,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$,$n\geqslant 2$,$\sum_{i=1}^{n}x_i=k$($k$ 是常数,必有 $na\leqslant k\leqslant nb$),怎样求 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 的最大值 $S_n(a,b,k)$($T_n(a,b,k)$)及最小值 $s_n(a,b,k)$($t_n(a,b,k)$).

## 2 $S_n(a,b,k)$ 的值

**定理1** $S_n(a,b,k)=nf\left(\frac{k}{n}\right)$,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{k}{n}$(必有 $\frac{k}{n}\in[a,b]$)时取最大值.

**证明** 当 $f(x)$ 是$[a,b]$内的上凸函数时,由琴生不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant nf\left(\frac{k}{n}\right)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{k}{n}$ 时取等号.

即定理 1 成立.

## 3　$s_n(a,b,k)$ 的探求

### 3.1　$na < k \leqslant (n-1)a+b$ 及 $a+(n-1)b \leqslant k < nb$ 时的结论

**定理 2**　当 $na < k \leqslant (n-1)a+b$ 时，$S_n(a,b,k) = (n-1)f(a) + f(k-(n-1)a)$，当且仅当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有 $n-1$ 个字母均取 $a$ 且另一个字母取 $k-(n-1)a$ 时取最小值.

**证明**　设点 $A(a,f(a))$，$B_i(x_i,f(x_i)(i=1,2,\cdots,n))$，$C(k-(n-1)a, f(k-(n-1)a))$. 可证 $a \leqslant x_i \leqslant k-(n-1)a \leqslant b$.

当 $a < x_i < k-(n-1)a(i=1,2,\cdots,n)$ 时，由定义可得斜率 $k_{AB_i} > k_{AC}$(参见文献[2]定理的证明)，即

$$\frac{f(x_i)-f(a)}{x_i-a} > \frac{f(k-(n-1)a)-f(a)}{(k-(n-1)a)-a}$$

$$f(x_i) > f(a) + \frac{f(k-(n-1)a)-f(a)}{k-na}(x_i-a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > (n-1)f(a) + f(k-(n-1)a) \qquad ①$$

注　由 $k_{B_iC} < k_{AC}$ 也可证得 ① 成立.

下证：当 $a \leqslant x_i < k-(n-1)a(i=1,2,\cdots,n)$ 时

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > (n-1)f(a) + f(k-(n-1)a) \qquad ②$$

不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$. 由 $k = \sum_{i=1}^{n} x_i > na$，可证 $x_1 > a$.

设 $x_p > a(1 \leqslant p \leqslant n)$，$x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = a$.

若 $p=1$，即 $x_1 > a$，$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = a$，由 $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$，得 $x_1 = k-(n-1)a$，这与题设 $x_1 < k-(n-1)a$ 矛盾！所以 $p \geqslant 2$.

得 $a < x_i < k-(n-1)a(i=1,2,\cdots,p,p\geqslant 2)$，$\sum_{i=1}^{p} x_i = k-(n-p)a$.

由结论 ①，得

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i) > (p-1)f(a) + f(k-(n-p)a-(p-1)a)$$

即

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i) > (p-1)f(a) + f(k-(n-1)a)$$

又由 $x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = a$，可得结论 ② 成立.

再证：当 $a \leqslant x_i \leqslant k-(n-1)a(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant (n-1)f(a)+f(k-(n-1)a)$，当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 $n-1$ 个字母均取 $a$ 且另一个字母取 $k-(n-1)a$ 时取等号 ③

因为 $\sum_{i=1}^{n} x_i = k, x_i \geqslant a(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至多有一个字母取 $k-(n-1)a$（此时其余 $n-1$ 个字母必均取 $a$），再由结论 ② 可得结论 ③ 成立.

综上所述，定理 2 成立.

**定理 3** 当 $a+(n-1)b \leqslant k < nb$ 时，$s_n(a,b,k) = (n-1)f(b)+f(k-(n-1)b)$，当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 $n-1$ 个字母均取 $b$ 且另一个字母取 $k-(n-1)b$ 时取最小值.

**证明** 设点 $A(k-(n-1)b,f(k-(n-1)b))$，$B_i(x_i,f(x_i))(i=1,2,\cdots,n)$，$c(b,f(b))$，可设 $a \leqslant k-(n-1)b \leqslant x_i \leqslant b$.

当 $k-(n-1)b < x_i < b(i=1,2,\cdots,n)$ 时，由定义可得斜率 $k_{B_iC} < k_{AC}$，即

$$\frac{f(x_i)-b}{x_i-b} < \frac{f(k-(n-1)b)-f(b)}{(k-(n-1)b)-b}$$

$$f(x_i) > f(b)+\frac{f(k-(n-1)b)-f(b)}{k-nb}(x_i-b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > (n-1)f(b)+f(k-(n-1)b) \qquad ④$$

**注** 由 $k_{AB_i} > k_{AC}$ 也可证得 ④ 成立.

下证：当 $k-(n-1)b < x_i \leqslant b(i=1,2,\cdots,n)$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > (n-1)f(b)+f(k-(n-1)b) \qquad ⑤$$

不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. 由 $k=\sum_{i=1}^{n} x_i < nb$，可证 $x_1 < b$.

设 $x_p < b(1 \leqslant p \leqslant n)$，$x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = b$.

若 $p=1$，即 $x_1 < b, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = b$，由 $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$，得 $x_1 = k-(n-1)b$，这与题设 $x_1 > k-(n-1)b$ 矛盾！所以 $p \geqslant 2$.

得 $k-(n-1)b < x_i < b(i=1,2,\cdots,p;p \geqslant 2)$，$\sum_{i=1}^{p} x_i = k-(n-p)b$，由 ④，得

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i) > (p-1)f(b) + f(k-(n-p)b-(p-1)b)$$

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i) > (p-1)f(b) + f(k-(n-1)b)$$

又由 $x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = b$，可得结论 ⑤ 成立.

再证：

当 $k-(n-1)b \leqslant x_i \leqslant b(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant (n-1)f(b) + f(k-(n-1)b)$，当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 $n-1$ 个字母均取 $b$ 且另一个字母取 $k-(n-1)b$ 时取等号 ⑥

因为 $\sum_{i=1}^{n} x_i = k, x_i \leqslant b(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至多有一个字母取 $k-(n-1)b$（此时其余的 $n-1$ 个字母均取 $b$），再由结论 ⑤ 可得 ⑥ 成立.

综上所述，定理 3 成立.

### 3.2 $n = 2,3,4$ 时的值

由定理 2,3，可得

**推论 1** (1) 当 $2a < k \leqslant a+b$ 时，$s_2(a,b,k) = f(a) + f(k-a)$，当且仅当 $x_1 = a$ 或 $x_2 = a$ 时取最小值.

(2) 当 $a+b \leqslant k < 2b$ 时，$s_2(a,b,k) = f(b) + f(k-b)$，当且仅当 $x_1 = b$ 或 $x_2 = b$ 时取最小值.

**推论 2** (1) 当 $3a < k \leqslant 2a+b$ 时，$s_3(a,b,k) = 2f(a) + f(k-2a)$，当且仅当 $x_1,x_2,x_3$ 中有两个字母均取 $a$ 时取最小值；

(2) 当 $2a+b < k < a+2b$ 时，$s_3(a,b,k) = f(a) + f(b) + f(k-a-b)$，当且仅当 $x_1,x_2,x_3$ 中有两个字母分别取 $a,b$ 时取最小值；

(3) 当 $a+2b \leqslant k < 3b$ 时，$s_3(a,b,k) = 2f(b) + f(k-2b)$，当且仅当 $x_1,x_2,x_3$ 中有两个字母均取 $b$ 时取最小值.

**证明** 由定理 2,3 可分别得结论(1)，(3) 成立，下证(2)：

有 $x_1 + x_2 = k - x_3$，由 $2a+b < k < a+2b$，可证 $2a < k - x_3 < 2b$. 又由推论 1，得

当 $2a < k - x_3 \leqslant a+b$ 时，$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(a) + f(k-x_3-a)$，当且仅当 $x_1 = a$ 或 $x_2 = a$ 时取等号.

所以 $\sum_{i=1}^{3} f(x_i) \geqslant f(a) + f(k-x_3-a) + f(x_3)$.

又 $(k-x_3-a) + x_3 = k-a, a+b < k-a < 2b$，所以由推论 1(2)，得

$\sum_{i=1}^{3} f(x_i) \geq f(a)+f(b)+f(k-a-b)$,当且仅当 $x_1,x_2,x_3$ 中有两个字母分别取 $a,b$ 时取等号,即此时结论成立.

当 $a+b<k-x_3<2b$ 时,同样可证得结论成立.

运用推论 2,可证得.

**推论 3** (1) 当 $4a<k\leq 3a+b$ 时,$s_4(a,b,k)=3f(a)+f(k-3a)$,当且仅当 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 中有三个字母均取 $a$ 时取最小值;

(2) 当 $3a+b<k<a+3b$ 时,$s_4(a,b,k)=2f(a)+f(b)+f(k-2a-b)$(当且仅当 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 中有三个字母分别取 $a,a,b$ 时取此最小值)或 $s_4(a,b,k)=f(a)+2f(b)+f(k-a-2b)$(当且仅当 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 中有三个字母分别取 $a,b,b$ 时取此最小值);

(3) 当 $a+3b\leq k<4b$ 时,$s_4(a,b,k)=3f(b)+f(k-3b)$,当且仅当 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 中有三个字母均取 $b$ 时取最小值.

### 3.3 $(n-1)a+b<k<a+(n-1)b$ 时的猜想

**猜想 1** (1) 当 $3a+b<k\leq 2a+2b$ 时,$s_4(a,b,k)=2f(a)+f(b)+f(k-2a-b)$;

(2) 当 $2a+2b\leq k<a+3b$ 时,$s_4(a,b,k)=f(a)+2f(b)+f(k-a-2b)$.

**猜想 2** 当 $(n-j)a+jb\leq k\leq(n-j-1)a+(j+1)b$ 时($j=1,2,\cdots,n-2,n\geq 4$),$s_n(a,b,k)=(n-j-1)f(a)+jf(b)+f(k-(n-j-1)a-jb)$,当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 $n-j-1$ 个字母均取 $a$ 且还有 $j$ 个字母均取 $b$ 时取最小值.

若猜想 2 成立,则求 $s_n(a,b,k)$ 的问题已全部解决.

## 4 $t_n(a,b,k)$ 的值及 $T_n(a,b,k)$ 的探求

由凸函数的性质(2),易得

将本文的所有定理,推论中的 $S_n(a,b,k)$ 均改为 $t_n(a,b,k)$,$s_n(a,b,k)$ 均改为 $T_n(a,b,k)$,所得结论成立.也包括 $n=2,3,4$ 的情形.还可提出类似于猜想 1,2 的猜想.

由得到的结论知:$t_n(a,b,k)$ 的值已求出.$n=2,3,4$ 时,$T_n(a,b,k)$ 的值已求出;$na<k\leq(n-1)a+b$ 及 $a+(n-1)b\leq k<nb$ 时,$T_n(a,b,k)$ 的值已求出.

## 5 举例

**例 1** (文献[1] 第 484 页例 3) 在锐角 $\triangle ABC$ 中,求证:$\sin A+\sin B+$

$\sin C > 2$.

**证明** 因为 $f(x) = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 内上凸,所以由推论 2(3),可得

当 $A,B,C \in [0,\frac{\pi}{2}]$,$A+B+C=\pi$ 时,$\sin A+\sin B+\sin C \geqslant 2$(当且仅当 $A,B,C$ 中有两个字母均取 $\frac{\pi}{2}$ 时取等号).

所以要证结论成立.

**例 2** 在锐角 $\triangle ABC$ 中,求证:$\sin A+\sin B+\sin C+\cos A+\cos B+\cos C>3$.

**证法一** 因为 $f(x) = \cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内上凸,所以由推论 2(3),可得

当 $A,B,C \in [0,\frac{\pi}{2}]$,$A+B+C=\pi$ 时,$\cos A+\cos B+\cos C \geqslant 1$(当且仅当 $A,B,C$ 中有两个字母均取 $\frac{\pi}{2}$ 时取等号).

又由例 1 证得的结论,有 $\sin A+\sin B+\sin C+\cos A+\cos B+\cos C \geqslant 3$,当且仅当 $A,B,C$ 中有两个字母均取 $\frac{\pi}{2}$ 时取等号.

所以要证结论成立.

**证法二** 由推论 2(3),可证 $\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\sin(C+\frac{\pi}{4}) \geqslant 3$,当且仅当 $A,B,C$ 中有两个字母均取 $\frac{\pi}{2}$ 时取等号.

从而可得要证结论成立.

**例 3** 若 $A,B,C \in [0°,100°]$,$A+B+C=180°$,求证:$\sin A+\sin B+\sin C \geqslant 2\sin 80°$.

**证明** 由推论 2(2) 可证.

由推论 2(1) 易得文献[2] 中所有的不等式及定理成立.

## 参考文献

[1] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993.
[2] 张云华.一类根式不等式的统一结果[J].中学数学月刊,2000(11):41-42.

# 一种简便快捷的求反函数的方法

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第67～68页讲述了“反函数”的定义，通常求“反函数”的方法就是根据这个定义来求的，包含两个步骤：

(1) 由原函数的解析式 $y=f(x)$(定义域为 $x\in A$，值域为 $y\in C$)解出表达式 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 $x,y$ 互换得到 $y=f^{-1}(x)$，函数 $y=f^{-1}(x)$(定义域为 $x\in C$，值域为 $y\in A$)就是原函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(以上步骤(1)中的函数 $y=f(x)$ 有反函数的充要条件为 $f$ 是 $A$ 到 $C$ 的一一映射，特别的，若 $y=f(x)$ 是单调函数，则它有反函数.)

用定义求反函数时，步骤(1)是比较繁琐的，本文将给出一种简便快捷的求反函数方法.

**例1** (教科书第70页习题第1(7)题)求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}+1(x\in\mathbf{R})$ 的反函数.

**解** 此函数中包含四步运算，依次是：

$$x\xrightarrow{-1}x-1\xrightarrow{\div 2}\frac{x-1}{2}\xrightarrow{\text{开立方}}\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}\xrightarrow{+1}\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}+1$$

所以，求反函数时，可以从后到前依次进行“相反”的运算，即

$$x\xrightarrow{-1}x-1\xrightarrow{\text{立方}}(x-1)^3\xrightarrow{\times 2}2(x-1)^3\xrightarrow{+1}2(x-1)^3+1$$

所以，所求反函数的解析式为 $y=2(x-1)^3+1$.

在原函数中，由 $x\in\mathbf{R}$，得 $y\in\mathbf{R}$，所以反函数的定义域也是 $x\in\mathbf{R}$.

因而所求的反函数为 $y=2(x-1)^3+1(x\in\mathbf{R})$.

读者可以验证，此种解法与用定义法所得的结果完全一致，但此种解法具有一般性吗?有!它的理论依据是：

**定理1** (求复合函数的反函数法则)设函数 $y=f(u)$(定义域 $u\in B$，值域 $y\in C$)与 $u=g(x)$(定义域 $x\in A$，值域 $u\in B$)均有反函数，则复合函数 $y=f(g(x))$(定义域 $x\in A$，值域 $y\in C$)也有反函数，且其反函数为 $y=g^{-1}(f^{-1}(x))$(定义域 $x\in C$，值域 $y\in A$).

**证明** 由题设可得,$f$是$B$到$C$的一一映射,$g$是$A$以$B$的一一映射,所以复合函数$y=f(g(x))(x\in A,y\in C)$中的对应法则$fg$是$A$到$C$的一一映射,因而此复合函数有反函数.

$y=f(u)(u\in B,y\in C)$的反函数是$u=f^{-1}(y)(y\in C,u\in B)$.

$u=g(x)(x\in A,u\in B)$的反函数是$x=g^{-1}(u)(u\in B,x\in A)$.

所以$x=g^{-1}(u)=g^{-1}(f^{-1}(y))(y\in C,x\in A)$,表示的就是复合函数$y=f(g(x))(x\in A,y\in C)$的反函数,再把所求反函数中的$x,y$互换后即得定理的结论.

还可把定理1推广为:若函数$f,g,h,\cdots$均存在反函数,则复合函数$y=f(g(h(\cdots(x))))$的反函数为$y=\cdots(h^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(x))))$.

**定理2** (只有一步运算的函数的反函数)以下结论中的$c,k,n$均为常数:

(1)若$f(x)=x+c$,则$f^{-1}(x)=x-c$("$+c$"的相反对应法则是"$-c$",反之也成立,下同);

(2)若$f(x)=kx(k\neq0)$,则$f^{-1}(x)=\frac{x}{k}$("$\times k$"的相反对应法则是"$\div k$");

(3)若$f(x)=\frac{k}{x}(k\neq0)$,则$f^{-1}(x)=\frac{k}{x}$("被$k$除"的相反对应法则依然是"被$k$除");

(4)若$f(x)=x^{2n}(n\in\mathbf{N}^*,x\geqslant0)$,则$f^{-1}(x)=\sqrt[2n]{x}$;若$f(x)=x^{2n}(n\in\mathbf{N}^*,x\leqslant0)$,则$f^{-1}(x)=-\sqrt[2n]{x}$("$2n$次方"的相反对应法则是"开$2n$次方"(但要选$+$,$-$之一)).

若$f(x)=x^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,则$f^{-1}(x)=\sqrt[2n+1]{x}$("$2n+1$次方"的相反对应法则是"开$2n+1$次方");

(5)若$f(x)=\sqrt[n]{x}(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$,则$f^{-1}(x)=x^n$("求$n$次算术根"的相反对应法则是"$n$次方").

**证明均略去** 定理2给出了$+$、$-$、$\times$、$\div$、乘方、开方这六种代数运算的"相反"运算法则,读者如果知道三角函数、反三角函数这些一步运算的函数,也容易给出它们的反函数.

由定理1,2就可以明白例1解法的道理.

教科书第67~71页中求反函数的例题、练习题、习题均可用本文介绍的方法解答,举例如下:

**例2** (下面的前五道题分别是教科书第67~71页的例1(2)、(3)、(4),习题1(3),2)

(1)$y=x^3+1(x\in\mathbf{R})$;

(2) $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$;

(3) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 1)$;

(4) $y=x^2(x\leqslant 0)$;

(5) $y=\sqrt{25-4x^2}(x\in[0,\dfrac{5}{2}])$;

(6) $y=x^2+2x+3(x\geqslant 0)$;

(7) $y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}$;

(8) $y=\dfrac{(x+2)^0}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

**解** (1) 因为原函数中有两步运算:

$$x\xrightarrow{\text{立方}}x^3\xrightarrow{+1}x^3+1$$

所以 $y=x^3+1(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-1}(x\in\mathbf{R})$.

(2) $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$ 的反函数为 $y=(x-1)^2(x\geqslant 1)$.

(3) 在解析式 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 中两次出现了"$x$",不能直接用本文介绍的方法求解,但可将原函数变形为:

$$y=2+\frac{5}{x-1}(x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq 1)$$

所以所求反函数为 $y=\dfrac{5}{x-2}+1(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 2)$.

(4) 答案为 $y=-\sqrt{x}(x\geqslant 0)$.

(5) 原函数中的运算依次为

$$x\xrightarrow{\text{平方}}x^2\xrightarrow{\times(-4)}-4x^2\xrightarrow{+25}25-4x^2\xrightarrow{\text{求算术平方根}}\sqrt{25-4x^2}$$

所以,所求反函数的解析式为

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^2-25}{-4}}$$

又因为原函数中的 $x\geqslant 0$,所以反函数中的 $y\geqslant 0$,得

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$$

可得原函数中的 $y\in[0,5]$,所以所求反函数为

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}(x\in[0,5])$$

(6) 原函数即 $y=(x+1)^2+2(x\geqslant 0)$,所以其反函数为

$$y=\sqrt{x-2}-1(x\geqslant 3)$$

(7) 原函数即 $y=x(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0)$,其反函数为原函数本身.

(8) 原函数即

$$y=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}\left(x\in\mathbf{R},\text{且 } x\neq 0,-\frac{1}{2},-1,-2\right)$$

所以其反函数为

$$y=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x-1}-1}=\frac{1-x}{2x-1}\left(x\in\mathbf{R},\text{且 } x\neq 0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right)$$

**注** 求一个函数的反函数时,先一定要判定此函数的反函数存在(可根据充要条件或定理1中复合函数存在反函数的条件判定),才能再按本文介绍的方法求反函数.若原函数的运算步骤较多,用本文的方法求反函数也较繁,且结果还要化简,此时本文的方法也不大适用.

# 用“同增异减”求复合函数的单调区间应注意什么

读者可能听说过用“同增异减”求复合函数的单调区间，请看

**例**　求函数 $y = x^{\alpha} + \frac{1}{x^{\alpha}}(\alpha \in \mathbf{R}^*, x > 0)$ 的单调区间.

**解**　因为函数 $y = u + \frac{1}{u}(u > 0)$ 在(0,1]上是减函数，在[1, +∞)上是增函数，又：

当 $\alpha > 0$ 时，$u = x^{\alpha}$ 在[0, +∞)上是增函数；当 $\alpha < 0$ 时，$u = x^{\alpha}$ 在(0, +∞)上是减函数.

所以由“同增异减”得复合函数 $y$ 的单调区间是：

当 $\alpha > 0$ 时，$y = x^{\alpha} + \frac{1}{x^{\alpha}}$ 在(0,1]上是减函数，在[1, +∞)上是增函数；

当 $\alpha < 0$ 时，$y = x^{\alpha} + \frac{1}{x^{\alpha}}$ 在(0,1]上是增函数，在[1,+∞)上是减函数.

**分析**　把 $y = x^{\alpha} + \frac{1}{x^{\alpha}}$ 变形为 $y = x^{\alpha} + x^{-\alpha}$ 可知，$\alpha > 0$ 与 $\alpha < 0$ 时函数 $y$ 的单调区间一致. 说明上述“解”法及结论均是错误的！

为了正确解答本题，还应深刻领会“同增异减”的含义.

**复合函数的定义**　设 $y = f(u)$（定义域为 $B$——下记作 $u \in B$），$u = g(x)(x \in A, u \in B_0, B_0 \subseteq B)$，则称函数 $y = f(g(x))(x \in A)$ 叫做 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数. 把复合函数“$f(g(x))$”中的 $f(u)$ 叫做外层函数，$g(x)$ 叫做内层函数.

**定理**　（复合函数的单调性——“同增异减”）设 $y = f(u)(u \in B, B$ 是区间），$u = g(x)(x \in A, A$ 是区间，$u \in B_0, B_0 \subseteq B)$，则

(1) 当函数 $y$ 在区间 $B$ 上的增减性与 $u$ 在区间 $A$ 上的增减性相同时，复合函数 $y = f(g(x))$ 在区间 $A$ 上为增函数；

(2) 当函数 $y$ 在区间 $B$ 上的增减性与 $u$ 在区间 $A$ 上的增减性相反时，复合函数 $y = f(g(x))$ 在区间 $A$ 上为减函数.

下面用定理给出例题的正确解答：

因为函数 $y = u + \frac{1}{u}(u > 0)$ 在(0,1]上是减函数，在[1, +∞)上是增函

数.

又当 $\alpha>0$ 时,$u=x^{\alpha}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,且 $x\in(0,1]$ 时 $u\in(0,1]$,此时得复合函数 $y=x^{\alpha}+\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $(0,1]$ 上是减函数;$x\in[1,+\infty)$ 时 $u\in[1,+\infty)$,此时得复合函数 $y=x^{\alpha}+\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.

再当 $\alpha<0$ 时,$u=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,且 $x\in(0,1]$ 时 $u\in[1,+\infty)$,此时得复合函数 $y=x^{\alpha}+\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $(0,1]$ 上是减函数;$x\in[1,+\infty)$ 时,$u\in(0,1]$,此时得复合函数 $y=x^{\alpha}+\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.

在用"同增异减"求复合函数的单调区间时应注意外层函数相对于内层函数的值域(即外层函数的定义域)的增减性.

# 一类多元函数的值域
## ——对四个猜想的研究

文献[1]用导数证明了文献[2]的猜想1成立,由文献[1]的定理1及其证明还可得:

**定理1** 设 $x^n+y^n=2(x,y\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N},n>1)$.

(1) 若 $2\nmid n$,则 $x+y$ 的取值范围是 $(0,2]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $x+y\to0^+$,当且仅当 $x=y=1$ 时 $x+y=2$),$xy$ 的取值范围是 $(-\infty,1]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $xy\to-\infty$,当且仅当 $x=y=1$ 时 $xy=1$).

(2) 若 $2\mid n$,则 $x+y$ 的取值范围是 $[-2,2]$(当且仅当 $x=y=-1$ 时 $x+y=-2$,当且仅当 $x=y=1$ 时 $x+y=2$),$xy$ 的取值范围是 $[-1,1]$(当且仅当 $x=-y=\pm1$ 时 $xy=-1$,当且仅当 $x=y=\pm1$ 时 $xy=1$).

由定理1,还可得

**定理2** 设 $x^n+y^n=k(x,y\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N},n>1,2\nmid n)$.

(1) 若 $k=0$,则 $x+y=0$.

(2) 若 $k\neq0$,则 $\frac{x+y}{\sqrt[n]{k}}$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{2}{\sqrt[n]{2}}\right]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $\frac{x+y}{\sqrt[n]{k}}\to0^+$,当且仅当 $x=y=\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $\frac{x+y}{\sqrt[n]{k}}=\frac{2}{\sqrt[n]{2}}$).

(3) $xy$ 的取值范围是 $\left(-\infty,\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}\right]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $xy\to-\infty$,当且仅当 $x=y=\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $xy=\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}$).

**证明** 当 $k=0$ 时易证定理2成立.

当 $k\neq0$ 时,由 $x^n+y^n=k$,得 $\left(x\sqrt[n]{\frac{2}{k}}\right)^n+\left(y\sqrt[n]{\frac{2}{k}}\right)^n=2$.再由定理1(1)可得定理2,此时也成立.

**定理3** 设 $x^n+y^n=k(x,y\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*,2\mid n,k\geqslant0)$,则 $x+y$ 的取值范围是 $\left[-2\sqrt[n]{\frac{k}{2}},2\sqrt[n]{\frac{k}{2}}\right]$(当且仅当 $x=y=\mp\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $x+y=\mp2\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$);$xy$ 的取值范围是 $\left[-\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}},\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}\right]$(当且仅当 $x=-y=\pm\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $xy=-\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}$,

当且仅当 $x = y = \pm\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $xy = \sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}$). (这里约定: 区间 $[\alpha,\alpha]$ = 数集 $\{\alpha\}(\alpha \in \mathbf{R})$,下同)

**定理 4** 若 $\sum_{i=1}^{n} a_i^m = k(a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{R}, m,n$ 都是大于 2 的整数, $2 \nmid m$, $k$ 是已知的任意实数),则 $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$.

**证明** 只需证 $n = 3$ 时的情形:

若 $a^m + b^m + c^m = k(a,b,c \in \mathbf{R}, m$ 是大于 1 的奇数, $k$ 是已知的任意实数),则 $a+b+c$, $abc$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$.

(因为由此立得:

若 $a_1^m + a_2^m + a_3^m + 1^m + 1^m + \cdots + 1^m(n-3$ 个 $1^m) = (k-n+3)+n-3$ $(a_1,a_2,a_3 \in \mathbf{R}, m$ 是大于 1 的奇数),则 $a_1+a_2+a_3+1+1+\cdots+1$ $(n-3$ 个 $1)$, $a_1a_2a_3 \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1$ $(n-3$ 个 $1)$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$.

又由此可得定理 4 成立.)

由 $a^m + b^m + c^m = k$,得 $a^m + b^m = k - c^m$.

选 $c < \sqrt[m]{k}$,由定理 2(2),得

$a + b$ 的取值范围是 $\left(0, 2\sqrt[m]{\frac{k-c^m}{2}}\right]$, $a+b+c$ 的取值范围是 $\left(c, c+2\sqrt[m]{\frac{k-c^m}{2}}\right]$.

当 $c \to -\infty$ 时, $c + 2\sqrt[m]{\frac{k-c^m}{2}} \to +\infty$,所以 $a+b+c$ 的取值范围是 $(-\infty, +\infty)$. 所以当 $c \in \mathbf{R}$ 时, $a+b+c$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

由 $a^m + b^m = k - c^m$ 及定理 2(3),得 $ab$ 的取值范围是 $\left(-\infty, \sqrt[m]{\frac{(c^m-k)^2}{4}}\right]$.

又选 $c > 0$,得 $abc$ 的取值范围是 $\left(-\infty, c\sqrt[m]{\frac{(c^m-k)^2}{4}}\right]$.

当 $c \to +\infty$ 时, $c\sqrt[m]{\frac{(c^m-k)^2}{4}} \to +\infty$,所以 $abc$ 的取值范围是 $(-\infty, +\infty)$,所以 $c \in \mathbf{R}$ 时, $abc$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

**定理 5** 设 $\sum_{i=1}^{n} a_i^m = k(a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{R}, m,n$ 都是大于 1 的整数, $2 \mid m$, $k \geqslant 0)$,则

(1) $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是$\left[-n\sqrt[m]{\frac{k}{n}},n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}\right]$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\mp\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时$\sum_{i=1}^{n}a_i=\mp n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$).

(2) $\prod_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是$\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{m}},\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{m}}\right]$(当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有奇数个取$-\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 且其余的均取$\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时$\prod_{i=1}^{n}a_i=-\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$,当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有偶数个取 $-\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 且其余的均取$\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时$\prod_{i=1}^{n}a_i=\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$).

**证明**　对 $n$ 用数学归纳法来证.

由定理3知 $n=2$ 时成立,假设 $n=t(t\geqslant 2)$ 时成立,下证 $n=t+1$ 时成立.

由$\sum_{i=1}^{t+1}a_i^m=k$,得$\sum_{i=1}^{t}a_i^m=k-a_{t+1}^m$,有 $-\sqrt[m]{k}\leqslant a_{t+1}\leqslant\sqrt[m]{k}$.

(1) 由"假设 $n=t$ 时成立",得 $\sum_{i=1}^{t}a_i$ 的取值范围是$\left[-t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}},t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}\right]$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_t=\mp t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$ 时 $\sum_{i=1}^{t}a_i=\mp t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$),$\sum_{i=1}^{t+1}a_i$ 的取值范围是

$$\left[a_{t+1}-t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}},a_{t+1}+t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}\right]$$

设 $f(a_{t+1})=a_{t+1}-t\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}(-\sqrt[m]{k}\leqslant a_{t+1}\leqslant\sqrt[m]{k})$,得

$$f'(a_{t+1})=1+\left(\frac{a_{t+1}}{\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}}\right)^{m-1}$$

当 $f'(a_{t+1})$ 的值为0或不存在时,$a_{t+1}=-\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$ 或 $\pm\sqrt[m]{k}$.

当 $a_{t+1}=-\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$,$\pm\sqrt[m]{k}$ 时,$f(a_{t+1})$ 的值分别为 $-(t+1)\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$,$\pm\sqrt[m]{k}$.
所以当且仅当 $a_{t+1}=-\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$ 时,$f(a_{t+1})$ 取最小值 $-(t+1)\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$.
从而可得当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{t+1}=-\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$ 时,$\sum_{i=1}^{t+1}a_i$ 取最小值

$-(t+1)\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$.

同理可证当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{t+1}=\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$ 时，$\sum_{i=1}^{t+1}a_i$ 取最大值 $(t+1)\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$.

又由 $t+1$ 元函数 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的连续性可得 $\sum_{i=1}^{t+1}a_i$ 的取值范围是 $\left[-(t+1)\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}},(t+1)\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}\right]$，且可得 $n=t+1$ 时结论(1)也成立.

(2) 由"假设 $n=t$ 时成立"，得 $\prod_{i=1}^{t}a_i$ 的取值范围是 $\left[-\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}},\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}}\right]$(当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_t$ 中有奇数个取 $-\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$ 且其余的均取 $\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$ 时 $\prod_{i=1}^{t}a_i=-\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$，当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_t$ 中有偶数个取 $-\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$，且其余的均取 $\sqrt[m]{\frac{k-a_{t+1}^m}{t}}$ 时 $\prod_{i=1}^{t}a_i=\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}}$).

以下又分两种情形.

① 当 $a_{t+1}\geqslant 0$ 时，$\prod_{i=1}^{t+1}a_i$ 的取值范围是 $\left[-a_{t+1}\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}},a_{t+1}\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}}\right]$.

设 $g(a_{t+1})=a_{t+1}\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}}(0\leqslant a_{t+1}\leqslant\sqrt[m]{k})$，得

$$g'(a_{t+1})=\left(\frac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}-1}\cdot\frac{k-(t+1)a_{t+1}^m}{t}$$

当 $g'(a_{t+1})$ 的值为 0 或不存在时，$a_{t+1}=\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}},\sqrt[m]{k}$.

当 $a_{t+1}=0,\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}},\sqrt[m]{k}$ 时，$g(a_{t+1})$ 的值分别为 $0,\left(\frac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}},0$.

所以当且仅当 $a_{t+1}=\sqrt[m]{\frac{k}{t+1}}$ 时，$g(a_{t+1})$ 取最大值 $\left(\frac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}}$(当 $k>0$,

$k=0$ 时均有此结论成立).

由此也得:当且仅当 $a_{t+1}=\sqrt[m]{\dfrac{k}{t+1}}$ 时,$-g(a_{t+1})$ 取最小值 $-\left(\dfrac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}}$.所以有:

当 $a_{t+1}\geqslant 0$ 时,$\prod\limits_{i=1}^{t+1}a_i$ 的取值范围是$\left[-\left(\dfrac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}},\left(\dfrac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}}\right]$(当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_{t+1}$ 中有奇数个取 $-\sqrt[m]{\dfrac{k}{t+1}}$ 且其余的均取$\sqrt[m]{\dfrac{k}{t+1}}$ 时 $\prod\limits_{i=1}^{t+1}a_i=-\left(\dfrac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}}$,当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_{t+1}$ 中有偶数个取 $-\sqrt[m]{\dfrac{k}{t+1}}$ 且其余的均取 $\sqrt[m]{\dfrac{k}{t+1}}$ 时 $\prod\limits_{i=1}^{t+1}a_i=\left(\dfrac{k}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{m}}$).

② 当 $a_{t+1}<0$ 时,$\prod\limits_{i=1}^{t+1}a_i$ 的取值范围是 $\left[a_{t+1}\left(\dfrac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}},-a_{t+1}\left(\dfrac{k-a_{t+1}^m}{t}\right)^{\frac{t}{m}}\right]$.

同上也可证出以上结论成立.定理5证毕.

本文的定理4,5给出了在条件$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=k(a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R},m,n\in\mathbf{N},m\geqslant 2,n\geqslant 3,k$ 是已知的实数)下,求 $n$ 元函数$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围的结论,求解方法也是一种好方法:用到了减元的方法,也用到了把变量暂时看作常量的方法,这种方法应当是求解多元函数问题的一种重要的好方法.

文献[2]末的后三个猜想分别是:

**猜想2** 若 $a^3+b^3+c^3=3,a,b,c\in\mathbf{R}$,则 $a+b+c\leqslant 3,ab+bc+ca\leqslant 3,abc\leqslant 1$.

**猜想3** 若$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3=n,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant \mathrm{C}_n^1,\sum\limits_{i\neq j}a_ia_j\leqslant \mathrm{C}_n^2,\cdots,\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相同}}}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\leqslant \mathrm{C}_n^k,\cdots,a_1a_2\cdots a_n\leqslant \mathrm{C}_n^n$.

**猜想4** 若条件改为$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=n,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R},m\geqslant 2,m\in\mathbf{N}$,猜想3中的结论还成立吗?

(笔者认为猜想3,4中均应添上条件 $n\geqslant 3$,下同.因为 $n=1,2$时的情形已解决 —— 见文献[1]的定理1.)

由本文的定理4,5知:以上猜想2,3,4中关于$\sum_{i=1}^{n}a_i$及$a_1a_2\cdots a_n$的结论在$m$为奇数时均不成立,在$m$为偶数时均成立,对于猜想2,还有以下反例:

$(a,b,c)=(-1\,000,\sqrt[3]{10^9-61},4)$满足$a^3+b^3+c^3=3$,但$a+b+c>3$;$(a,b,c)=(-2,-1,\sqrt[3]{12})$满足$a^3+b^3+c^3=3$,但$abc>1$.

## 参考文献

[1] 甘志国.用导数研究一个猜想[J].数学通讯,2004(17):39-40.
[2] 崔应宏.对一道不等式习题的再思考[J].数学通讯,2004(3):23-24.

# 二次分式函数值域的两种求法

一般的,都用判别式法求二次分式函数

$$y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}((a^2+b^2)(a^2+d^2)\neq 0) \quad ①$$

的值域,但解答过程往往欠严密,结果有时也不正确.本文将给出两种方法求函数 ① 的值域.主要是先求函数

$$y=\frac{x}{ax^2+bx+c}(ac\neq 0) \quad ②$$

的值域 $E$.

**解法 1** 当 $x=0$ 时 $y=0$,所以只需求函数

$$y=\frac{x}{ax^2+bx+c}(ac\neq 0,x\neq 0 \text{ 且 } ax^2+bx+c\neq 0) \quad ③$$

即

$$y=\frac{1}{ax+\frac{c}{x}+b}(ac\neq 0)$$

的值域 $E^*$.

当 $a>0,c<0$ 时,$u=ax+\frac{c}{x}$ 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 上均是增函数,从而可得 $ax+\frac{c}{x}$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$;所以当 $a<0,c>0$ 时,$ax+\frac{c}{x}$ 的取值范围也是 $\mathbf{R}$.所以:

当 $ac<0$ 时,$ax+\frac{c}{x}$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$,$ax+\frac{c}{x}+b$ 的取值范围也是 $\mathbf{R}$,此时得 $E^*=\mathbf{R}^*$,$E=\mathbf{R}$.

当 $ac>0$ 时,$\left|ax+\frac{c}{x}\right|=|ax|+\left|\frac{c}{x}\right|\geqslant 2\sqrt{|ax|\cdot\left|\frac{c}{x}\right|}=2\sqrt{ac}$,$ax+\frac{c}{x}+b$ 的取值范围是 $(-\infty,b-2\sqrt{ac}]\cup[b+2\sqrt{ac},+\infty)$.

(1) 当 $0<b-2\sqrt{ac}$ 时,$E^*=(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}},+\infty\right)\cup\left(0,\frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]$,$E=\left(-\infty,\frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]\cup\left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}},+\infty\right)$.

(2) 当 $0 = b - 2\sqrt{ac}$ 时,$E^* = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]$, $E = \left(-\infty, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]$.

(3) 当 $b - 2\sqrt{ac} < 0 < b + 2\sqrt{ac}$ 时,$E^* = \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]$, $E = \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]$.

(4) 当 $b + 2\sqrt{ac} = 0$ 时,$E^* = \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $E = \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, +\infty\right)$.

(5) 当 $b + 2\sqrt{ac} < 0$ 时,$E^* = \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, 0\right) \cup \left(-\infty, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right] \cup (0, +\infty)$, $E = \left(-\infty, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right] \cup \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, +\infty\right)$.

从而可得

**定理 1** (1) 当 $ac < 0$ 时,函数 ② 的值域是 $\mathbf{R}$;

(2) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 且 $ac > 0$ 时,函数 ② 的值域是$\left(-\infty, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right] \cup \left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, +\infty\right)$;

(3) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 且 $ac > 0$ 且 $b > 0$ 时,函数 ② 的值域是$\left(-\infty, \frac{1}{2b}\right]$;

(4) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 且 $ac > 0$ 且 $b < 0$ 时,函数 ② 的值域是$\left[\frac{1}{2b}, +\infty\right)$;

(5) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 且 $ac > 0$ 时,函数 ② 的值域是$\left[\frac{1}{b-2\sqrt{ac}}, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right]$.

**解法 2**[1] 同解法 1,主要是求函数 ③ 的值域 $E^*$.

可把式 ③ 等价变形为关于 $x$ 的一元二次方程(因为由 $x \neq 0$ 得 $y \neq 0$):

$$ayx^2 + (by - 1)x + cy = 0 (ac \neq 0, x \neq 0) \qquad ④$$

因为此方程一定有实数根,所以

$$\Delta_x = (by - 1)^2 - 4acy^2 \geqslant 0 \qquad ⑤$$

设关于 $y$ 的不等式 ⑤ 的解集为 $F$,下证 $E^* = F^*$($F^*$ 表示集合 $F$ 中去掉 0 之后剩下的元素组成的集合):

在③中由 $x \neq 0$ 得 $y \neq 0$，③与④等价，④中的每一个 $y$ 均满足⑤，所以 $E^* \subseteq F^*$.

对于⑤中的每一个 $y$(但 $y \neq 0$)，均可在④中求出对应的 $x$ 值，又④与③等价，且对应的 $x$ 值是函数③的定义域中的元素，所以 $F^* \subseteq E^*$，得 $E^* = F^*$，$E = F$，即得

**定理 2** 函数②的值域可用判别式法求出，即先将函数②的解析式变形为 $x$ 的形式上的一元二次方程④，因为此方程一定有实数根，所以⑤成立，并且不等式⑤的解集就是函数②的值域.

读者还可直接证得定理 1,2 是等价的；不等式⑤的解集就是定理 1 的各种情形.

**推论 1** 函数

$$y = \frac{ex + f}{ax^2 + bx + c}\left(ae \neq 0, \frac{ex + f}{ax^2 + bx + c}\text{是即约分式}\right) \qquad ⑥$$

的值域可用判别式法求出，即先将函数⑥的解析式变形为 $x$ 的形式上的一元二次方程，其判别式 $\Delta_x = h(y) \geqslant 0$ 的解集就是函数⑥的值域.

**证明** 先将函数⑥的图象向右平移 $\frac{f}{e}$ 个单位，得到的函数图象的解析式为

$$y_1 = \frac{x}{\frac{a}{e}\left(x - \frac{f}{e}\right)^2 + \frac{b}{e}\left(x - \frac{f}{e}\right) + \frac{c}{e}} = \frac{x}{a'x^2 + b'x + c'}(a' \neq 0) \qquad ⑦$$

由 $\frac{ex + f}{ax^2 + bx + c}$ 是即约分式可知⑦中的 $\frac{x}{a'x^2 + b'x + c'}$ 也是即约分式(因为图象平移后形状不变)，所以 $c' \neq 0$，由定理 2 知函数⑦的值域可用判别式法求出，从而函数⑥的值域也可用判别式法求出.

**推论 2** 函数 $y = \frac{dx^2 + ex + f}{ax^2 + bx + c}\left(a \neq 0, ae \neq bd, \frac{dx^2 + ex + f}{ax^2 + bx + c}\right.$ 是即约分式) 的值域可用判别式法求出(方法同推论 1).

**证明** 可将函数 $y$ 等价变形为

$$y = \frac{d}{a} + \frac{(ae - bd)x + af - cd}{a^2x^2 + abx + ac}\left(a^2(ae - bd) \neq 0,\right.$$

$$\left.\frac{(ae - bd)x + af - cd}{a^2x^2 + abx + ac}\text{是即约分式}\right).$$

再由推论 1 得推论 2 成立.

**例 1** (文献[2]的例 2)求函数 $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 1}$ 的值域.

**解** 由推论 2 知，可用判别式法来求.

先将原函数变形为

$$(y-1)x^2+(3y+1)x+(y+2)=0$$

因为 $x\in\mathbf{R}$,所以

$$\Delta_x=(3y+1)^2-4(y-1)(y+2)=5y^2+2y+9\geqslant 0$$

得 $y\in\mathbf{R}$,所以所求函数的值域也是 $\mathbf{R}$.

**注** 形如 $y=\dfrac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 的函数值域除推论 2 外的情形容易求出.

**例 2** 求函数 $y=\dfrac{3x^2+19x+47}{2x^2+12x+30}$ 的值域.

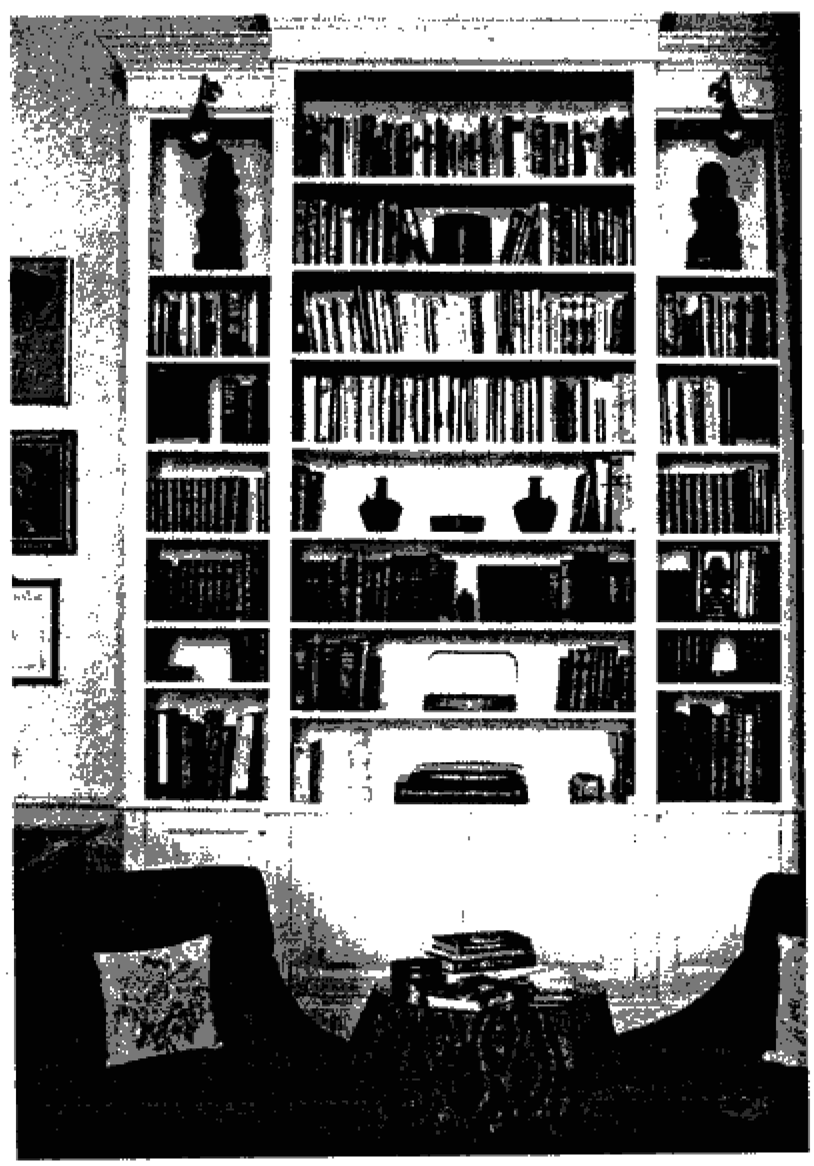
**解** 由推论 2 容易求得答案为 $\left[\dfrac{35-\sqrt{7}}{24},\dfrac{35+\sqrt{7}}{24}\right]$.

例 2 即文献[3] 的例 4,但文献[3] 的解答有误.文献[1] 还指出了文献[3] 的其他错误.

## 参考文献

[1] 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.
[2] 李金峰.判别式法求一类函数的值域[J].数学通讯,2003(14,16):13-14.
[3] 胡长江.求函数 $af(x+m)+c$ 型的值域[J].数学通讯,2003(2,4):6-7.

# 数　列



# $\{R(n^m)\}$的周期性

本文研究一类正整数列(各项都是正整数的数列)的周期性.

把正整数 $N$ 的各位数字相加得 $N_1$,再把 $N_1$ 的各位数字相加得 $N_2$,… 直至得到一位数 $N_k$ 止.我们定义 $R(N) = N_k$,如 $R(319) = 4$.

显然 $N \equiv R(N) \pmod 9$.

**定理 1** 若 $A, B$ 是正整数,$A \equiv B \pmod 9$,则 $R(A) = R(B)$.

**证明** 因为 $A \equiv R(A)$,$B \equiv R(B)$,又 $A \equiv B \pmod 9$.

所以 $$R(A) \equiv R(B) \pmod 9$$

又 $R(A)$,$R(B)$ 都是一位数,所以 $R(A) = R(B)$.

**定理 2** 若 $m, n \in \mathbf{N}^*$,$m \geqslant 2$,$k, l \in \mathbf{N}$,则 $R((9k+n)^{6l+m}) = R(n^m)$.

**证明** $n^{6l+m} - n^m = n^m(n^{6l-1})$.

当 $n = 3t$ 时,因为 $m \geqslant 2$,所以 $9 \mid n^m$;

当 $n = 3t \pm 1$ 时,$9 \mid (n^{6l} - 1)$.

所以对于全部正整数 $n$,有 $9 \mid n^m(n^{6l} - 1)$.

$$n^{6l+m} \equiv n^m \pmod 9$$

$$(9k+n)^{6l+m} \equiv n^m \pmod 9$$

$$R((9k+n)^{6l+m}) = R(n^m)$$

**定理 3** (1) 数列$\{R(n^m)\}$是周期数列;

(2) 数列$\{R(n^m)\}$($m$ 为不小于 2 的正整数)是周期数列.

**证明** (1) 数列$\{R(n^m)\}$:$R(n^2), R(n^3), \cdots, R(n^m), \cdots$ 因为

$$R(n^{m+6}) = R(n^m)$$

所以$\{R(n^m)\}$是以 6 为一个周期的周期数列.

(2) 因为 $R((n+9)^m) = R(n^m)$,所以$\{R(n^m)\}$是以 9 为一个周期的周期数列.实际上,$\{R(n)\}$的周期也是 9.

# 两类递推数列通项的求法

文献[1]用待定系数法求出了由递推式

$$a_{n+1}=\frac{ca_n+d}{aa_n+b}$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项公式(只要方程$ax^2+(b-c)x-d=0$有根(包括复数根),都可用文献[1]的方法求解;若无根,则$a=0,b=c,d\neq 0$,得$\{a_n\}$是等差数列.文献[1]中对数列$\{a_n\}$的各项取倒数时,应要求$a_n\neq 0(n\in\mathbf{N}^*)$).

受文献[1]的启发,笔者研究了由递推式

$$a_{n+1}=\frac{ca_n^2+da_n+e}{aa_n+b}$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项的求法,只解决了其中的两种情形.

## 1 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+d}{2a_n+b}$ 型

(1) 当$a_1^2+ba_1-d=0$时,$a_n=a_1$.

用数学归纳法证明如下:

1) $n=1$时成立:$a_1=a_1$.

2) 假设$n=k$时成立,$a_k=a_1$.

得$a_{k+1}=\dfrac{a_k^2+d}{2a_k+b}=\dfrac{2a_1^2+ba_1}{2a_1+b}$(因为$d=a_1^2+ba_1$)$=a_1$,即$n=k+1$时也成立,所以要证结论成立.

(2) 当$a_1^2+ba_1-d\neq 0$时,设$a_n=b_n+t$,其中$t$满足

$$t^2+bt-d=0$$

因为$a_1^2+ba_1-d\neq 0$,所以$t\neq a_1$,由$a_1=b_1+t$知,$b_1\neq 0$.

将$a_n=b_n+t$,代入$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+d}{2a_n+b}$,得

$$b_{n+1}=\frac{b_n^2}{2b_n+b'}\text{(其中 }b'=b+2t\text{)}$$

由$b_1\neq 0$,可用数学归纳法证得$b_n\neq 0$.所以

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{b_n} + \frac{b'}{b_n^2}$$

设$\frac{1}{b_n} = c_n$,得

$$c_{n+1} = 2c_n + b'c_n^2$$
$$b'c_{n+1} + 1 = (b'c_n + 1)^2$$

所以数列$\{b'c_n + 1\}$的各项都是前一项的平方,得

$$b'c_n + 1 = (b'c_1 + 1)^{2^{n-1}}$$

进而求得 $a_n = \dfrac{b + 2t}{\left(\dfrac{a_1 + b + t}{a_1 - t}\right)^{2^{n-1}} - 1}$(其中 $t$ 满足 $t^2 + bt - d = 0$).

**2** $a_{n+1} = aa_n^2 + ba_n + \dfrac{b^2 - 2b}{4a}$ **型**

得

$$aa_{n+1} + \frac{b}{2} = (aa_n + \frac{b}{2})^2$$
$$aa_n + \frac{b}{2} = (aa_1 + \frac{b}{2})^{2^{n-1}}$$
$$a_n = \frac{1}{a}(aa_1 + \frac{b}{2})^{2^{n-1}} - \frac{b}{2a}$$

# 参考文献

[1] 包志秀.妙求 $a_n = \frac{c \cdot a_{n-1} + d}{a \cdot a_{n-1} + b}$ 的通项[J].数学通讯,2006(9):19-20.

# 两个和式的求法

文献[1]给出了以下问题及其答案：

**问题**　有一个楼梯共有 $n$ 级，如果规定每一步只能走 1 级或者 2 级，那么要登上第 $n$ 级楼梯共有多少种不同的走法？

答案：当 $n$ 为奇数时，走法有 $C_{\frac{n+1}{2}}^{1}+C_{\frac{n+3}{2}}^{3}+C_{\frac{n+5}{2}}^{5}+\cdots+C_{\frac{n+n}{2}}^{n}$ 种，当 $n$ 为偶数时，走法有 $C_{\frac{n}{2}}^{0}+C_{\frac{n+2}{2}}^{2}+C_{\frac{n+4}{2}}^{4}+\cdots+C_{\frac{n+n}{2}}^{n}$ 种.

下面我们来求出这两个和式的结果.

对一切 $k\in\mathbf{N}^*$，记 $A_k=C_k^1+C_{k+1}^3+C_{k+2}^5+\cdots+C_{2k-1}^{2k-1}$，则 $A_1=1,A_2=3,A_3=8,\cdots$

记 $B_k=C_k^0+C_{k+1}^2+C_{k+2}^4+\cdots+C_{2k-1}^{2k-2}+C_{2k}^{2k}$，则 $B_1=2,B_2=5,B_3=13,\cdots$

显然，原问题的答案分别为 $A_{\frac{n+1}{2}}$ 和 $B_{\frac{n}{2}}$.

**定理 1**　$A_k+B_k=A_{k+1}$.（用 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$ 可证）

**定理 2**　$A_{k+2}=3A_{k+1}-A_k$.

**证明**　
$$\begin{aligned}3A_{k+1}-A_k=&3C_{k+1}^1+3C_{k+2}^3+3C_{k+3}^5+\cdots+3C_{2k}^{2k-1}+3C_{2k+1}^{2k+1}-C_k^1-\\&C_{k+1}^3-C_{k+2}^5-\cdots-C_{2k-1}^{2k-1}=\\&2(C_{k+1}^1+C_{k+2}^3+C_{k+3}^5+\cdots+C_{2k-1}^{2k-1})+C_k^0+C_{k+1}^2+\\&C_{k+2}^4+\cdots+C_{2k-1}^{2k-2}+C_{2k}^{2k}=\\&C_{k+1}^1+C_{k+2}^3+C_{k+3}^5+\cdots+C_{2k+1}^{2k+1}+C_k^0+C_{k+2}^2+\\&C_{k+3}^4+\cdots+C_{2k+1}^{2k}+C_{2k+2}^{2k+2}=\\&A_{k+1}+B_{k+1}=A_{k+2}(\text{用定理 1}).\end{aligned}$$

由定理 1，定理 2 易得

**定理 3**　$B_{k+2}=3B_{k+1}-B_k$.

**定理 4**　$A_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$.

**证明**　由定理 2，得

$$A_{k+2}-xA_{k+1}=(3-x)\left(A_{k+1}-\frac{A_k}{3-x}\right)$$

令 $x=\frac{1}{3-x}$，得 $x^2-3x+1=0$.

所以选 $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，得 $\left\{A_{k+1}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}A_k\right\}$ 是首项为 $A_2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}A_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，公比为 $3-x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 的等比数列，所以

$$A_{k+1}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}A_k=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

得

$$\frac{A_{k+1}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k}-\frac{A_k}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

设 $\frac{A_k}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}=A'_k$，得

$$\begin{aligned}A'_k=&(A'_k-A'_{k-1})+(A'_{k-1}-A'_{k-2})+\cdots+(A'_2-A'_1)+A'_1=\\&\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}+\cdots+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+1=\\&\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left[1-\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\ (k\geqslant 2\text{ 时})\end{aligned}$$

可以验证：$k\in\mathbf{N}^*$ 时，均有

$$A'_k=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left[1-\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

所以

$$A_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

由定理1，定理4易得

**定理5** $B_k=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k$

## 参考文献

[1] 庞景生.上楼梯问题的一种解法及推广[J].数学通讯,2006(14,16):21.

# “分班数阵”的通项

“学生”的“成绩”依次是1,2,3,…,$m$,…,通常要分成$k$个班,应用如下“往复”法:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2k & 2k+1 & 4k & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ 2 & 2k-1 & 2k+2 & 4k-1 & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ k-1 & k+2 & 3k-1 & 3k+2 & \cdots & a_{k-1,j} & \cdots \\ k & k+1 & 3k & 3k+1 & \cdots & a_{kj} & \cdots \end{bmatrix} \quad ①$$

以 $a_{ij}(i=1,\cdots,k;j=1,2,\cdots)$ 表示第$i$班第$j$个学生原来的名次.先看 $k=3$ 的情形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 12 & 13 & \cdots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \cdots \\ 3 & 4 & 9 & 10 & 15 & \cdots \end{bmatrix}$$

易见,$a_{2j}=3j-1$,$a_{1j}=3j-1+(-1)^j$,$a_{3j}=3j-1-(-1)^j$(可以写成 $a_{ij}=3j-1+(-1)^j(2-i)$).同样可求得 $k=2l-1$ 时

$$a_{ij}=(2l-1)j-l+1+(-1)^j(l-i) \quad (i=1,2,\cdots,2l-1)$$

对于 $k=4$ 的情形,设一个辅助第3行:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ 2 & 7 & 10 & 15 & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ 2.5 & 6.5 & 10.5 & 14.5 & \cdots & a_{2.5j} & \cdots \\ 3 & 6 & 11 & 14 & \cdots & a_{3j} & \cdots \\ 4 & 5 & 12 & 13 & \cdots & a_{4j} & \cdots \end{bmatrix}$$

$a_{2.5j}=4j-\frac{3}{2}$ 是添上去的,但由它可求出 $a_{2j}=4j-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^j$,$a_{1j}=4j-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(-1)^j$,$a_{3j}=4j-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1)^j$,$a_{4j}=4j-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}(-1)^j$.

一般的,当 $k=2l$ 时

$$a_{ij}=2lj-l+\frac{1}{2}+(-1)^j\left(l-i+\frac{1}{2}\right)(i=1,2,\cdots,2l)$$

综合两个公式,得

**定理**　"分班数阵"① 的通项公式为

$$a_{ij}=kj-\frac{k-1}{2}+\left(\frac{k+1}{2}-i\right)(-1)^{j}\quad (k,i,j\in \mathbf{N}^{*},i\leqslant k)$$

我们还研究并解决了已知 $a_{ij}$ 及 $k$,求 $i,j$ 的值的问题:

$$\begin{cases} i=\dfrac{1}{2}[k+1-(-1)^{j}(2a_{ij}-2kj+k-1)] \\ j=\dfrac{2a_{ij}+k-1}{2k} \end{cases}$$

# 古代数列趣题二则

1. 今有女善织，日益功，疾. 初日织五尺，今一月日织九匹三丈. 问日益几何?(选自《张邱建算经》)

**今译** 有一女子善于织布，织得很快，织的尺数逐日增多. 已知她某月的第一天织布5尺，一个月共织9匹3丈(1匹 = 40尺)，问这女子平均每天多织多少布?

**解** 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1 = 5, n = 30, S_n = 390$，求$d$.

$$390 = 30 \times 5 + \frac{1}{2} \times 30 \times 29d$$

$$d = \frac{16}{29}\text{尺}$$

答：这女子平均每天多织$\frac{16}{29}$尺.

2. 今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何?(选自《九章算术》)

**今译** 有一女子善于织布，每天织的都是前一天的2倍，已知她5天共织布5尺，问这女子每天分别织布多少?

**解** 在等比数列$\{a_n\}$中，$q = 2, n = 5, S_n = 5$，求$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

$$S_5 = a_1(2^5 - 1) = 31a_1 = 5$$

$$a_1 = \frac{5}{31}\text{尺}, a_2 = \frac{10}{31}\text{尺}, a_3 = \frac{20}{31}\text{尺}, a_4 = \frac{40}{31}\text{尺}, a_5 = \frac{80}{31}\text{尺}$$

从以上两例可看出，我国古算题中有数列求和问题. 我国古代人民在数学领域里的贡献为世界数学史谱写了光辉的篇章，现代中学生更应勤奋学习，努力拼搏，使中国的现代文明早日达到世界领先地位.

## 参考文献

[1] 李逢平. 中国古算题选题[M]. 北京：科学普及出版社，1985.

# 用验证法求数列通项两例

本文通过两道高考题介绍求数列通项公式的一种简单方法——验证法.

**题 1**　(2007年陕西理22题)已知各项全不为零的数列$\{a_k\}$的前$k$项和为$S_k$,且$S_k=\frac{1}{2}a_ka_{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$,其中$a_1=1$.

(1)求数列$\{a_k\}$的通项公式;(2)略.

**解**　(1)由题设得$a_{k+1}=\frac{2S_k}{a_k}=\frac{2(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{a_k}$,所以,当$a_1,a_2,\cdots,a_k$确定时,$a_{k+1}$也唯一确定.所以,由$a_1=1$知数列$\{a_k\}$是唯一确定的.

可以观察出$a_k=k$满足题设的所有条件,故数列$\{k\}$是满足题设的唯一数列,得$a_k=k$.

**另解**　(1)$2S_k=a_ka_{k+1}=(S_k-S_{k-1})(S_{k+1}-S_k)(k\geqslant 2)$,$S_{k+1}=\frac{2S_k}{S_k-S_{k-1}}+S_k$(因为$S_k-S_{k-1}=a_k\neq 0$)$(k\neq 2)$　①

由题设得$S_1=1,S_2=3$,再由①知$\{S_k\}$是唯一确定的数列$\left(a_k=\begin{cases}S_1, & k=1\\ S_k-S_{k-1}, & k\geqslant 2\end{cases}\right)$.再同上得$a_k=k$.

**题 2**　(2005年江苏卷23题)设数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$,已知$a_1=1$,$a_2=6$,$a_3=11$,且$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B(n\in\mathbf{N}^*)$,其中$A,B$为常数.

(1)求$A$与$B$的值;

(2)证明数列$\{a_n\}$为等差数列;

(3)略.

**解**　(1)据题设,得$A=-20,B=-8$.

(2)$S_{n+1}=\frac{5n+2}{5n-8}S_n-\frac{20n+8}{5n-8}(n\in\mathbf{N}^*)$,$S_1=1$.　②

所以$\{S_n\}$是唯一确定的数列,$\{a_n\}$也是唯一确定的数列.

又由 $a_1=1, a_2=6, a_3=11$ 知，若 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_n=5n-4$，于是 $S_n=\frac{1}{2}n(5n-3)$.

在此容易验证 $S_n=\frac{1}{2}n(5n-3)$ 满足②，所以题中的 $S_n=\frac{1}{2}n(5n-3)$，$a_n=5n-4$，$\{a_n\}$ 为等差数列.

# 从已知的等差数列中选出一些项重新组成等差(比)数列个数的问题

文献[1]研究了“从 1,2,…,$n$ 中选出一些不同的数,使它们成等差(比)数列,共有多少种取法”的问题.笔者认真拜读后,对文献[1]作者的教育思想及解题方法由衷的赞叹;但在仔细研读后,又发现了文献[1]在审题及解题过程中的疏漏,本文将指出这些错误,并提出一些一般性的问题供读者研究.

**题 1** (文献[1]第一道题,即试卷上的一道选择题)从 1,2,…,10 这 10 个数中,任取 3 个不同的数,则这三个数恰成等差数列的概率为(　　)

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{3}{4}$

**文献[1]的解法**　公差为 1,2,3,4 的等差数列分别有 8,6,4,2 个,所以满足题意的等差数列共有 20 个.

所求概率为$\frac{20}{C_{10}^3}$,选 A.

**正确解法**　数列的项是有顺序的,所以取出的 3 个数有顺序.

任意取出 3 个数,有 $A_{10}^3$ 种取法,文献[1]解法中得到的等差数列的反序也是等差数列,所以共有 40 个不同的等差数列.

所求概率为$\frac{40}{A_{10}^3}=\frac{1}{18}$,无正确选项,原题是一道错题.

**注**　若将题 1 中的“恰成等差数列”改为“能成等差数列”,则文献[1]的解法正确.

**题 2** (文献[1]问题(1))从 1,2,3,…,100 这 100 个数中任取 3 个不同的数,使它们成等差数列,共有多少种取法?

**正确解法**　同文献[1]的解法,得

公差只能为 1,2,3,…,49,且相应的等差数列分别有 98,96,94,…,2 个.

因为它们的反序也是等差数列,且这些等差数列互不相同,再没有别的符合题意的等差数列,所以共有 $2(2+4+6+\cdots+98)=4\ 900$ 种取法.

**题 3** (文献[1]问题(2))从 1,2,3,…,100 这 100 个数中任取 4 个不同的数,使它们成等差数列,共有多少种取法?

文献[1]的答案为 $1+4+7+\cdots+97=1\ 517$ 种.实际上,正确答案应为

$1\ 517\times 2=3\ 034$ 种.

**题 4** (文献[1] 问题(3)) 从 $1,2,3,\cdots,100$ 这 100 个数中任取 3 个不同的数,使它们成等比数列,共有多少种取法?

**文献[1] 的解法** 设所取 3 个数为 $a,aq,aq^2$. 由 $aq^2\leqslant 100$,得 $q=2,3,\cdots,10$.

$q=2$ 时,$a\leqslant 25$;$q=3$ 时,$a\leqslant 11$;$q=4$ 时,$a\leqslant 6$;

$q=5$ 时,$a\leqslant 4$;$q=6$ 时,$a\leqslant 2$;$q=7$ 时,$a\leqslant 2$;

$q=8$ 时,$a=1$;$q=9$ 时,$a=1$;$q=10$ 时,$a=1$.

所以共有 53 种取法.

**正确解法** 设所取 3 个数依次为 $a,aq,aq^2$,则 $0<q<1$ 或 $q>1$.

先看 $q>1$ 的情形. 又分 $q$ 是正整数和正分数两种情形.

文献[1] 已求出:$q$ 是正整数时,共 53 种取法;下面再看 $q$ 是正分数的情形.

因为 $q>1$,所以可设 $q=\frac{v}{u}(u,v\in \mathbf{N}^*,v>u\geqslant 2,(u,v)=1)$.

由 $aq^2=\frac{av^2}{u^2}(aq^2\in \mathbf{N}^*)$,得 $u^2\mid a$,可设 $a=a'u^2$,所取 3 个数为 $a'u^2$,$a'uv,a'v^2$.

由 $a'u'<100$,得 $u\leqslant 9$;由 $a'v^2\leqslant 100$,得 $v\leqslant 10$.

(1) 当 $u=2$ 时,得 $v=3,5,7,9$.

①$v=3$,得 $q=\frac{3}{2}$. 由 $a'v^2=9a'\leqslant 100$,得 $a'\leqslant 11$,此时共有 11 种取法;

②$v=5$,得 $q=\frac{5}{2}$. 由 $a'v^2=25a'\leqslant 100$,得 $a'\leqslant 4$,此时共有 4 种取法;

③$v=7$,得 $q=\frac{7}{2}$. 由 $a'v^2=49a'\leqslant 100$,得 $a'\leqslant 2$,此时共有 2 种取法;

④$v=9$,得 $q=\frac{9}{2}$. 由 $a'v^2=81a'\leqslant 100$,得 $a'=1$,此时共有 1 种取法.

此时共有 $11+4+2+1=18$ 种取法.

(2) 当 $u=3$ 时,得 $v=4,5,7,8,10$,进而得 $q=\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{10}{3}$,且分别有 6,4,2,1,1 种取法. 所以此时共有 14 种取法.

(3) 当 $u=4$ 时,得 $v=5,7,9$,进而得 $q=\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}$,且分别有 4,2,1 种取法,所以此时共有 7 种取法.

(4) 当 $u=5$ 时,得 $v=6,7,8,9$,进而得 $q=\frac{6}{5},\frac{7}{5},\frac{8}{5},\frac{9}{5}$,且分别有 2,2,1,1 种取法. 所以此时共有 6 种取法.

(5) 当 $u=6$ 时,得 $v=7,q=\frac{7}{6}$,且有 2 种取法.

(6) 当 $u=7$ 时,得 $v=8,9,10$,进而得 $q=\frac{8}{7},\frac{9}{7},\frac{10}{7}$,且均有1种取法,所以此时共有3种取法.

(7) 当 $u=8$ 时,得 $v=9,q=\frac{9}{8}$,且有1种取法.

(8) 当 $u=9$ 时,得 $v=10,q=\frac{10}{9}$,且有1种取法.

所以 $q$ 为大于1的分数时,共有 $18+14+7+6+2+3+1+1=52$ 种取法.

得 $q>1$ 时的取法为 $53+52=105$ 种取法,所有的取法为 $105\times2=210$ 种.

**题5**　(文献[1]问题(4))从 $1,2,3,\cdots,100$ 这100个数中任取4个不同的数,使它们成等比数列,共有多少种取法?

**正确解法**　设所取4个数依次为 $a,aq,aq^2,aq^3$.

先看 $q>1$ 的情形,若 $q\in\mathbf{N}^*$,文献[1]已求出:为16种取法.(文献[1]第19页右栏第七行中的"$\left[\frac{100}{64}\right)$"应改为"$\left[\frac{100}{64}\right]$")

若 $q$ 为大于1的分数,可设 $q=\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{N}^*,v>u\geqslant2,(u,v)=1)$.

由 $aq^3=\frac{av^3}{u^3}(aq^3\in\mathbf{N}^*)$,得 $u^3\mid a$,可设 $a=a'u^3$,所取四个数为 $a'u^3$, $a'u^2v,a'uv^2,a'v^3$.

由 $a'u^3<100$,得 $u\leqslant4$;由 $a'v^3\leqslant100$,得 $v\leqslant4$.又由 $v>u\geqslant2,(u,v)=1$ 知 $u=2,3$.

(1) 当 $u=2$ 时,得 $v=3,q=\frac{3}{2}$,由 $a'v^3=27a'\leqslant100$,得 $a'\leqslant3$,此时共有3种取法;

(2) 当 $u=3$ 时,得 $v=4,q=\frac{4}{3}$,由 $a'v^3=64a'\leqslant100$,得 $a'=1$,所以此时共有1种取法:27,36,48,64.

所以 $q$ 为大于1的分数时,共有 $3+1=4$ 种取法.

得 $q>1$ 时的取法为 $16+4=20$ 种.所有的取法为 $20\times2=40$ 种.

**题6**　(文献[1]问题($A$))从 $1,2,3,\cdots,n$ 这 $n$ 个数中任取 $k(k\geqslant3)$ 个不同的数,使它们成等差数列,共有多少种取法?

**正确解法**　设所取的 $k$ 个数依次为 $a,a+d,a+2d,\cdots,a+(k-1)d$.有 $d\in\mathbf{N}^*$(即非零整数集).

当 $d=1$ 时,由 $a+(k-1)d=a+(k-1)\leqslant n$,得 $a\leqslant n-(k-1)$,此时共有 $n-(k-1)$ 种取法;

当 $d=2$ 时,共有 $n-2(k-1)$ 种取法;

当 $d=3$ 时,共有 $n-3(k-1)$ 种取法;

$\vdots$

最后,由 $1+(k-1)d\leqslant n$,得 $d$ 的最大值为 $\left[\frac{n-1}{k-1}\right]$ ($\left[\frac{n-1}{k-1}=m\right]$)(这里"[ ]"表示取整,下同),当 $d=m$ 时,共有 $n-m(k-1)$ 种取法.

所以 $d\in\mathbf{N}^*$ 时,共有 $\frac{1}{2}m[2n-(k-1)(m+1)]$ 种取法.(文献[1]第19页右栏倒数第十行中的"$\frac{[2n-(k-1)(m-1)]m}{2}$"应改为"$\frac{[2n-(k-1)(m+1)]m}{2}$"),所以答案为 $m[2n-(k-1)(m+1)]$,其中 $m=\left[\frac{n-1}{k-1}\right]$.

**题7** (文献[1]问题(B))从 $1,2,3,\cdots,n$ 这 $n$ 个数中任取 $k(k\geqslant 3)$ 个不同的数,使它们成等比数列,共有多少种取法?

从题4,题5的正确解法来看,要解决题7是有难度的,但结合文献[1]的解法可得:

从 $1,2,3,\cdots,n$ 这 $n$ 个数中任取 $k(k\geqslant 3)$ 个不同的数,使它们成为公比为正整数的等比数列,共有 $\sum_{i=2}^{m}\left[\frac{n}{i^{k-1}}\right]$ 种取法,其中 $m=\sqrt[k-1]{n}$(恳请读者能求出这里的和式).

**正确解法** 设所取 $k$ 个数依次为 $a,aq,aq^2,\cdots,aq^{k-1}$.

先看 $q>1$ 的情形.得 $q\in\mathbf{Q}$,所以可设 $q=\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{N}^*,v>u,(u,v)=1)$.

由 $aq^{k-1}=\frac{av^{k-1}}{u^{k-1}}(aq^{k-1}\in\mathbf{N}^*)$,得 $u^{k-1}\mid a$,可设 $a=a'u^{k-1}(a'\in\mathbf{N}^*)$,所取 $k$ 的个数为 $a'u^{k-1},a'u^{k-2}v,a'u^{k-3}v^2,\cdots,a'v^{k-1}$.

得 $a'v^{k-1}\leqslant n,a'\leqslant\left[\frac{n}{v^{k-1}}\right]$,即 $a'$ 有 $\left[\frac{n}{v^{k-1}}\right]$ 种取法,所以 $a=a'v^{k-1}$ 也有 $\left[\frac{n}{v^{k-1}}\right]$ 种取法.

显然,$u$ 有 $\varphi(v)$ 种取法,其中 $\varphi(v)$ 是 Euler 函数,表示 $1,2,\cdots,v$ 中与 $v$ 互素的数的个数,设 $v$ 的标准分解式为 $v=\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$a_i\in\mathbf{N}^*$),则 $\varphi(v)=v\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

所以当 $v$ 固定时,$k$ 共有 $\left[\frac{n}{v^{k-1}}\right]\varphi(v)$ 种取法.

因为 $v \geq 2$,所以满足 $q > 1$ 的 $k$ 共有 $\sum_{v=2}^{+\infty}\left[\frac{n}{v^{k-1}}\right]\varphi(v)$ 种取法.

再来看 $0 < q < 1$ 的情形.得 $q \in \mathbf{Q}$,所以可设 $q = \frac{v}{u}(u,v \in \mathbf{N}^*, u > v, u \geq 2,(u,v) = 1)$.

由 $aq^{k-1} = \frac{av^{k-1}}{u^{k-1}}(aq^{k-1} \in \mathbf{N}^*)$,得 $u^{k-1} \mid a$,可设 $a = a'u^{k-1}(a' \in \mathbf{N}^*)$,所取 $k$ 个数为 $a'u^{k-1}, a'u^{k-2}v, a'u^{k-3}v^2, \cdots, a'v^{k-1}$.

得 $a'u^{k-1} \leq n, a' \leq \left[\frac{n}{u^{k-1}}\right]'$,即 $a'$ 有 $\left[\frac{n}{u^{k-1}}\right]$ 种取法,所以 $a = a'u^{k-1}$ 也有 $\left[\frac{n}{u^{k-1}}\right]$ 种取法.

显然,$v$ 有 $\varphi(u)$ 种取法,其中 $\varphi(u)$ 是 Euler 函数,表示 $1,2,\cdots,u$ 中与 $u$ 互素的数的个数.

所以当 $u$ 固定时,$k$ 共有 $\left[\frac{n}{u^{k-1}}\right]\varphi(u)$ 种取法.

因为 $u \geq 2$,所以满足 $0 < q < 1$ 的 $k$ 共有 $\sum_{u=2}^{+\infty}\left[\frac{n}{u^{k-1}}\right]$ 种取法.

所以取法共有 $2\sum_{u=2}^{+\infty}\left[\frac{n}{u^{k-1}}\right]\varphi(u)$ 种.(恳请读者能求出这里的和式)

笔者再提出:

**问题 1** 从公差为 $d(d \neq 0)$ 的等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中任取不同的 $k(k \geq 3)$ 项,使它们成等差数列,共有多少种取法?

**问题 2** 从公差为 $d(d \neq 0)$ 的等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中任取不同的 $k(k \geq 3)$ 项,使它们成等比数列,共有多少种取法?

**问题 3** 从公比为 $q(q \neq 1)$ 的等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中任取不同的 $k(k \geq 3)$ 项,使它们成等差数列,共有多少种取法?

**问题 4** 从公比为 $q(q \neq 1)$ 的等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中任取不同的 $k(k \geq 3)$ 项,使它们成等比数列,共有多少种取法?

**问题 1 的解决** 所给数列的通项公式为

$$a_i = a_1 + (i-1)d(1 \leq i \leq n)$$

设 $a'_i = \frac{a_i - a_1}{d} + 1$,得 $a'_i = i(1 \leq i \leq n)$.

所以 $\{a_i\}$ 中的一个 $k$ 项等差数列与 $\{a'_i\}$ 中的一个 $k$ 项等差数列是一一对应的.

所以问题 1 的答案即题 6 的答案为 $m[2n - (k-1)(m+1)]$,其中 $m =$

$\left[\frac{n-1}{k-1}\right]$.

**问题4的解决** 容易证明:

若$\{a_i\}$是公比不为1的等比数列,则$a_u, a_v, a_w$成等比数列$\Leftrightarrow u, v, w$成等差数列.

由此立得,问题4的答案就是问题1的答案.

恳请读者能尽早解决问题2和问题3.

## 参考文献

[1]胡如松.小题大做·培养能力——一堂未按原计划进行教学的课[J].数学通报,2007(4):18-19.

# 一道课本例题结论的推广

全日制普通高中教科书(必修)《数学·第一册(上)》第128页的例4是:

“已知 $S_n$ 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,$S_3,S_9,S_6$ 成等差数列,求证 $a_2,a_8,a_5$ 成等差数列.”

观察此题,我们知道“$S_3,S_9,S_6$”与“$a_2,a_8,a_5$”的下标不一致,且下标“3,9,6”与“2,8,5”是摆动的.我们若能深入思考,便可得到如下结论:

**定理** 设 $S_n$ 是公比 $q\neq 1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,则 $S_k,S_l,S_m(k,l,m\in\mathbf{N}^*)$ 成等差数列 $\Leftrightarrow$ 存在整数 $t$ 使 $a_{k+t},a_{l+t},a_{m+t}(k+t,l+t,m+t\in\mathbf{N}^*)$ 成等差数列.

**证明** 充分性.因为 $a_{k+t},a_{l+t},a_{m+t}$ 成等差数列,即 $a_kq^t,a_lq^t,q_mq^t$ 成等差数列,所以 $a_k,a_l,a_m$ 成等差数列.由此可证得 $\frac{a_1-a_kq}{1-q},\frac{a_1-a_lq}{1-q},\frac{a_1-a_mq}{1-q}$ 成等差数列,即 $S_k,S_l,S_m$ 成等差数列.

必要性.由 $S_k,S_l,S_m$ 成等差数列,即 $\frac{a_1-a_kq}{1-q},\frac{a_1-a_lq}{1-q},\frac{a_1-a_mq}{1-q}$ 成等差数列,可证得 $a_k,a_l,a_m$ 成等差数列,即存在整数 $t=0$ 使 $a_{k+t},a_{l+t},a_{m+t}$ 成等差数列.

理解一个结论的本质就是发现该结论的推广.

# 国家公务员考试中的数列趣题

笔者近日翻阅了新编公务员录用考试全国统编教材《行政职业能力测验》(周盈主编,2007年6月中国铁道出版社)一书,其中第65～78页讲述的都是找数列的项的规律的题.国家对公务员在数列方面都有较高要求,我们高一学生更是要把"第三章——数列"学好.下面列举的这些考题初看有些怪异,但做完之后会发现可以很好的培养我们的观察能力乃至深刻的洞察能力,和对数字的良好感觉及发现事物之间的联系,寻找规律的能力.

## 1 等差数列及其变式

**例1** 2,5,8,(　　),14,17

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

**解** 由等差数列知选B.

**例2** 2,6,12,20,30,(　　)

A.38　　B.42　　C.48　　D.56

**解** 设该数列的通项是$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$(下同),得

$$\{a_{n+1}-a_n\}:4,6,8,10$$

是等差数列(此时数列$\{a_n\}$叫做二阶等差数列),从而知选B.

## 2 等比数列及其变式

**例3** 3,9,27,81,(　　)

A.243　　B.342　　C.433　　D.135

**解** 由等比数列知选A.

**例4** 8,8,12,24,60,(　　)

A.90　　B.120　　C.180　　D.240

**解** 由$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$:1,1.5,2,2.5是等差数列,知选C.

**例5** 8,14,26,50,(　　)

A.76　　B.98　　C.100　　D.104

**解** 由$a_{n+1}=2a_n-2$知选B.

## 3 双重数列

**例 6**　257,178,259,173,261,168,263,(　　)

A.275　　B.279　　C.164　　D.163

**解**　$\{a_{2n-1}\}$与$\{a_{2n}\}$均是等差数列,从而知选 D.

**例 7**　1,3,3,5,7,9,13,15,(　　),(　　)

A.19,21　　B.19,23　　C.21,23　　D.27,30

**解**　$\{a_{2n-1}\}$与$\{a_{2n}\}$均是二阶等差数列,从而知选 C.

## 4 等差数列与等比数列的混合

**例 8**　5,4,10,8,15,16,(　　),(　　)

A.20,18　　B.18,32　　C.20,32　　D.18,32

**解**　$\{a_{2n-1}\}$与$\{a_{2n}\}$分别是等差数列与等比数列,从而知选 C.

## 5 两项之和等于第三项及其变式

**例 9**　1,2,3,6,12,(　　)

A.18　　B.16　　C.24　　D.20

**解**　由 $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ 知选 C.

**例 10**　2,3,13,175,(　　)

A.30 625　　B.30 651　　C.30 759　　D.30 952

**解**　由 $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}^2$ 知选 B.

## 6 两项之差等于第三项

**例 11**　5,3,2,1,1,(　　)

A. −3　　B. −2　　C.0　　D.2

**解**　由 $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ 知选 C.

## 7 两项之积等于第三项及其变式

**例 12**　3,7,16,107,(　　)

A.1 707　　B.1 704　　C.1 086　　D.1 072

**解**　由 $a_{n+2} = a_n a_{n+1} - 5$ 知选 A.

## 8 两项之商等于第三项

**例 13**　100,50,2,25,(　　)

**解** 由$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$知选 C.

## 9 平方数及其变式

**例 14** 1,4,9,(　　),25,36

A.10　　B.14　　C.20　　D.16

**解** 由 $a_n=n^2$ 知选 D.

**例 15** 66,83,102,123,(　　)

A.144　　B.145　　C.146　　D.147

**解** 由 $a_n=(n+7)^2+2$ 知选 C.

## 10 平方数及其变式

**例 16** 0,2,10,30,(　　)

A.68　　B.74　　C.60　　D.70

**解** 由 $a_n=(n-1)^2+n-1$ 知选 A.

## 11 有理化

**例 17** $\sqrt{2}-1,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}+2}$,(　　)

A.$\sqrt{5}-2$　　B.$\frac{1}{\sqrt{5}-2}$　　C.$\sqrt{5}+2$　　D.$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

**解** 由 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 知选 A.

## 12 其他

**例 18** 1,32,81,64,25,(　　),1

A.5　　B.6　　C.10　　D.12

**解** 由 $a_n=n^{7-n}$ 知选 B.

**例 19** 27,16,5,(　　),$\frac{1}{7}$

A.16　　B.1　　C.0　　D.2

**解** 由 $a_n=(n+2)^{4-n}$ 知选 C.

**例 20** $\frac{133}{57},\frac{119}{51},\frac{91}{39},\frac{49}{21}$,(　　),$\frac{7}{3}$

A.$\frac{28}{12}$　　B.$\frac{21}{14}$　　C.$\frac{28}{9}$　　D.$\frac{31}{15}$

**解** 由 $a_n=\frac{7}{3}$ 知选 A.

**例 21** 20,22,25,30,37,( )

A.39 B.45 C.48 D.51

**解** 由 $\{a_{n+1}-a_n\}$:2,3,5,7 是从小到大的前四个质数,所以选 C.

## 练 习

1.4,7,13,25,49,( )

A.80 B.90 C.92 D.97

2. -1,1,7,17,31,( ),71

A.37 B.41 C.49 D.50

3.4,11,30,82,( )

A.121 B.224 C.130 D.135

4.3,2,8,12,28,( )

A.15 B.32 C.27 D.52

5.7,10,16,28,( )

A.28 B.32 C.52 D.45

6. -2,14,6,10,8,( )

A.4 B.7 C.9 D.10

7.1,2,5,26,( )

A.677 B.69 C.114 D.238

8.30,60,91,123,156,( )

A.180 B.185 C.188 D.190

9.0,9,26,65,124,( )

A.186 B.217 C.216 D.215

10.2,3,10,15,26,( )

A.29 B.32 C.35 D.37

**参考答案**

1 ~ 5 DCBDC 6 ~ 10 CADBC

1.2.5.8.先算 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 3. $a_{n+2}=2(a_n+a_{n+1})$ 4. $a_{n+1}=2a_n+4(-1)^n$ 6. $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 7. $a_{n+1}=a_n^2+1$ 9. $a_n=n^3+(-1)^n$ 10. $a_n=n^2+(-1)^n$

# 等差(比)数列的一条性质

**定理 1** 在正项非常数列的等差数列$\{a_n\}$中,若$r,s,t,u\in\mathbf{N}^*,r<s\leqslant t<u,r+u=s+t$,则

(1)$a_r+a_u=a_s+a_t$;

(2)$a_ra_u<a_sa_t$.

**证明** (1)是大家熟知的结论,下面只证(2):

得$a_1,d$($d$即$\{a_n\}$的公差)$\in\mathbf{R}^+$,即证

$$[a_1+(r-1)d][a_1+(u-1)d]<[a_1+(s-1)d][a_1+(t-1)d]$$

也即证

$$(r-1)(u-1)<(s-1)(t-1)$$

由$u=s+t-r$知,即证

$$(r-1)(s+t-r-1)<(s-1)(t-1)$$

展开后整理得,此式即

$$(r-t)(r-s)>0$$

由$r<s<t<u$知上式成立,所以要证结论成立.

**定理 2** 在非常数列的正项等比数列$\{a_n\}$中,若$r,s,t,u\in\mathbf{N}^*,r<s\leqslant t<u,r+u=s+t$,则

(1)$a_ra_u=a_sa_t$;

(2)$a_r+a_u>a_s+a_t$.

**证明** 也只证(2):

得$a_1,q$(即$\{a_n\}$的公比)$\in\mathbf{R}^+$且$q\neq1$,即证

$$a_1q^{r-1}+a_1q^{u-1}>a_1q^{s-1}+a_1q^{t-1}$$

也即证

$$q^{r-1}+q^{s+t-r-1}-q^{s-1}-q^{t-1}>0$$

$$q^{r-1}(q^{s-r}-1)(q^{t-r}-1)>0$$

分$0<q<1,q>1$两种情形,再由$s-r,t-r\in\mathbf{R}^+$,得上式成立,所以要证结论成立.

# 练 习

已知$\{a_n\}$是公比不为1的正项等比数列,请比较$a_1+a_8$与$a_4+a_5$的大小

**参考答案**

$a_1+a_8>a_4+a_5$

# 《类比思维的一种应用》一文的补充

发表于《数学通报》2007年第10期的文章《类比思维的一种应用——已知递推公式求通项公式》中的转化法求通项公式给笔者留下了深刻印象,但仔细研读之后,发现该文有多处印刷错误,也有推理上的不严谨,主要是没有注意"分母不为0"(所以数列的项不能随意取倒数,等比数列的各项不为0). 文献[1]也指出了这种隐蔽、流行的错误,原文的全部订正见本文末的订正表.

原文总结了由递推式求通项公式的三类题型的解法,本文再对前两类做出细致完整的阐述.

## 1 已知 $pa_{n+1}+qa_n+m=0(pq\neq 0)$ 及 $a_1$,求 $a_n$ 的表达式

### 1.1 当 $m=0$ 时

$$a_n=a_1\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

注 原文说"$\{a_n\}$ 是等比数列"不对,只有当 $a_1\neq 0$ 时才能这样说.

### 1.2 当 $p=-q$ 时

$\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{m}{q}$ 的等差数列,进而求出 $a_n$.

### 1.3 当 $p\neq -q$ 时

$p(a_{n+1}-c)=-q(a_n-c)$,其中 $c$ 为特征方程

$$px+qx+m=0$$

的根(叫做特征根),所以 $a_n+\frac{m}{p+q}=\left(a_1+\frac{m}{p+q}\right)\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}$,进而可求出 $a_n$.

注 原文说"$\{a_n-c\}$ 为等比数列"也不对,只有当 $a_1\neq c=-\frac{m}{p+q}$ 时才能这样说.

## 2 已知 $pa_{n+1}a_n+qa_{n+1}+ma_n+t=0(pqm\neq 0)$ 及 $a_1$,求 $a_n$ 的表达式

### 2.1 当 $t=0$ 且 $q=-m$ 时

此时,若 $a_1=0$,可用数学归纳法证得 $a_n=0$.

此时,若 $a_1 \neq 0$,可用数学归纳法及题设"$(pa_n+q)a_{n+1}=-ma_n$"证得 $a_n \neq 0$,此时有$\{\frac{1}{a_n}\}$是公差为$\frac{p}{q}$的等差数列,进而可求出 $a_n$.

**2.2 当 $q \neq m$ 且 $(q+m)^2=4pt$ 时**

设 $c$ 是特征方程

$$px^2+qx+mx+t=0$$

的根,可得

$$c=-\frac{q+m}{2p}$$

还有

$$p(a_{n+1}-c)(a_n-c)+\frac{q-m}{2}(a_{n+1}-c)-\frac{q-m}{2}(a_n-c)=0$$

若 $a_1=c$,得 $a_n=c=-\frac{q+m}{2p}$.

若 $a_1 \neq c$ 可用数学归纳法证得 $a_n \neq c$ 进而得$\{\frac{1}{a_n-c}\}$是公差为$\frac{2p}{q-m}$的等差数列,可求出 $a_n$.

**2.3 当 $p \neq 0, qm \neq pt$ 且 $a_1$ 不是特征根时**

此时,得 $(pa_n+q)a_{n+1}=-ma_n-t$.

若存在 $n$ 使得 $pa_n+q=0$,则 $ma_n+t=0$, $-a_n=\frac{q}{p}=\frac{t}{m}$, $qm=pt$.

这与题设矛盾!所以 $pa_n+q \neq 0$,得

$$a_{n+1}=\frac{-ma_n-t}{pa_n+q} \quad ①$$

设 $\alpha,\beta$ 是特征方程

$$px^2+(q+m)x+t=0 \quad ②$$

的两个复数根,则$\left\{\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\right\}$是公比为$\frac{m+p\beta}{m+p\alpha}$的等比数列,进而可求出 $a_n$.

**证明** 先证 $-\frac{m}{p}$ 不是 ② 的根:否则可得 $qm=pt$.

所以 $$\alpha,\beta \neq -\frac{m}{p}$$

再证 $a_n(n \in \mathbf{N}^*)$ 均不是 ② 的根,因为不是 ② 的根,所以只需证明 $a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 不是 ② 的根.

假设某个 $a_{n+1}$ 是 ② 的根,得

$$-t=pa_{n+1}^2+(q+m)a_{n+1}$$

$$-t-qa_{n+1}=a_{n+1}(pa_{n+1}+m) \quad ③$$

由此还可得 $pa_{n+1}+m\neq 0$：

否则 $-m=pa_{n+1},-qa_{n+1}=t,qma_{n+1}=pta_{n+1}$

若 $a_{n+1}=0$，得 $m=t=0$ 与 $qm\neq pt$ 矛盾！所以 $a_{n+1}\neq 0$，得 $qm=pt$，也矛盾！所以 $pa_{n+1}+m\neq 0$.

由①，③得

$$(pa_{n+1}+m)a_n=-t-qa_{n+1}=a_{n+1}(pa_{n+1}+m)$$

$$a_{n+1}=a_n$$

进而得 $a_{n+1}=a_1$. 由题设知 $a_1$ 不是②的根，所以 $a_{n+1}$ 不是②的根，前后矛盾！所以 $a_n\neq\alpha,\beta$.

下面证明 $\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}\Big/\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\dfrac{m+p\beta}{m+p\alpha}$ 即可：

$$\text{左边}=\frac{\dfrac{-ma_n-t}{pa_n+q}-\beta}{\dfrac{-ma_n-t}{pa_n+q}-\alpha}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{(m+p\beta)a_n+(t+q\beta)}{(m+p\alpha)a_n+(t+q\alpha)}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{m+p\beta}{m+p\alpha}$$

(最后一步：由 $\alpha,\beta$ 是②的根，得 $t+q\beta=-\beta(m+p\beta),t+p\alpha=-\alpha(m+p\alpha)$.)

由 2.3 节的论述知原文第 44 页左栏第二个“结论”及第 45 页左栏“③当 $q\neq -m,\cdots$”的结论及其论述均有误.

**例** (2007 年全国卷(Ⅰ)理科压轴题)已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2,a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 中，$b_1=2,b_{n+1}=\dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$，证明：$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$.

**解** (1) 由本文 1.3 节的结论，可求得

$$a_n=(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^{n-1}+\sqrt{2}$$

(2) 由本文 2.3 节的结论可求：

令 $p=2,q=3,m=-3,t=-4$，得方程②即

$$2x^2-4=0$$

其两个根为 $\alpha=\sqrt{2},\beta=-\sqrt{2}$，得

$$\frac{b_n+\sqrt{2}}{b_n-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\frac{4}{(4+3\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^{4n-4}-\sqrt{2}}+\sqrt{2}$$

所以$\sqrt{2} < b_n$. 又 $a_{4n-3} = (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^{4n-4}+\sqrt{2}$，由此易证得 $b_n \leqslant a_{4n-3}$（等价于 $1 \geqslant (\sqrt{2}-1)^{4n-4}$）.

本文最后指出原文的一些（印刷）错误：

| 页 | 栏 | 行 | 误 | 正 |
|---|---|---|---|---|
| 44 | 左 | 该栏第二个“结论” | $x_1, x_2$ 的分子中的“$-q$” | $-q-m$ |
| 44 | 左 | 该栏第二个“结论” | $x_1, x_2$ 的分子中的“$rpt$” | $4pt$ |
| 44 | 左 | 倒六 | $=p$ | $=0$ |
| 44 | 左 | 倒三 | $q$ | $q'$ |
| 44 | 右 | 五 | $q$ | $q'$ |
| 44 | 右 | 例 2 上第二行 | $d=-\frac{p}{q}$ | $d=\frac{p}{q}$ |
| 44 | 右 | 倒四 | $qq_{n+1}$ | $qa_{n+1}$ |
| 45 | 左 | 倒十三 | $q+m^2$ | $(q+m)^2$ |
| 45 | 右 | 倒九，八 | 印刷错误同前 | |
| 45 | 右 | 例 5 上第二行 | 相乘（累乘） | 相加（累加） |

## 参考文献

[1] 甘志国. 两类递推数列通项的求法[J]. 数学通讯，2006(17)：21-22.

# 巧求一类既约分数的和

**问题**　设 $m,n,a$ 是已知的自然数,$m<n,a\geqslant 2$,求:

(1)$m$ 与 $n$ 之间所有分母为 $a$ 的既约分数的整数部分的和 $G(a)$;

(2)$m$ 与 $n$ 之间所有分母为 $a$ 的既约分数的小数部分的和 $H(a)$;

(3)$m$ 与 $n$ 之间所有分母为 $a$ 的既约分数的和 $S(a)$.

**注**　实数 $a$ 的整数部分就是不超过 $a$ 的最大整数,通常记作$[a]$;实数 $a$ 的小数部分就是 $a-[a]$,通常记作$\{a\}$.

**引理**　设 $a\in\mathbf{N},a\geqslant 2$,集合 $A_a=\{x\mid x\in\mathbf{N}^*,x<a,(x,a)=1\}$,用 $\varphi(a)$ 表示 $A_a$ 的元素个数,则 $A_a$ 中所有元素的和为$\frac{1}{2}a\varphi(a)$.

**注**　$\varphi(a)$ 就是数论中著名的欧拉函数,其计算公式是:若 $a=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,2,\cdots,k$),则 $\varphi(a)=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$.所以 $a\geqslant 3$ 时,$\varphi(a)$ 是偶数.

**证明**　当 $a=2$ 时,$A_a=\{1\},\varphi(a)=1$,可以验证此时要证结论成立.

下证 $a\geqslant 3$ 时要证结论也成立.

若 $x\in A_a$,则 $a-x\in A_a$,且 $x\neq a-x$(否则 $a=2x$,又$(x,a)=1$,得 $a=2$).

所以可把 $A_a$ 中的元素 $x$ 与 $a-x$ 配对,其和为 $a$.共配成$\frac{1}{2}\varphi(a)$对,得 $A_a$ 中所有元素的和为$\frac{1}{2}a\varphi(a)$.

**定理**　(1)$G(a)=\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)\varphi(a)$;

(2)$H(a)=\frac{1}{2}(n-m)\varphi(a)$;

(3)$S(a)=\frac{1}{2}(n^2-m^2)\varphi(a)$.

**证明**　先把 $A_a$ 中的所有元素从小到大排列成:$x_1,x_2,\cdots,x_{\varphi(a)}$.

则 $m$ 与 $n$ 之间所有分母为 $a$ 的既约分数从小到大排列成:

$$m+\frac{x_1}{a},m+\frac{x_2}{a},\cdots,m+\frac{x_{\varphi(a)}}{a};m+1+\frac{x_1}{a},m+1+\frac{x_2}{a},\cdots,m+1+\frac{x_{\varphi(a)}}{a};$$

…；

$n-1+\frac{x_1}{a},n-1+\frac{x_2}{a},\cdots,n-1+\frac{x_{\varphi(a)}}{a}$

从而，得

(1) $G(a)=\varphi(a)\cdot[m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(n-1)]=\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)\varphi(a)$.

(2) $H(a)=\left[\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}+\cdots+\frac{x_{\varphi(a)}}{a}\right](n-m)=\frac{n-m}{a}\cdot\frac{1}{2}a\varphi(a)$(用引理) $=\frac{1}{2}(n-m)\varphi(a)$.

(3) $S(a)=G(a)+H(a)=\frac{1}{2}(n^2-m^2)\varphi(a)$.

# 是巧合?还是必然!

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2006年人民教育出版社)复习参考题三B组第4题为:

有两个等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,其前$n$项和分别是$S_n$,$T_n$且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+2}{n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$,求$\frac{a_5}{b_5}$.

**解** $$\frac{a_5}{b_5}=\frac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{7\times 9+2}{9+3}=\frac{65}{12}$$

**变式1** 在该题的条件下(下同),求$\frac{a_n}{b_n}$.

**解** 同上得$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{14n-5}{2n+2}$.

**变式2** 求:(1) $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}$;(2) $\frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}$;(3) $\frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}$.

**解** (1) $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{149}{24}$

(2) $\frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}=\frac{a_1+(a_1+11d_1)+(a_1+13d_1)}{(b_1+2d_2)+(b_1+6d_2)+(b_1+16d_2)}=\frac{a_1+8d_1}{b_1+8d_2}=\frac{S_{17}}{T_{17}}=\frac{121}{20}$(其中$d_1$,$d_2$分别是等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差)

(3) $\frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}=\frac{2a_{12}+2a_{11}}{2b_{12}+2b_{11}}=\frac{a_1+a_{22}}{b_1+b_{22}}=\frac{S_{22}}{T_{22}}=\frac{156}{25}$

**变式3** 求$\frac{a_7}{b_9}$.

以上各题的解法使用了相同的技巧,但这种技巧不再适合此题了.正确的解法是:

**解** 由于等差数列的前$n$项和是"$An^2+Bn$($A$,$B$是常数)"型(同等差数列的前$n$项和公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$相比较,立得公差$d=2A$,下面将用到此结论),又

$$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+2}{n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$$

所以可不妨设

$$S_n=kn(7n+2),T_n=kn(n+3)(\text{常数 }k\neq 0)$$

进而,得(用 $d=2A$ 来计算最快)

$$a_n=k(14n-5),b_n=k(2n+2)(\text{常数 }k\neq 0) \qquad ①$$

所以

$$\frac{a_7}{b_9}=\frac{k(14\times 7-5)}{k(2\times 9+2)}=\frac{93}{20}$$

但有人说,下面的解法也能得到正确答案:

**另解**　由原题及变式 1 的解法,得

$$\frac{a_7}{b_9}=\frac{S_{2\times 7-1}}{T_{2\times 9-1}}=\frac{S_{13}}{T_{17}}=\frac{7\times 13+2}{17+3}=\frac{93}{20} \qquad ②$$

显然,式②的第一个"="是怎么来的?有无道理?一点也不清楚,有人就说这是一种巧合.

是巧合?还是必然!可以再换一道题算算,这种规律还存在吗?也可以直接研究是否有此普遍规律.

**定理**　设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 $n$ 项和分别是 $S_n$,$T_n$ 且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{pn+q}{p'n+q'}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,则$\frac{a_n}{b_m}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2m-1}}$.

**证明**　由变式 3 的解法知,可设

$$S_n=kn(pn+q),T_n=kn(p'n+q')(\text{常数 }k\neq 0)$$

进而,得

$$a_n=k(2pn+q-p),b_n=k(2p'n+q'-p')(\text{常数 }k\neq 0)$$

所以

$$\frac{a_n}{b_m}=\frac{k(2pn+q-p)}{k(2p'm+q'-p')}=\frac{p(2n-1)+q}{p'(2m-1)+q'}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2m-1}}(\text{用题设})$$

读者用以上方法还可解决

**变式 4**　求(1) $\frac{a_n}{b_m}$;(2) $\frac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4}$;(3) $\frac{2a_1^3-a_3^2b_5}{a_2b_7^2+b_3^3}$;(4) $\frac{\sqrt[5]{2a_1^{10}-a_3^3b_5^7}}{\sqrt[3]{a_2^2b_7^4+b_3^6}}$

**解**　(1) $\frac{a_n}{b_m}=\frac{14n-5}{2m+2}$(用①)

(2) $\frac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4}=\frac{9\sqrt{3}-121}{65+32-10}=\frac{9\sqrt{3}-121}{87}$(用①)

(3) $\dfrac{2a_1^3-a_3^2b_5}{a_2b_7^2+b_3^3}=\dfrac{2\times 9^3-37^2\times 12}{23\times 16^2+8^3}=-\dfrac{1\ 497}{640}$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{2a_1^{10}-a_3^3b_5^7}}{\sqrt[3]{a_2^2b_7^4+b_3^6}}=\dfrac{\sqrt[5]{2\times 9^{10}-37^2\times 12^7}}{\sqrt[3]{23^2\times 16^4+8^6}}=-\dfrac{\sqrt[5]{1\ 808\ 015\ 001\ 822}}{32\cdot\sqrt[3]{1\ 466}}$

实际上,本文中的问题都可由结论 ① 轻松的解决.由 ① 还可解决变式 4(2),(3),(4) 的一般情形:分子,分母是 $a_i,b_j$ 的齐次式的分式的值均可求得(当然要注意该分式要有意义).

# 数列求和

数列求和是常见题型,具有复杂多变、综合性强、解法灵活等特点,本文将通过例题简单介绍数列求和的基本方法.

## 1　运用公式法

很多数列的前 $n$ 项和 $S_n$ 的求法,就是套用等差、等比数列 $S_n$ 的公式,但以下常用公式必须熟记:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$1+2+2^2+\cdots 2^{n-1}=2^n-1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

还要记住一些正整数的幂和公式:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

**例 1**　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=32n-n^2$,求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

**解**　由 $S_n=32n-n^2$,可得 $a_n=33-2n$, $a_n>0\Leftrightarrow n\leqslant 16$,所以:

(1) 当 $n\leqslant 16$ 时, $T_n=S_n=32n-n^2$.

(2) 当 $n\geqslant 17$ 时, $T_n=S_n=32n-n^2$.

$$\begin{aligned}T_n=&|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=\\&(a_1+a_2+\cdots+a_{16})+(a_{17}+a_{18}+\cdots+a_n)=\\&S_{16}-(S_n-S_{16})=\\&2S_{16}-S_n=\\&n^2-32n+512\end{aligned}$$

所以

$$T_n=\begin{cases}32n-n^2 & (n=1,2,\cdots,16)\\ n^2-32n+512 & (n\geqslant 17,\text{且 } n\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$$

**例 2** 求 $S_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + n \cdot 1$.

**解** 本题即求数列$\{a_k\}$($a_k = k(n+1-k) = k(n+1) - k^2$)的前 $n$ 项和.

$$S_n = (1+2+3+\cdots+n)(n+1) - (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) =$$
$$\frac{1}{2}n(n+1)\cdot(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) =$$
$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

## 2 分组求和法

**例3** 求 $S_n = 1 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

**解** 本题即求数列$\{a_n\}$($a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$)的前 $n$ 项和.

$$S_n = 2n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2n - a_n = 2n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$$

**例 4** 设数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $S_n = \left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2$,又 $b_n = (-1)^n S_n$,求数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和 $T_n$.

**解** 在 $S_n = \left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2$ 中,令 $n=1$ 可求得 $a_1 = 1$.

还可得

$$4S_n = (a_n+1)^2 \qquad ①$$
$$4S_{n+1} = (a_{n+1}+1)^2 \qquad ②$$

② - ①,得

$$4a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n$$
$$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2) = 0$$
$$a_{n+1} - a_n = 2$$

所以$\{a_n\}$是首项为 1,公差为 2 的等差数列,得

$$a_n = 2n-1$$

所以 $$S_n = \left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2 = n^2, b_n = (-1)^n \cdot n^2$$

当 $n$ 为偶数时,

$$T_n = (-1^2+2^2) + (-3^2+4^2) + \cdots + [-(n-1)^2+n^2] =$$
$$3+7+11+\cdots+(2n-1) =$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

当 $n$ 为奇数时,

$$T_n = T_{n-1} + b_n = \frac{n(n-1)}{2} - n^2(\text{用以上结论}) = -\frac{n(n+1)}{2}$$

总之, $T_n = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

## 3 倒序相加法

等差数列的前 $n$ 项和 $S_n$ 的公式推导方法就是倒序相加法.

**例 5** 求正整数 $m$ 与 $n(m < n)$ 之间的分母为 3 的所有既约分数的和 $S$.

**解** 显然,这些既约分数为:

$$m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}, m + \frac{4}{3}, \cdots, n - \frac{4}{3}, n - \frac{2}{3}, n - \frac{1}{3}$$

有

$$S = (m + \frac{1}{3}) + (m + \frac{2}{3}) + (m + \frac{4}{3}) + \cdots$$
$$(n - \frac{4}{3}) + (n - \frac{2}{3}) + (n - \frac{1}{3})$$

也有

$$S = (n - \frac{1}{3}) + (n - \frac{2}{3}) + (n - \frac{4}{3}) + \cdots$$
$$(m + \frac{4}{3}) + (m + \frac{2}{3}) + (m + \frac{1}{3})$$

所以 $2S = (m + n) \cdot 2(n - m) = 2(n^2 - m^2), S = n^2 - m^2$

## 4 错位相减法

用错位相减法可求出数列 $\{a_n \cdot b_n\}$(其中 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 分别是等差数列,等比数列(公比不为 1))的前 $n$ 项和 $S_n$,请看一般情形的解法:

可设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$,数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$,得

$$a_n \cdot b_n = [a_1 + (n-1)d] \cdot b_1 q^{n-1}$$

$$S_n = b_1\{a_1 + (a_1 + d)q + (a_1 + 2d)q^2 + \cdots + [a_1 + (n-1)d]q^{n-1}\}$$

$$qS_n = b_1\{a_1 q + (a_1 + d)q^2 + \cdots +$$
$$[a_1 + (n-2)d]q^{n-1} + [a_1 + (n-1)d]q^n\}$$

$$(1 - q)S_n = b_1\{a_1 + dq + dq^2 + \cdots + dq^{n-1} - [a_1 + (n-1)d]q^n\} =$$
$$b_1\{(d + dq + dq^2 + \cdots + dq^{n-1}) - [a_1 + (n-1)d]q^n + a_1 - d\} =$$
$$b_1\{\frac{d - dq^n}{1 - q} - [a_1 + (n-1)d]q^n + a_1 - d\}$$

$$S_n=\frac{b_1d}{(1-q)^2}(1-q^n)-\frac{b_1[a_1+(n-1)d]}{1-q}q^n+\frac{b_1(a_1-d)}{1-q}=$$
$$\left[\frac{b_1d}{q-1}n+\frac{b_1(a_1-d)}{q-1}-\frac{b_1d}{(q-1)^2}\right]q^n-$$
$$\left[\frac{b_1(a_1-d)}{q-1}-\frac{b_1d}{(q-1)^2}\right]$$

该式很复杂,绝不需要记忆,但由该式可得.

**定理** 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别是等差数列,等比数列(其公比$q\neq1$),则数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前$n$项和$S_n=(an+b)q^n-b$,其中$a,b$是常数.(注意:$S_n$中的$q$就是等比数列$\{b_n\}$的公比)

(也可对$n$用数学归纳法证明定理成立)

有了该定理,就可用待定系数法代替常规的错位相减法解决相应的数列求和问题,一定会使计算量大为减少,准确率大为提高.

**例6** (1) 求数列$\{(2n-1)\cdot3^n\}$的前$n$项和$S_n$;

(2) 求数列$\{\frac{3n-1}{2^n}\}$的前$n$项和$S_n$.

**解** 用错位相减法或待定系数法均可求出它们的答案分别为:

(1)$S_n=(n-1)\cdot3^{n+1}+3$;

(2)$S_n=5-\frac{3n+5}{2^n}$.

## 5 裂项相消法

**例7** 若$\{a_n\}$是各项均不为0的等差数列,求证:$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

**证明** 设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$:若$d=0$,要证结论显然成立;若$d\neq0$,得

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left[(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\cdots+(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})\right]=$$
$$\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right]=\frac{1}{d}\cdot\frac{nd}{a_1a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

**例8** 证明$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2(n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant2)$.

**证明** $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<$

$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$

$1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=$

$1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{n})<2$

## 练　习

1.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-60,a_{n+1}=a_n+3$，则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{30}|=$(　　)

A. $-495$　　B.765　　C.1 080　　D.3 105

2.数列$\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\}$的前$n$项和为(　　)

A.$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$　B.$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$　C.$\sqrt{n+1}-1$　D.$\sqrt{n+1}+1$

3.数列$\{\frac{2n-3}{2^{n-3}}\}$的前$n$项和为　(　　)

A.$4-\frac{2n+1}{2^{n-3}}$　B.$4+\frac{2n-7}{2^{n-2}}$　C.$8-\frac{2n+1}{2^{n-3}}$　D.$6-\frac{3n+2}{2^{n-2}}$

4. 两个等差数列 2,5,8,…,197 和 2,7,12,…,197 中相同项的和是________.

5.设$a_k=1^2+2^2+\cdots+k^2(k\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\frac{3}{a_1},\frac{5}{a_2},\frac{7}{a_3},\cdots$的前$n$项和是________.

6.求和：(1)$4+44+444+\cdots+\underbrace{444\cdots4}_{n个4}$；

(2)$-1+3-5+7-\cdots+(-1)^n(2n-1)$；

(3)$\frac{1}{1^2+2}+\frac{1}{2^2+4}+\frac{1}{3^2+6}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}$.

7.设$a_n=\begin{cases}5n+1 & (n\text{ 为正奇数})\\ 2^{\frac{n}{2}} & (n\text{ 为正偶数})\end{cases}$，求数列$\{a_n\}$的前$2m(m\in\mathbf{N}^*)$项的和.

8.已知等差数列$\{a_n\}$的第2项为8，前10项的和为185.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)从数列$\{a_n\}$中依次取出第2项，第4项，第8项，…，第$2^n$项，…，并按原来的顺序组成一个新的数列$\{b_n\}$，求数列$\{b_n\}$前$n$项和.

**参考答案**

1.B 2.C 3.C 4.1 393 5.$\frac{6n}{n+1}$ 6.(1)$\frac{40}{81}\cdot 10^n-\frac{4}{9}n-\frac{40}{81}$ (2)$(-1)^{n-1}\cdot n$ (3)$\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$ 7.$2^{m+1}+5m^2+m-2$ 8.(1)$a_n=3n+2$ (2)$6\cdot 2^n+2n-6$

# 例谈如何求数列项的最值

求数列的项的最大(小)值是数列中常见的题型,本文将举例说明这种题目的解法.

**例 1** 已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n = C_{12}^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{12-n}$,$n \in \mathbf{N}^*$,$n \leqslant 12$,当$n$为何值时,$a_n$取最大值?

**解** 若$n = m$时,$a_n$取到最大值,则

$$\begin{cases} a_{m-1} \leqslant a_m (m \in \mathbf{N}^*, 2 \leqslant m \leqslant 12) & ① \\ a_m \geqslant a_{m+1} (m \in \mathbf{N}^*, m \leqslant 11) & ② \end{cases}$$

可得

① 当且仅当$m = 2,3$时成立,且$a_{m-1} = a_m$不会成立.所以$a_1 < a_2 < a_3$.

② 当且仅当$m = 3,4,5,\cdots,11$时成立,且$a_m = a_{m+1}$不会成立.所以$a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_{12}$.

所以,当且仅当$n = 3$时,$a_n$取到最大值.

**例 2** 已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n = C_{12}^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{12-n}$,$n \in \mathbf{N}^*$,$n \leqslant 12$,当$n$为何值时,$a_n$取最小值?

**解** 若$n = m$时,$a_n$取到最小值,则

$$\begin{cases} a_{m-1} \geqslant a_m (m \in \mathbf{N}^*, 2 \leqslant m \leqslant 12) & ③ \\ a_m \leqslant a_{m+1} (m \in \mathbf{N}^*, m \leqslant 11) & ④ \end{cases}$$

可得

③ 当且仅当$m = 4,5,\cdots,12$时成立,且$a_{m-1} = a_m$不会成立.所以$a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_{12}$.

④ 当且仅当$m = 1,2$时成立,且$a_m = a_{m+1}$不会成立.所以$a_1 < a_2 < a_3$.

又$a_1 = \frac{3^{12}}{4^{11}}$,$a_{12} = \frac{1}{4^{12}}$,得$a_1 > a_{12}$.

所以,当且仅当$n = 12$时,$a_n$取到最小值.

(实际上,由③,④得到的结论就是分别由②,①得到的结论.)

**例3** 已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\frac{1}{3}n^3-4n^2+15n, n\in \mathbf{N}^*, n\leqslant 12$，求$a_n$的最大值和最小值.

**解** 若$n=m$时，$a_n$取到最大值，则

$$\begin{cases} a_{m-1}\leqslant a_m(m\in \mathbf{N}^*, 2\leqslant m\leqslant 12) & ⑤\\ a_m\geqslant a_{m+1}(m\in \mathbf{N}^*, m\leqslant 11) & ⑥\end{cases}$$

可得

⑤当且仅当$m=2,3,6,7,8,9,10,11,12$时成立，且$a_{m-1}=a_m$不会成立.所以

$$a_1<a_2<a_3;a_5<a_6<a_7<\cdots<a_{12}.$$

⑥当且仅当$m=3,4$时成立，且$a_m=a_{m+1}$不会成立.所以$a_3>a_4>a_5$.得

$$a_1<a_2<a_3, a_3>a_4>a_5, a_5<a_6<a_7<\cdots<a_{12}$$

又$a_1=\frac{34}{3}, a_5=\frac{50}{3}$，得$a_1<a_5;a_3=18, a_{12}=180, a_{12}>a_3$.

所以，当且仅当$n=12$时，$a_n$取到最大值；当且仅当$n=1$时，$a_n$取到最小值.

**例4** 设$n$是已知的正整数，求$C_n^i(i=0,1,2,\cdots,n)$的最大值和最小值.

**解** 若$i=m$时，$C_n^i$取到最大值，则

$$\begin{cases} C_n^{i-1}\leqslant C_n^i(i\in \mathbf{N}^*, 1\leqslant i\leqslant n) & ⑦\\ C_n^i\geqslant C_n^{i+1}(i\in \mathbf{N}^*, i\leqslant n-1) & ⑧\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} i\leqslant \frac{n+1}{2}(i\in \mathbf{N}^*, 1\leqslant i\leqslant n) & ⑨\\ i\geqslant \frac{n-1}{2}(i\in \mathbf{N}^*, i\leqslant n-1) & ⑩\end{cases}$$

(1) 当$n$是奇数时，可得

$$C_n^0<C_n^1<C_n^2<\cdots<C_n^{\frac{n-1}{2}}, C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}, C_n^{\frac{n+1}{2}}>\cdots>C_n^{n-1}>C_n^n$$

所以所求最大值为$C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$，最小值为$C_n^0=C_n^n=1$.

(2) 当$n$是偶数时，可得

$$C_n^0<C_n^1<C_n^2<\cdots<C_n^{\frac{n}{2}}, C_n^{\frac{n}{2}}>\cdots>C_n^{n-1}>C_n^n$$

所以所求最大值为$C_n^{\frac{n}{2}}$，最小值为$C_n^0=C_n^n=1$.

# 由一道课本数列题编拟的趣题

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2006年人民教育出版社)第96页练习第2(2)题是:在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_3=9,a_9=3$,求$a_{12}$.(答案:$a_{12}=0$)

这是一道很有趣味的题,笔者由此还编制出了另几道数列趣题,供同学们欣赏.

**题1** 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_p=q,a_q=p(p\neq q)$,求$a_{p+q}$的值.

**解** 公差$d=\frac{a_p-a_q}{p-q}=\frac{q-p}{p-q}=-1$,所以$a_{p+q}=a_p+qd=q+q\cdot(-1)=0$.

**题2** 设等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和是$S_n$,$S_p=q,S_q=p(p\neq q)$,求$S_{p+q}$的值.

**解** 由等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$的公式

$$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

知,可设

$$S_n=An^2+Bn(A,B\in\mathbf{R}\text{且公差 }d=2A)$$

由题设,得

$$\begin{cases}S_p=Ap^2+Bp=q & ①\\ S_q=Aq^2+Bq=p & ②\end{cases}$$

① - ②,可得$A(p+q)+B=-1$,所以

$$S_{p+q}=(p+q)[A(p+q)+B]=-p-q$$

**题3** 设等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和是$S_n$,$S_p=p,S_q=q(p\neq q)$,求$S_{p+q}$的值.

**解法1** 可设$S_n=An^2+Bn(A,B\in\mathbf{R})$.

由题设,得

$$\begin{cases}S_p=Ap^2+Bp=p & ③\\ S_q=Aq^2+Bq=q & ④\end{cases}$$

③ - ④,可得$A(p+q)+B=1$,所以

$$S_{p+q}=(p+q)[A(p+q)+B]=p+q$$

**解法 2** 可不妨设 $p<q$,得

$$S_q-S_p=a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots+a_q=q-p$$

$$\frac{1}{2}(q-p)(a_{p+1}+a_q)=q-p$$

$$a_{p+1}+a_q=2, a_1+a_{p+q}=2$$

$$S_{p+q}=\frac{1}{2}(p+q)(a_1+a_{p+q})=p+q$$

**题 4** 设等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和是 $S_n$, $S_p=S_q(p\neq q)$,求 $S_{p+q}$ 的值.

**解法 1** 可设 $S_n=An^2+Bn(A,B\in\mathbf{R})$.

由 $S_p=S_q(p\neq q)$,得 $A(p+q)+B=0$,所以

$$S_{p+q}=(p+q)[A(p+q)+B]=0$$

**解法 2** 可不妨设 $p<q$,得

$$S_q-S_p=a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots+a_q=0$$

$$\frac{1}{2}(q-p)(a_{p+1}+a_q)=0$$

$$a_1+a_{p+q}=0$$

$$S_{p+q}=\frac{1}{2}(p+q)(a_1+a_{p+q})=0$$

**解法 3** 可设 $S_n=An^2+Bn(A,B\in\mathbf{R})$.

若 $A=0$,得$\{S_n\}$是等差数列;再由 $S_p=S_q(p\neq q)$ 及 $S_n=An^2+Bn(A,B\in\mathbf{R})$,得 $S_n=0$. 所以 $S_{p+q}=0$.

若 $A\neq 0$,得函数 $S_n=An^2+Bn(n\in\mathbf{N}^*)$ 的图象是抛物线 $f(x)=Ax^2+Bx(x\in\mathbf{R})$ 上的一些点.

由 $S_p=S_q(p\neq q)$,得 $f(p)=f(q)$,所以该抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{p+q}{2}$,得 $f(p+q)=f(0)=0$,所以 $S_{p+q}=f(p+q)=0$.

(这种扩大定义域的解题方法值得同学们重视)

# 在无穷等比数列中寻找等差数列

在数列$\{a_n\}$中按序号依次选出的一个(有穷或无穷)数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots(n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$$

叫做数列$\{a_n\}$的一个子数列.

## 1　在等差数列中能选出等比数列的充要条件

**定理 1**　能从一个非常数列的无穷等差数列$\{a_n\}$中选出一个无穷等比子数列的充要条件是存在$n_1,n_2\in\mathbf{N}^*(n_1<n_2)$使得$\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}\in\mathbf{N}^*$.

**证明**　充分性(用数学归纳法).

设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(\neq 0)$,得$a_n=a_1+(n-1)d$,并设$\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}=k(k\in\mathbf{N}^*),k>1,n_1<n_2$.

现取$n_3=n_2+(n_2-n_1)k,n_4=n_3+(n_3-n_2)k,\cdots,n_i=n_{i-1}+(n_{i-1}-n_{i-2})k,\cdots$,则

$$\frac{a_{n_3}}{a_{n_2}}=\frac{a_1+(n_3-1)d}{a_1+(n_2-1)d}=1+\frac{(n_3-n_2)d}{a_{n_2}}=1+\frac{(n_2-n_1)kd}{a_{n_2}}=$$

$$1+\frac{(n_2-n_1)d}{a_{n_2}}\cdot\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}=1+\frac{(n_2-n_1)d}{a_{n_1}}=\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}=k$$

假设$\frac{a_{n_{i-1}}}{a_{n_{i-2}}}=k$,得

$$\frac{a_{n_i}}{a_{n_{i-1}}}=\frac{a_1+(n_i-1)d}{a_1+(n_{i-1}-1)d}=1+\frac{(n_i-n_{i-1})d}{a_{n_{i-1}}}=1+\frac{(n_{i-1}-n_{i-2})kd}{a_{n_{i-1}}}=$$

$$1+\frac{(n_{i-1}-n_{i-2})d}{a_{n_{i-1}}}\cdot\frac{a_{n_{i-1}}}{a_{n_{i-2}}}=1+\frac{(n_{i-1}-n_{i-2})d}{a_{n_{i-2}}}=\frac{a_{n_{i-1}}}{a_{n_{i-2}}}=k$$

所以

$$\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}=\frac{a_{n_3}}{a_{n_2}}=\cdots=\frac{a_{n_i}}{a_{n_{i-1}}}=\cdots=k$$

即$a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\cdots$是一个以$k$为公比的等比数列.

必要性.

设等差数列$\{a_n\}$中能选出一个无穷等比数列$a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\cdots$,其中$a_n=a_1+(n-1)d(d\neq 0)$,且$n_1<n_2<n_3<\cdots$.并设$\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}=\frac{a_{n_3}}{a_{n_2}}=\cdots=k$,得

$$a_{n_3}=\frac{a_{n_2}^2}{a_{n_1}}=\frac{a_1+(n_2-1)d}{a_1+(n_1-1)d}\cdot a_{n_2}=\left[1+\frac{(n_2-n_1)d}{a_1+(n_1-1)d}\right]\cdot a_{n_2}=$$

$$a_{n_2}+\frac{(n_2-n_1)d}{a_{n_1}}\cdot a_{n_2}$$

$$a_1+(n_3-1)d=a_1+(n_2-1)d+\frac{(n_2-n_1)d}{a_{n_1}}\cdot a_{n_2}$$

$$n_3=n_2+(n_2-n_1)\cdot\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}=n_2+(n_2-n_1)k$$

$$n_3-n_2=k(n_2-n_1)$$

同理,可得

$$n_4-n_3=k(n_3-n_2),\cdots,n_{i+1}-n_i=k(n_i-n_{i-1}),\cdots$$

所以

$$n_{i+1}-n_i=k^{i-1}(n_2-n_1)$$

假设$k\notin\mathbf{N}^*$,则可设$k=\frac{q}{p}(p,q\in\mathbf{N}^*,(p,q)=1,p>1)$,则

$$n_{i+1}-n_i=\frac{q^{i-1}}{p^{i-1}}(n_2-n_1),p^{i-1}\mid n_2-n_1$$

但$i$可以无限增大,$n_2-n_1$是个常数,所以$p^{i-1}\mid n_2-n_1$是不可能的!得$k\in\mathbf{N}^*$.

即$\{a_n\}$中存在$n_1,n_2\in\mathbf{N}^*(n_1<n_2)$使得$\frac{a_{n_2}}{a_{n_1}}\in\mathbf{N}^*$.

## 2 等比数列中存在无穷等差数列的若干结论

**定理2** 公比为有理数$q$的无穷等比数列中存在等差子数列的充要条件是$|q|=1$.

**证明** 只证必要性(反证法).

假设公比为有理数$q(q\neq\pm 1)$的等比数列$\{a_n\}$中存在等差子数列,则存在$k,n,p\in\mathbf{N}^*,k<n<p$,使得$2a_n=a_k+a_p$,即

$$2a_1q^{n-1}=a_1q^{k-1}+a_1q^{p-1}$$

$$q^{p-k}-2q^{n-k}+1=0 \qquad ①$$

因为$q$是一元$p-k(p-k\in\mathbf{N}^*)$次方程①的有理根,所以$q$是方程①

的整数根，得$|q|=1$，与假设矛盾！要证结论成立.

**定理 3**　公比为 $q$ 的无穷等比实数列中存在无穷等差子数列的充要条件是$|q|=1$.

**证明**　只证必要性(反证法).

假设在已给的数列$\{a_n\}$(公比为 $q(\neq\pm1)$)中存在公差为 $d$ 的无穷等差子数列 $a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\cdots$，则

(1) 若$|q|>1$，取 $n_k>1+\log_{|q|}\dfrac{|d|}{|a_1|(|q|-1)}$，则

$$n_k-1>\log_{|q|}\frac{|d|}{|a_1|(|q|-1)},|q|^{n_k-1}>\frac{|d|}{|a_1|(|q|-1)}$$

$$\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|=\left|a_1q^{n_{k+1}-1}-a_1q^{n_k-1}\right|=|a_1||q|^{n_k-1}(|q|^{n_{k+1}-n_k}-1)\geqslant$$
$$|a_1||q|^{n_k-1}(|q|-1)>|d|$$

(2) 若$|q|<1$，则$|q|^n<1$. 取 $n_k>1+\log_{|q|}\dfrac{|d|}{2|a_1|}$，则$|q|^{n_k-1}<\dfrac{|d|}{2|a_1|}$，所以

$$\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|=|a_1||q|^{n_k-1}(|q|^{n_{k+1}-n_k}-1)<$$
$$|a_1||q|^{n_k-1}(|q|^{n_{k+1}-n_k}+1)<2|a_1||q|^{n_k-1}<|d|$$

这两种情形均与$\{a_{n_i}\}$是公差为 $d$ 的等差数列矛盾！要证结论成立.

**定理 4**　公比非 $\pm1$ 的无穷等比复数列中可能存在无穷等差子数列.

**证明**　下面证明在等比数列

$$\{a_n\}(a_n=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n;$$
$$r\in\mathbf{R},r\neq0;\alpha=\frac{2k\pi}{m-1}(k\in\mathbf{Z},m-1\in\mathbf{N}^*))$$

中存在无穷等差子数列(且是常数列)：

$$a_1,a_m,a_{2m-1},a_{3m-2},\cdots$$
$$a_2,a_{m+1},a_{2m},a_{3m-1},\cdots$$
$$\vdots$$
$$a_{m-1},a_{2m-2},a_{3m-3},a_{4m-4},\cdots$$

可得 $a_n=r(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha)$，又 $\alpha=\dfrac{2k\pi}{m-1}(k\in\mathbf{Z},m-1\in\mathbf{N}^*)$，所以

$$a_m=r\left(\cos\frac{2mk\pi}{m-1}+\mathrm{i}\sin\frac{2mk\pi}{m-1}\right)=$$
$$r\left[\cos\left(2k\pi+\frac{2k\pi}{m-1}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2k\pi+\frac{2k\pi}{m-1}\right)\right]=a_1$$

再由 $a_n=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n$，可得

$$\frac{a_{n+m-1}}{a_n}=\frac{a_m}{a_1}=1,a_{n+m-1}=a_n$$

即$\{a_n\}$是以$m-1$为一个周期的周期数列,得要证结论成立.

**定理 5** 公比为$q$的无穷等比复数列$\{a_n\}$中存在无穷等差子数列的充要条件是存在$m\in\mathbf{N}^*$使$q^m=1$.

**证明** 充分性.

因为存在$m\in\mathbf{N}^*$使$q^m=1$,所以$a_{n+m}=a_nq^m=a_n$,即$\{a_n\}$是以$m$为一个周期的周期数列,可得要证结论成立.

必要性.设$\{a_n\}$中存在公差为$d$的无穷等差子数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots(n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$$

则
$$a_{n_k}=a_{n_1}+(k-1)d$$

当$|q|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1||q|^{n-1})=0$,所以

$$\lim_{n_k\to\infty}|a_{n_k}|=\lim_{k\to\infty}(|a_{n_1}+(k-1)d|)=0,a_{n_1}=d=0$$

这与$\{a_n\}$是等比数列矛盾!

当$|q|>1$时,$\lim\limits_{n_k\to\infty}|a_{n_k}|=\lim\limits_{n_k\to\infty}(|a_1||q|^{n_k-1})=+\infty$,所以

$$\lim_{n_k\to\infty}\left|\frac{d}{a_{n_k}}\right|=0 \qquad ②$$

但是,$n_{k+1}-n_k\geqslant 1$,$|q^{n_{k+1}-n_k}|\geqslant|q|$,所以

$$\left|\frac{d}{a_{n_k}}\right|=\left|\frac{a_{n_{k+1}}-a_{n_k}}{a_{n_k}}\right|=|q^{n_{k+1}-n_k}-1|\geqslant|q^{n_{k+1}-n_k}|-1\geqslant|q|-1$$

这与式②矛盾!

当$|q|=1$时,$|a_n|=|a_1||q|^{n-1}=|a_1|$,所以$|a_{n_k}|=|a_{n_1}+(k-1)d|=|a_1|$.

又$a_1\neq 0$,得

$$\left|\frac{a_{n_k}}{a_1}\right|=\left|\frac{a_{n_1}}{a_1}+(k-1)\cdot\frac{d}{a_1}\right|=1$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{n_1}}{a_1}+(k-1)\cdot\frac{d}{a_1}\right|=1$$

所以
$$\frac{d}{a_1}=0,d=0,a_{n_1}=a_{n_2},q^{n_2-n_1}=1$$

即存在$m\in\mathbf{N}^*(m=n_2-n_1)$使$q^m=1$.

证毕!

## 3　一个猜想

以上结论部分解决了2008年第5期《数学通讯》第28页刊登的《争鸣·问题156》中提出的问题，下面的定理7还否定了问题156的猜测1.

**定理6**　公比为 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 中的项 $a_r,a_s,a_t(r<s<t)$ 成等差数列的充要条件是 $s=r+1,t=r+3$.

**证明**　只证必要性.

可得

$$a_r+a_t=2a_s$$

$$1+q^{t-r}=2q^{s-r} \quad ③$$

若 $s-r=1$，可得 $t-r=3$. 若 $s-r\geqslant 2$，由 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，得

$$1+q^{t-r}>1>2q^2>2q^{s-r} \quad ④$$

与③矛盾！所以 $s-r=1,t-r=3$. 即要证结论成立！

**定理7**　公比为 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 中的任意四项 $a_r,a_s,a_t,a_u$ $(r<s<t<u)$ 不成等差数列.

**证明**　若 $a_r,a_s,a_t,a_u(r<s<t<u)$ 成等差数列，由定理6，得

$$s=r+1,t=r+3(\text{所以 } t=s+2)$$

$$t=s+1,u=s+3$$

产生了矛盾！所以定理7成立.

**定理8**　公比为 $q\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 中的任意四项 $a_r,a_s,a_t,a_u$ $(r<s<t<u)$ 不成等差数列.

**证明**　若 $a_r,a_s,a_t,a_u(r<s<t<u)$ 成等差数列，得式③在这里也成立. 若 $s-r\geqslant 2$，同定理6的证明可得式④在这里也成立，与式③矛盾！所以 $s-r=1$.

同理，得 $t-s=1$，所以等比数列 $\{a_n\}$ 中的连续三项 $a_r,a_{r+1},a_{r+2}$ 成等差数列，得 $q=1$，矛盾！所以要证结论成立！

# 应对高考需要研究性备考
## —— 兼评 2008 年高考陕西卷(理科) 压轴题

一年一度的高考结束之后,好多师生都在惊叹:“做了好多无用功啊,练了、讲了、考了那么多题,怎么没有今年的高考题呢!”每年高考一结束,笔者就要通过书籍、网络等各种媒体在第一时间里钻研各套高考试题,钻研每一道高考题(无论是大题,还是小题)的巧解、背景、编制过程等,笔者发现它们都是专家精心给出的好题,题题都有精彩之处,特别是可以很好的检查和培养学生的数学素养和能力水平.细看这些高考题,我们还会发现“题在书外,根在书中”是高考题的又一真实写照,所以我们老师不要一味的埋怨高考题偏怪难,而应当深思平时的教学和复习备考,尤其要注意深钻教材,把课本题讲深讲透、拓展清楚,这才是高考备考所需要的.

我们来看看 2008 年高考陕西卷(理科) 压轴题及命题人给出的解答(以下解答略有改动,改动后的解答才严谨):

22. 已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=\frac{3}{5}$, $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$, $n=1,2,\cdots$.

(I) 求$\{a_n\}$的通项公式;

(II) 证明:对任意的 $x>0$, $a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$, $n=1,2,\cdots$;

(III) 证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$.

**解** (I) 由题设及数学归纳法可证得 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$,所以可以在式子 $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$ 两边取倒数,得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3a_n}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

又$\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$,所以$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是以$\frac{2}{3}$为首项,$\frac{1}{3}$为公比的等比数列,所以

$$\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^n}$$

$$a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$$

(II) 由(I) 知，$a_n=\frac{3^n}{3^n+2}>0$,

$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}+1-1-x\right)=$

$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{1}{a_n}-(1+x)\right]=-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{1+x}=$

$-\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{1+x}-a_n\right)^2+a_n\leqslant a_n$

$$a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)(n\in\mathbf{N}^*)$$

(II) 的另解设 $f(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$，得

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{-(1+x)^2-\left(\frac{2}{3^n}-x\right)\cdot2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2\left(\frac{2}{3^n}-x\right)}{(1+x)^3}$$

由 $x>0$，得：

当 $x<\frac{2}{3^n}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{2}{3^n}$ 时，$f'(x)<0$.

所以当且仅当 $x=\frac{2}{3^n}$ 时，$f(x)$ 取到最大值，且最大值是 $f\left(\frac{2}{3^n}\right)=\frac{1}{1+\frac{2}{3^n}}=$ $a_n$，即要证结论成立.

(III) 由(II) 知，对任意的 $x>0$，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)\right]=$$

$$\frac{n}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3^n}-nx\right)$$

取 $x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$，上式也成立，得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\frac{n}{1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}>\frac{n^2}{n+1}$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$$

这道压轴题很难吗？解法也很巧、很怪吗？考生的得分率也很低吗？笔者作为湖北的一位老师，对陕西卷的这道压轴题的此方面评价还不是知晓得很清

楚.但是,此题是源于课本的.请看全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第121~122页的例3.

**例3** 已知数列$\{a_n\}$的第1项是1,以后的各项由公式$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$给出,写出这个数列的前5项.

这是一道介绍数列的**递推公式**定义的很平常题目,我们在高三备考的第一轮复习时应注意回归课本,且不能对课本中的例题、习题轻描淡写,务必讲清其实质和背景,并猜测由它能拓展出怎样的考题来,这当然需要教师在备课时作深入细致的研究.

对例3应当提出:

**问题1** 如何求例3中数列$\{a_n\}$的通项公式?

**分析** 即求由递推公式

$$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_n}$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项公式.

一般都认为这是竞赛内容,需要用到不动点知识.实际上,笔者在文献[1]中用待定系数法就给出了更一般情形的简洁解法:

**问题2** 如何求由递推公式

$$a_{n+1}=\frac{ca_n+d}{aa_n+b}(a_1\text{ 已知 }a\neq 0,ad\neq bc) \quad ①$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项公式?

**分析** 设$a_n=b_n+t$($t$是待定的常数),代入①,得

$$b_{n+1}+t=\frac{c(b_n+t)+d}{a(b_n+t)+b}$$

$$b_{n+1}=\frac{(c-at)b_n-[at^2+(b-c)t-d]}{ab_n+at+b}$$

令

$$at^2+(b-c)t-d=0 \quad ②$$

因为$a\neq 0$,所以一定存在复数$t$(由$ad\neq bc$,可得$t\neq\frac{c}{a}$,$c-at\neq 0$)使式②成立,此时,得

$$b_{n+1}=\frac{(c-at)b_n}{ab_n+at+b} \quad ③$$

当式②中的$t=a_1$时,由$a_n=b_n+t$得$b_1=0$,再由式③并用数学归纳法可证得$b_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$,$a_n=a_1(n\in\mathbf{N}^*)$.

当式②中的$t\neq a_1$时,由$a_n=b_n+t$得,再由式③及$c-at\neq 0$并用数

学归纳法可证得 $b_n \neq 0(n \in \mathbf{N}^*)$. 此时可在式③两边同时取倒数,得

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b+at}{c-at} \cdot \frac{1}{b_n} + \frac{a}{c-at}$$

又设 $\frac{1}{b_n} = c_n$,得

$$c_{n+1} = \frac{b+at}{c-at} \cdot c_n + \frac{a}{c-at} \quad ④$$

再用待定系数法并构造等比数列容易由式④求出 $c_n$,进而可以求出 $b_n$, $a_n$.

**注** 若方程②有两个不相等的复数解 $t_1, t_2$(且均不为 $a_1$),则同上可得类似于式④的两个式子:

$$\begin{cases} c_{n+1} = \dfrac{b+at_1}{c-at_1} \cdot c_n + \dfrac{a}{c-at_1} \\ c_{n+1} = \dfrac{b+at_2}{c-at_2} \cdot c_n + \dfrac{a}{c-at_2} \end{cases}$$

通过解这个关于 $c_{n+1}, c_n$ 的方程组,也可望求得 $c_n$(若 $\frac{b+at_1}{c-at_1} = \frac{b+at_2}{c-at_2}$ 即 $b = c$ 就要用上面的方法求解了).

教科书第 122 页练习第 3 题,第 123 页习题第 3,4 题,第 150 页复习参考题第 5 题均是这种递推公式的题目,应当研究由它们确定的数列通项公式的求法.

“(II) 的另解”是很自然的一种解法,也是导数在证明不等式中的应用. 要证明的不等式中含有两个变量 $n, x$ 时,可把一个变量暂时看做常数,当然这里应把 $n$ 看做常数,因为自变量为 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 的函数不能求导. 但这种类型的题目可能在教学时训练的并不多,而笔者在文献[2]中就用导数研究了下面的多元函数问题:

**问题 3** 证明:在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$.

一般都认为该问题的解决办法应当是“微积分”中的拉格朗日乘数法. 实际上,用一元函数的导数也可方便的解决:

先把 $B$ 看作常数,该问题即求函数

$$f(A) = \frac{\sin A + \sin B + \sin(A+B)}{\cos A + \cos B - \cos(A+B)} \quad (0 < A < \pi - B, 0 < B < \pi)$$

的最大值,可设所求得的最大值为 $g(B)$,再用导数证明 $g(B) < 2$ 即可.

再来看 2008 年高考江西卷(理科)压轴题:

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{\frac{ax}{ax+8}}, x \in (0, +\infty)$.

(1) 当 $a = 8$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意正数 $a$,证明:$1 < f(x) < 2$.

我们只看第(2)问:设 $\frac{8}{ax} = b$,即证

当 $abx = 8, a, b, x \in (0, +\infty)$ 时,$1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} < 2$.

这种问题全同问题3.

用数学归纳法极易给出陕西卷压轴题第(III)问的证明,并且还不用第(II)问的结论:

**证明** 即证 $\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{2}{3^i + 2}\right) > \frac{n^2}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3^i + 2} < \frac{n}{n+1}$$

易知 $n = 1, 2$ 时成立.

假设 $n = k(k \geqslant 2)$ 时成立:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{2}{3^i + 2} < \frac{k}{k+1}$$

下证 $n = k + 1$ 时成立:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2}{3^i + 2} < \frac{k+1}{k+2}$$

这只需证明:

$$\frac{k}{k+1} + \frac{2}{3^{k+1} + 2} < \frac{k+1}{k+2}$$

$$2(k+1)(k+2) < 3^{k+1} + 2 \quad (k \geqslant 2)$$

这再用数学归纳法是极易证出的.所以要证结论成立!

说明第(II)问的结论对第(III)问的解答并不是起着至关重要的作用,一定程度上说,还起着干扰作用(命题人大可不必有这种良苦用心),所以笔者对这种层层设问的方式认为不妥.2007年高考湖北卷(理科)压轴题也是这样层层设问的,这道题是:

21.已知 $m, n$ 为正整数.

(1) 用数学归纳法证明:当 $x > -1$ 时,$(1 + x)^m \geqslant 1 + mx$;

(2) 对于 $n \geqslant 6$,已知 $\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n < \frac{1}{2}$,求证 $\left(1 - \frac{m}{n+3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^m$,$m = 1, 2, \cdots, n$;

(3) 求出满足等式 $3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n$ 的所有正整数 $n$.

单独解答这道压轴题的各问并不困难,详见文献[3].

刘培杰先生在专著《初等数学研究(I)》[4]的《序言》中提出了“高胜任教师”的概念,只有善于研究的教师才可能是一位高胜任教师.当今的高考复习备考需要的就是这种高胜任教师,题海战术真的过时了,你的题海战术浪费了高三学生的最宝贵东西——时间,也损害了其他各科的统一备考,必将遭到整个班集体的唾弃.教学生解题时要注意效率,这样教给学生“一片一片”的解题方法不正是高效率的教法嘛!“授之以鱼,不如授之以渔”就是这个道理吧,时代要求我们都要做高胜任教师.

## 参考文献

[1] 甘志国.两类递推数列通项的求法[J].数学通讯,2006(17):21-22.
[2] 甘志国.对两个结论的注记[J].数学通讯,2006(19):20-21.
[3] 甘志国.2007年高考湖北卷的一大特色——整数性质[J].数学通讯,2007(18):18-20.
[4] 甘志国.初等数学研究(I)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.

# 2008年高考广东卷(理科)压轴题的简解

2008年高考广东卷(理科)压轴题是:

21.设 $p,q$ 为实数,$\alpha,\beta$ 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根,数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=p,x_2=p^2-q,x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}(n=3,4,\cdots)$.

(1) 证明:$\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$;

(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 $p=1,q=\frac{1}{4}$,求 $\{x_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

该题难在第(2)问,文献[1]给出了六种解法,但笔者认为最简洁的是下面的解法:

当 $n\geqslant 3$ 时,可得

$$x_n=(\alpha+\beta)x_{n-1}-\alpha\beta x_{n-1}$$

$$x_n-\alpha x_{n-1}=\beta(x_{n-1}-\alpha x_{n-2})$$

所以

$$x_{n+1}-\alpha x_n=\beta^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)\tag{①}$$

同理,有

$$x_n-\beta x_{n-1}=\alpha(x_{n-1}-\beta x_{n-2})$$

$$x_{n+1}-\beta x_n=\alpha^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)\tag{②}$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时,视①②为 $x_n,x_{n+1}$ 的二元一次方程组,容易解得

$$x_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\tag{③}$$

当 $\alpha=\beta$ 时,①即

$$x_{n+1}-\alpha x_n=\alpha^{n+1}\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

$$x_{n+1}-\alpha x_n=\alpha^{n+1}\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

又当 $\alpha=0$ 时,易得 $x_{n+1}=x_n(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $x_n=x_1=p=2\alpha=0$ $(n\in\mathbf{N}^*)$;

又当 $\alpha\neq 0$ 时,易得

$$\frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{x_n}{\alpha^n}=1\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

所以

$$\frac{x_n}{\alpha^n}=\frac{p}{\alpha}+(n-1)\cdot 1=n+1\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

$$x_n = (n+1)\alpha^n \quad (n \in \mathbf{N}^*) \tag{④}$$

所以当 $\alpha = \beta$ 时,均有 ④ 成立.

由 ③,④,得第(2) 问的答案为

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ (n+1)\alpha^n & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

以上解法也给出了求二阶线性递归数列通项公式的简洁求法.

# 2008 年高考试题(四川理科卷)第 20 题的另解

2008 年高考试题(四川理科卷) 第 20 题是:

设数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,已知 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$.

(I) 证明:当 $b=2$ 时,$\{a_n-n\cdot 2^{n-1}\}$是等比数列;

(II) 求$\{a_n\}$的通项公式.

**解** 由题意,在 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$ 中,令 $n=1$,可求得 $a_1=2$.

由 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$,得 $ba_{n-1}-2^{n-1}=(b-1)S_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,两式相减得

$$b(a_n-a_{n-1})-2^{n-1}=(b-1)a_n$$

$$a_n=ba_{n-1}+2^{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*) \qquad ①$$

(I) 当 $b=2$ 时,由 ① 知,$a_n=2a_{n-1}+2^{n-1}$,于是

$$a_n-n\cdot 2^{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-1}=2[a_{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-2}]$$
$$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$$

又 $a_1-1\cdot 2^{1-1}=1\neq 0$,所以$\{a_n-n\cdot 2^{n-1}\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

(II) 当 $b=2$ 时,由(I) 知,$a_n-n\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$,即

$$a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1} \qquad ②$$

当 $b\neq 2$ 时,由 ① 的两边同时除以 $2^n$ 得

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{b}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}$$

可设

$$\frac{a_n}{2^n}+\lambda=\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\lambda\right) \qquad ③$$

展开 ③ 得$\frac{a_n}{2^n}=\frac{b}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{b-2}{2}\cdot\lambda$,再与 ③ 相比较,得

$$\frac{b-2}{2}\cdot\lambda=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{b-2}$$

所以

$$\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{b-2}=\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{b-2}\right)$$

所以$\left\{\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{b-2}\right\}$是公比为$\frac{b}{2}$首项为$1+\frac{1}{b-2}=\frac{b-1}{b-2}$的等比数列　④

$$\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{b-2}=\frac{b-1}{b-2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{b-1}{b-2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{b-2}$$

$$a_n=2^n\left[\frac{b-1}{b-2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{b-2}\right]=\frac{2(b-1)b^{n-1}-2^n}{b-2} \quad ⑤$$

（以上解答可见湖北大学《中学数学2008增刊——全国各地高考数学试题分类解析》第63页）

笔者发现以上解答有误：在第(II)问中，当$b=0$时，由题设及①，得

$$a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 2^{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases} \quad ⑥$$

而这与以上答案⑤在$b=0$时的结果$a_n=2^{n-1}$不同，以上解答产生错误的原因是：当$b=0$时，④不成立！只有当$b\neq 0$时，以上解答才是正确的．所以第(II)问的完整答案是：

当$b=0$时，$a_n$由⑥确定；当$b=2$时，$a_n$由②确定；当$b\neq 0,2$时，$a_n$由⑤确定．

下面再给出第(II)问的另一解法：

当$b=0$时的解答同⑥的推导过程．

当$b\neq 0$时，由①可得

$$\frac{a_n}{b^n}-\frac{a_{n-1}}{b^{n-1}}=\frac{1}{b}\left(\frac{2}{b}\right)^{n-1}(n\geqslant 2) \quad ⑦$$

当$b=2$时，$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是公差为$\frac{1}{2}$首项为1的等差数列，所以

$$\frac{a_n}{2^n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2},a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}$$

（由此也可给出第(I)问的另一解法）

当$b\neq 0,2$时，在⑦中设$\frac{a_n}{b^n}=c_n$，得$c_n-c_{n-1}=\frac{1}{b}\left(\frac{2}{b}\right)^{n-1}(n\geqslant 2)$，所以

$$\frac{a_n}{b^n}=c_n=c_1+(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+\cdots+(c_n-c_{n-1})=$$

$$\frac{2}{b}+\frac{1}{b}\left[\frac{2}{b}+\left(\frac{2}{b}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{b}\right)^{n-1}\right]=\frac{2}{b}+\frac{\frac{2}{b}-\left(\frac{2}{b}\right)^n}{b-2}$$

$$a_n=\frac{2(b-1)b^{n-1}-2^n}{b-2}$$

# 再谈用验证法求数列通项

文献[1]通过两道高考题(2007年陕西理22题、2005年江苏卷23题)的解法介绍了求数列通项公式的一种简单方法——验证法,本文再用这种方法给出文献[2]例1、例2的这种简单解法.

**例1** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$,$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$,求$a_n$.

**解** 首先,由首项$a_1=\frac{1}{2}$及递推关系$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$知,满足题意的数列$\{a_n\}$是唯一确定的,所以,若能找到一个数列满足该题目的所有条件,则该数列的通项公式就是所求的答案.这种方法也就是文献[1]介绍的用验证法求数列通项.

易得$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\left(k-\frac{1}{n+1}\right)-\left(k-\frac{1}{n}\right)$,即$a_n=k-\frac{1}{n}$($k$是常数)满足递推关系$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$,再由$a_1=\frac{1}{2}$,得$a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$满足题目的所有条件,所以本题的答案就是$a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$.

**例2** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{2}{3}$,$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$,求$a_n$.

**解** 易知本题的答案是唯一确定的,所以,只需寻求一个数列满足该题目的所有条件.

易得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{k}{n+1}}{\frac{k}{n}}$($k$是非零常数),即$a_n=\frac{k}{n}$满足递推关系$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$,再由$a_1=\frac{2}{3}$,得$a_n=\frac{2}{3n}$满足题目的所有条件,所以本题的答案就是$a_n=\frac{2}{3n}$.

因为绝大部分求数列通项公式的题目答案都是唯一的,所以只要能观察或求出满足所有题设的一个通项公式,则该通项公式就是所求的唯一答案.

# 参考文献

[1] 甘志国.用验证法求数列通项两例[J].中学数学月刊,2008(3):46.
[2] 王凯.求通项6招[J].数理天地,2008(11):11.

# 已知正整数的全部正整数等差分拆

把正整数 $M$ 表示成 $n(n\geqslant 3)$ 个正整数之和，且这 $n$ 个正整数成公差为正整数的等差数列，叫做 $M$ 的一组正整数等差分拆，文献[1] 给出了已知正整数的部分正整数等差分拆，本文给出已知正整数的全部正整数等差分拆.

设 $M=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，要求 $M$ 的全部正整数等差分拆，即求出

$$M=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d(M\text{ 是已知的正整数},n,a_1,d\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3) \quad ①$$

的全部解.

## 1 $n$ 是奇数时

**定理 1** 当 $n$ 是奇数时，① 的全部解为

$$\begin{cases} n=n_i(i=1,2,\cdots,|A|) \\ d=1,2,\cdots,d_i \\ a_1=\frac{M}{n}-\frac{n-1}{2}d \end{cases} \quad ②$$

其中 $A=\left\{n\mid n\text{ 是}M\text{ 的奇因数},3\leqslant n<\frac{1+\sqrt{8M+1}}{2}\right\}=\{n_i\mid i=1,2,\cdots,|A|\}$（$|A|$ 表示集合 $A$ 的元素个数），$d_i$ 是小于 $\frac{2M}{n_i(n_i-1)}$ 的最大正整数，此时，① 的解的组数为 $\sum\limits_{i=1}^{|A|}d_i$.

**证明** 先证 ② 是 ① 的解.

因为 $a_1=\frac{M}{n}-\frac{n-1}{2}d$，所以 $M=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

有 $n,d\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3$.

因为 $n\mid M$，$n$ 是奇数，所以 $a_1\in\mathbf{Z}$.

因为 $d_i<\frac{2M}{n_i(n_i-1)}$，$d\leqslant d_i$，$n=n_i$，所以 $d<\frac{2M}{n(n-1)}$，$a_1=\frac{M}{n}-\frac{n-1}{2}d>0$，得 $a_1\in\mathbf{N}^*$，② 是 ① 的解.

再证当 $n$ 是奇数时,① 的解均可表为 ② 的形式.

因为 $n$ 是奇数,所以 $n \mid M, M = n\left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right), a_1 = \frac{M}{n} - \frac{n-1}{2}d > 0$.

所以 $1 \leqslant d < \frac{2M}{n(n-1)}, n(n-1) < 2M$,得 $n < \frac{1+\sqrt{8M+1}}{2}$,又 $n \geqslant 3$,设 $A = \left\{n \mid n\text{ 是 }M\text{ 的奇因数},3 \leqslant n < \frac{1+\sqrt{8M+1}}{2}\right\} = \{n_i \mid i = 1,2,\cdots,|A|\}$,有 $n \in A$,设 $n = n_i, i \in \{1,2,\cdots,|A|\}$.

又 $d < \frac{2M}{n(n-1)} = \frac{2M}{n_i(n_i-1)}$,设 $d_i$ 是小于 $\frac{2M}{n_i(n_i-1)}$ 的最大正整数,有 $d \in \{1,2,\cdots,d_i\}$.

由 $M = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,得 $a_1 = \frac{M}{n} - \frac{n-1}{2}d$.

得 $n$ 是奇数时,① 的解均可表为 ② 的形式.

**推论1**　设 $n_0(n_0 \geqslant 3)$ 是 $M$ 的最小奇因数,$d_0$ 是小于 $\frac{2M}{n_0(n_0-1)}$ 的最大正整数,则存在公差为 $1,2,\cdots,d_0$ 的 $M$ 的奇数项正整数等差分拆;不存在公差大于 $d_0$ 的 $M$ 的奇数项正整数等差分拆,$M$ 的奇数项连续正整数分拆有且只有 $|A|$ 个.

**推论2**　$M$ 的 $n$($n$ 是奇数)项正整数等差分拆中,$n \mid M$;对于任意的 $n_i \in A$,存在 $M$ 的 $n_i$ 项正整数等差分拆,有且只有 $d_i$ 个,公差分别为 $1,2,\cdots,d_i$.

**定理2**　若 $n$ 是奇数,$d$ 已知,$A_d = \left\{n \mid n\text{ 是 }M\text{ 的奇因数},3 \leqslant n < \frac{d+\sqrt{8Md+d^2}}{2d}\right\} = \{n_i \mid i = 1,2,\cdots,|A_d|\}$,则 ① 的全部解为

$$\begin{cases} n = n_i \\ a_1 = \dfrac{M}{n_i} - \dfrac{n_i - 1}{2}d \end{cases}$$

解的组数为 $|A_d|$.

(定理 2 ~ 6 的证明均同定理 1,过程略去.)

由定理 1,推论 1,定理 2,还可得 $\sum_{d=1}^{d_0} |A_d| = \sum_{i=1}^{|A|} d_i$.

由定理 1 可得 $M$($M$ 已知)的全部奇数项正整数等差分拆;由定理 2 可得 $M$ 的全部奇数项公差为 $d$($d$ 已知)的正整数等差分拆.

## 2　$n, d$ 是偶数时

**定理3**　当 $n, d$ 是偶数时,① 的全部解为

$$\begin{cases} n = n_i(i = 1,2,\cdots,|B|) \\ d = 2,4,\cdots,2d'_i \\ a = \dfrac{M}{n} - \dfrac{n-1}{2}d \end{cases}$$

其中 $B = \{n \mid n$ 是$M$的偶因数,$4 \leqslant n < \dfrac{1+\sqrt{4M+1}}{2}\} = \{n_i \mid i = 1,2,\cdots,|B|\}$,$2d'_i$ 是小于$\dfrac{2M}{n_i(n_i-1)}$ 的最大偶数.此时,① 的解的组数为 $\sum\limits_{i=1}^{|B|} d'_i$.

**推论3** 设 $n_0(n_0 \geqslant 4)$ 是 $M$ 的最小偶因数,$2d'_0$ 是小于$\dfrac{2M}{n_i(n_i-1)}$ 的最大偶数,则存在公差为 $2,4,\cdots,2d'_0$ 的 $M$ 的偶数项正整数等差分拆;不存在公差是偶数且大于 $2d'_0$ 的 $M$ 的偶数项正整数等差分拆,$M$ 的偶数项连续偶数分拆有且只有 $|B|$ 个.

**推论4** 在 $M$ 的$2n$ 项正整数等差(公差为偶数)分拆中,$2n \mid M$;对于任意的 $n_i \in B$,存在 $M$ 的 $n_i$ 项正整数等差(公差为偶数) 分拆,且有且只有 $d'_i$ 个,公差分别为 $2,4,\cdots,2d'_i$.

**定理4** 若 $n,d$ 是偶数,$d$ 已知,$B_d = \{n \mid n$ 是 $M$ 的偶因数,$4 \leqslant n < \dfrac{d+\sqrt{8Md+d^2}}{2d}\} = \{n_i \mid i = 1,2,\cdots,|B_d|\}$(可证 $B_2 = B$),则 ① 的全部解为

$$\begin{cases} n = n_i \\ a_1 = \dfrac{M}{n_i} - \dfrac{n_i-1}{2}d \end{cases}$$

解的组数为 $|B_d|$.

由定理 3 可得到 $M$($M$ 已知) 的全部偶数项正整数等差(公差为偶数) 分拆,由定理 4 可得到 $M$ 的全部偶数项公差为$d$($d$ 是已知的偶数) 的正整数等差分拆.

## 3 $n$ 是偶数,$d$ 是奇数时

**定理5** 当 $n$ 是偶数,$d$ 是奇数时,① 的全部解为

$$\begin{cases} n = n_i(i = 1,2,\cdots,|C|) \\ d = 1,3,5,\cdots,d''_i \\ a_1 = \dfrac{M}{n} - \dfrac{n-1}{2}d \end{cases}$$

其中 $C = \{n \mid n$ 是 $2M$ 的偶因数,$n \nmid M,4 \leqslant n < \dfrac{1+\sqrt{8M+1}}{2}\} = \{n_i \mid i =$

$1,2,\cdots,|C|\}$，$d''_i$ 是小于 $\frac{2M}{n_i(n_i-1)}$ 的最大奇数. 此时，① 的解的组数为 $\sum_{i=1}^{|C|}\left(\frac{d''_i+1}{2}\right)$.

**推论5**　设 $n_0(n_0\geqslant 4)$ 是 $M$ 的最小偶因数，且 $n_0\mid 2M$，$n_0\nmid M$，$d''_0$ 是小于 $\frac{2M}{n_0(n_0-1)}$ 的最大奇数，则存在公差为 $1,3,5,\cdots,d''_0$ 的 $M$ 的偶数项正整数等差分拆，不存在公差是奇数且大于 $d''_0$ 的 $M$ 的偶数项正整数等差分拆. $M$ 的偶数项连续奇数分拆有且只有 $|C|$ 个.

**推论6**　在 $M$ 的 $2n$ 项正整数等差(公差为奇数)分拆中，$n\mid M$；对于任意的 $n_i\in C$($C$ 见定理5)，存在 $M$ 的 $n_i$ 项正整数等差(公差为奇数)分拆，且有且只有 $\frac{d''_i+1}{2}$ 个，公差分别为 $1,3,5,\cdots,d''_i$.

**定理6**　若 $n$ 是偶数，$d$ 是已知的奇数，$C_d=\{n\mid n\nmid M, n\mid 2M, 2\mid n, 4\leqslant n<\frac{d+\sqrt{8Md+2d^2}}{2d}\}=\{n_i\mid i=1,2,\cdots,|C_d|\}$，则 ① 的全部解为

$$\begin{cases} n=n_i \\ a_1=\dfrac{M}{n_i}-\dfrac{n_i-1}{2}d \end{cases}$$

解的组数为 $|C_d|$.

由定理5可得到 $M$($M$ 已知) 的全部偶数项正整数等差(公差为奇数) 分拆；由定理6可得到 $M$ 的全部偶数项正整数等差(公差为已知的奇数 $d$) 分拆.

由定理1,3,5可求出 $M$ 的全部正整数等差分拆；由定理2,4,6可求出 $M$ 的全部正整数等差(公差 $d$ 已知) 分拆.

由文献[1] 的有关结论，得

**定理7**　正整数 $M$ 存在正整数等差分拆 $\Leftrightarrow M$ 是合数，且 $4<M\neq 8$.

**例1**　求 $2^k(k\geqslant 4)$ 的全部正整数等差分拆.

**解**　即用定理1,3,5求 $M=2^k$ 时 ① 的全部解.

用定理1求得无解.

用定理3来求：

$$B=\left\{2^{i+1}\mid 2^{i+1}<\frac{1+\sqrt{2^{k+2}+1}}{2}\right\}$$

所以 $2^{i+2}<1+\sqrt{2^{k+2}+1}$，可证 $\sqrt{2^{k+2}+1}\notin \mathbf{N}^*$.

(假设 $2^{k+2}+1=a^2(a\in\mathbf{N}^*)$，$2^k=\frac{a+1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}$. 由 $\left(\frac{a+1}{2},\frac{a-1}{2}\right)=1$，

得$\frac{a-1}{2}=1,\frac{a+1}{2}=2^k$,所以 $a=3,k=1$,这与 $k\geqslant 4$ 矛盾!)

所以 $2^{i+2}\leqslant 1+[\sqrt{2^{k+2}+1}]$,可证$[\sqrt{2^{k+2}+1}]=[\sqrt{2^{k+2}}]$.

所以 $2^{i+2}\leqslant 1+[2\sqrt{2^k}],i\leqslant \log_2(1+[2\sqrt{2^k}])-2$.

所以 $B=\{2^{i+1}\mid i=1,2,\cdots,[\log_2(1+[2\sqrt{2^k}])]-2\},n=2^{i+1}$,又设 $d'_i$ 是小于$\frac{2^{k-i-1}}{2^{i+1}-1}$的最大正整数,得此时的解为

$$\begin{cases}n=2^{i+1}\\d=2,4,\cdots,2d'_i\\a_1=\frac{M}{n}-\frac{n-1}{2}d\end{cases}$$

用定理 5 求得无解($C$ 中的元素只能是 $n=2M$,但 $2M<\frac{1+\sqrt{8M+1}}{2}$ 不成立,所以 $C=\varnothing$).

**例 2** 求 $2^k(k\geqslant 4)$ 的全部公差为 2 的正整数等差分拆.

**解** 由例 1 知,只需用定理 4 求解.

$$B_2=B=\{2^{i+1}\mid i=1,2,\cdots,[\log_2(1+[2\sqrt{2^k}])]-2\}$$

全部分拆由

$$\begin{cases}n=2^{i+1}\\a_1=2^{k-i-1}-2^{i+1}+1(i=1,2,\cdots,[\log_2(1+[2\sqrt{2^k}])]-2)\end{cases}\qquad ③$$

确定.

可证 $2^k>\frac{1+\sqrt{2^{k+2}+1}}{2}$,所以 $2^k>2^{i+1},k>i+1$,所以 $2\mid 2^{k-i-1},a_1$ 是奇数.

由例 1,2,得

**定理 8** (1) 不存在 $2^k(k\in\mathbf{N}^*)$ 的连续正整数(或连续偶数) 分拆;

(2) 存在 $2^k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 4)$ 的连续奇数分拆, 有且只有 $[\log_2(1+[2\sqrt{2^k}])]-2$ 种分拆(由 ③ 确定).

文献[1] 并未求出正整数的全部正整数等差分拆(未给出偶数项公差为奇数的等差分拆),但例题的解答须用到全部分拆,经笔者用本文的定理验证知,文献[1] 例 1,3 的结论均对,但例 2 中式④应改为 $N=17+18+\cdots+38$(22项),三道例题均求出了全部解.

# 参考文献

[1] 李建章.自然数的等差分拆公式[J].数学通讯,1994(6):35-37.

# 周期数列$\{A_n = a^n$ 的末 $k$ 位数$\}$的最小正周期

$N = \overline{a_n \cdots a_k \cdots a_1}$ 是用位置原则表示的十进制数,把$\overline{a_k \cdots a_1}$ 叫做 $N$ 的末 $k$ 位数.如 203 的末 2 位数是$\overline{03} = 3$,$N_1$ 与 $N_2$ 的末 $k$ 位数相同$\Leftrightarrow 10^k \mid N_1 - N_2$.

若 $a$ 是已知的正整数,则$\{A_n = a^n$ 的末$k$位数$\}$是周期数列(但 $10 \mid a$ 时的情形见本文定理 10),这是已有的结论,本文进一步研究$\{A_n\}$的最小正周期,得到了完整的结论.

约定,下文中的字母除特别说明外均表示正整数.

## 1 预备定理

**定理 1** (1) 若 $\alpha \geqslant 2, 2^\alpha \parallel a - 1, k \geqslant \alpha$,则 $2^k \parallel a^{2^{k-\alpha}} - 1$;

(2) 若 $2 \parallel a - 1, 2^\alpha \parallel a + 1$(则 $\alpha \geqslant 2$),$k \geqslant \alpha + 1$,则 $2^k \parallel a^{2^{k-\alpha}} - 1$.

**证明** (1) 当 $k = \alpha$ 时成立.

当 $k = \alpha + 1$ 时,因为 $2^\alpha \parallel a - 1, \alpha \geqslant 2$,所以 $2 \parallel a + 1$. 得 $2^{\alpha+1} \parallel (a - 1)(a + 1)$, 即 $2^{\alpha+1} \parallel a^2 - 1$,此时成立.

假设 $k(k \geqslant \alpha + 1)$ 时成立,$2^k \parallel a^{2^{k-\alpha}} - 1$.

$a^{2^{k-\alpha}} + 1 = (a^{2^{k-\alpha-1}})^2 + 1 = (\text{奇数})^2 + 1$,所以 $2 \parallel a^{2^{k-\alpha}} + 1$.

$$2^{k+1} \parallel (a^{2^{k-\alpha}} - 1)(a^{2^{k-\alpha}} + 1), 2^{k+1} \parallel a^{2^{k+1-\alpha}} - 1$$

得 $k + 1$ 时成立,所以结论(1)成立.

(2) 当 $k = \alpha + 1$ 时,$2^{\alpha+1} \parallel (a - 1)(a + 1)$,即 $2^{\alpha+1} \parallel a^2 - 1$,此时成立.

假设 $k(k \geqslant \alpha + 1)$ 时成立,同(1)可证得 $k + 1$ 时成立.所以结论(2)成立.

**定理 2** 在定理 1(1) 或(2) 的条件下,又 $2^k \mid a^r - 1$,则 $2^{k-\alpha} \mid r$.

**证明** (1) 在定理 1(1) 的条件下($k \geqslant \alpha$).

当 $k = \alpha$ 时成立.

假设 $k$ 时成立,下证 $k + 1$ 时成立.

设 $2^{k+1} \mid a^r - 1$,有 $2^k \mid a^r - 1$,由假设得 $2^{k-\alpha} \mid r$,若 $2^{k+1-\alpha} \nmid r$,得 $r = 2^{k-\alpha}(2l + 1) = l \cdot 2^{k+1-\alpha} + 2^{k-\alpha} (l \geqslant 0)$.

$2^{k+1} \mid a^r - 1, a^r - 1 = a^{l \cdot 2^{k+1-\alpha}} \cdot a^{2^{k-\alpha}} - 1$,又由定理 1(1) 得 $2^{k+1} \mid a^{2^{k+1-\alpha}} -$

1,所以 $2^{k+1} \mid a^{2^k-\alpha}-1$,这与定理 1(1) 矛盾!所以 $2^{k+1-\alpha} \mid r$.

$k+1$ 时成立,所以此时定理 2 成立.

(2) 在定理 1(2) 的条件下($k \geqslant \alpha+1$).

当 $k=\alpha+1$ 时,$2^{\alpha+1} \parallel a^2-1$,且指数 2 最小(因为 $2^{\alpha+1} \nmid a-1$),又 $2^{\alpha+1} \mid a^r-1$,所以 $2 \mid r$,此时成立.

假设 $k$ 时成立,同(1) 可证得 $k+1$ 时成立.

所以此时定理 2 也成立.

**定理 3** 若 $a$ 是已知数,$5 \mid a^{\beta_0}-1$,$\beta_0$ 最小(则 $5 \nmid a$,$\beta_0=1,2$ 或 4),且 $5^\beta \parallel a^{\beta_0}-1$,$k \geqslant \beta$,则 $5^k \parallel a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$.

**证明** 当 $k=\beta$ 时成立.

假设 $k$ 时成立,可设 $a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1=m \cdot 5^k+1$,$5 \nmid m$.

$$a^{\beta_0 \cdot 5^{k+1-\beta}}-1=(a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}})^5-1=(m \cdot 5^k+1)^5-1=$$
$$(m \cdot 5^k)^5+\cdots+C_5^3(m \cdot 5^k)^2+m \cdot 5^{k+1}$$

所以 $5^{k+1} \parallel a^{\beta_0 \cdot 5^{k+1-\beta}}-1$,得 $k+1$ 时也成立.

所以定理 3 成立.

**定理 4** 在定理 3 的条件下,又 $5^k \mid a^r-1$,则 $\beta_0 \cdot 5^{k-\beta} \mid r$.

**证明** 当 $k=\beta$ 时,$5 \mid a^{\beta_0}-1$,$\beta_0$ 最小,又 $5^k \mid a^r-1$,所以 $5 \mid a^r-1$,$\beta_0 \mid r$,此时成立.

假设 $k$ 时成立,下证 $k+1$ 时成立.

设 $5^{k+1} \mid a^r-1$,得 $5^k \mid a^r-1$,由假设得 $\beta_0 \cdot 5^{k-\beta} \mid r$,若 $\beta_0 \cdot 5^{k+1-\beta} \nmid r$,得 $r=\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}(5l+t)$,$l \geqslant 0$,$t=1,2,3,4$.

$$5^{k+1} \mid a^r-1,\ a^r-1=a^{l\beta_0 \cdot 5^{k+1-\beta}} \cdot a^{t\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$$

又由定理 3,知 $5^{k+1} \mid a^{l\beta_0 \cdot 5^{k+1-\beta}}-1$,所以 $5^{k+1} \mid a^{t\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$,即

$$5^{k+1} \mid (a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1) \cdot \frac{a^{t\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1}{a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1}$$

因为 $5^k \mid a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$,所以可证 $5 \nmid \dfrac{a^{t\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1}{a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1}$($t=1,2,3,4$),所以 $5^{k+1} \mid a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$,这与定理 3 矛盾!所以 $\beta_0 \cdot 5^{k+1-\beta} \mid r$,得 $k+1$ 时成立,所以定理 4 成立.

**定理 5** (1) 若 $\alpha \geqslant 2$,$2^\alpha \parallel a-1$,$5 \mid a^{\beta_0}-1$,$\beta_0$ 最小,且 $5^\beta \parallel a^{\beta_0}-1$,$[2^{k-\alpha}, \beta_0 \cdot 5^{k-\beta}]=M$,$k \geqslant \alpha$ 且 $k \geqslant \beta$,则 $10^k \parallel a^M-1$.

**证明**　定理5包含了定理1,3的条件,所以$2^k \mid a^{2^{k-\alpha}}-1$,得$2^k \mid a^M-1$;$5^k \mid a^{\beta_0\cdot 5^{k-\beta}}-1$,得$5^k \mid a^M-1$,所以$10^k \mid a^M-1$.

假设$10^{k+1} \mid a^M-1$,得$5^{k+1} \mid a^M-1$,所以$\beta_0\cdot 5^{k+1-\beta} \mid M$,又$M \mid 2^{k-\alpha}\cdot\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$,所以$\beta_0\cdot 5^{k+1-\beta} \mid 2^{k-\alpha}\cdot\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$,$5 \mid 2^{k-\alpha}$,这不可能!所以$10^{k+1} \nmid a^M-1$,即$10^k \| a^M-1$.

**定理6**　在定理5(1)或(2)的条件下,又$10^k \mid a^r-1$,则$M \mid r$.

**证明**　得$2^k \mid a^r-1$,所以$2^{k-\alpha} \mid r$;$5^k \mid a^r-1$,$\beta_0\cdot 5^{k-\beta} \mid r$,所以$10^k \mid a^r-1$时,$M \mid r$.

## 2　当$(a,10)=1$时,$\{A_n\}$的最小正周期

**定理7**　(1)当$\alpha\geqslant 2$,$2^\alpha \| a-1$,$5 \mid a^{\beta_0}-1$,$\beta_0$最小,且$5^\beta \| a^{\beta_0}-1$,$s>n$.

①又$k\geqslant\alpha$且$k\geqslant\beta$时,设$[2^{k-\alpha},\beta_0\cdot 5^{k-\beta}]=M$,则$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+tM$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$M$);

②又$\alpha\leqslant k<\beta$时,设$[2^{k-\alpha},\beta_0]=M_1$,则$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+tM_1$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$M_1$);

③又$\beta\leqslant k<\alpha$时,$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+t\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$);

④又$k<\alpha$且$k<\beta$时,$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow a=n+t\beta_0$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$\beta_0$).

(2)当$2 \| a-1$,$2^\alpha \| a+1$,$5 \mid a^{\beta_0}-1$,$\beta_0$最小,且$5^\beta \| a^{\beta_0}-1$,$s>n$.

①又$k=1$时,$10 \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+t\beta_0$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$\beta_0$);

②又$k\geqslant\alpha+1$且$k\geqslant\beta$时,设$[2^{k-\alpha},\beta_0\cdot 5^{k-\beta}]=M$,则$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+tM$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$M$);

③又$\alpha+1\leqslant k<\beta$时,设$[2^{k-\alpha},\beta_0]=M_1$,则$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+tM_1$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$M_1$);

④又$\beta\leqslant k<\alpha+1$且$k>1$时,设$[2,\beta_0\cdot 5^{k-\beta}]=M_2$,则$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+tM_2$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$M_2$);

⑤又$1<k<\alpha+1$且$k<\beta$时,设$[2,\beta_0]=M_3$,则$10^k \mid a^s-a^n \Leftrightarrow s=n+tM_3$(此时$\{A_n\}$的最小正周期是$M_3$).

**证明**　(1)①$\Rightarrow$因为$10^k \mid a^s-a^n$,$a^s-a^n=a^n(a^{s-n}-1)$,所以$10^k \mid a^{s-n}-1$,$M \mid s-n$(定理6),$s=n+tM$.

$\Leftarrow$得$M \mid s-n$.又$10^k \mid a^M-1$(定理5),所以$10^k \mid a^{s-n}-1$,$10^k \mid a^s-a^n$.

②$\Rightarrow$得$2^k \mid a^{s-n}-1$,$k\geqslant\alpha$,所以$2^{k-\alpha} \mid s-n$(定理2).

由 $5^k \mid a^{s-n}-1$，$k \geqslant \alpha$，所以 $5 \mid a^{s-n}-1$．由 $5 \mid a^{\beta_0}-1$，$\beta_0$ 最小，得 $\beta_0 \mid s-n$，得 $M_1 \mid s-n$，$s=n+tM_1$．

$\Leftarrow$ 因为 $k \geqslant \alpha$，所以 $2^k \mid a^{2^{k-\alpha}}-1$（定理1(1)）．因为 $2^{k-\alpha} \mid M_1$，$M_1 \mid s-n$，所以 $2^k \mid a^{s-n}-1$．

因为 $5^{\beta} \mid a^{\beta_0}-1$，$k<\beta$，$\beta_0 \mid M_1$，$M_1 \mid s-n$，所以 $5^k \mid a^{s-n}-1$．

所以 $10^k \mid a^{s-n}-1$，$10^k \mid a^s-a^n$．

③$\Rightarrow$ 由 $5^k \mid a^{s-n}-1$，$k \geqslant \beta$，所以 $\beta_0 \cdot 5^{k-\beta} \mid s-n$（定理4），$s=n+t\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}$．

$\Leftarrow$ 由 $k \geqslant \beta$，得 $5^k \mid a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$（定理3），由 $\beta_0 \cdot 5^{k-\beta} \mid s-n$，得 $5^k \mid a^{s-n}-1$．

由 $2^{\alpha} \mid a-1$，$k<\alpha$，得 $2^k \mid a^{s-n}-1$．

所以 $10^k \mid a^{s-n}-1$，$10^k \mid a^s-a^n$．

④$\Rightarrow$ 由 $5 \mid a^{s-n}-1$，得 $\beta_0 \mid s-n$，$s=n+t\beta_0$．

$\Leftarrow$ 由 $k<\alpha$ 且 $k<\beta$，得 $2^k \mid a-1$，$5^k \mid a^{\beta_0}-1$，由 $\beta_0 \mid s-n$，得 $10^k \mid a^{s-n}-1$，$10^k \mid a^s-a^n$．

(2)①$\Rightarrow$ 由 $5 \mid a^{s-n}-1$，得 $\beta_0 \mid s-n$，$s=n+t\beta_0$．

$\Leftarrow$ 由 $5 \mid a^{\beta_0}-1$，$\beta_0 \mid s-n$，得 $5 \mid a^{s-n}-1$，又 $2 \mid a^{s-n}-1$，所以 $10 \mid a^{s-n}-1$，$10 \mid a^s-a^n$．

② 同(1)① 的证明．

③ 同(1)② 的证明．

④$\Rightarrow$ 由 $2^k \mid a^{s-n}-1$，$1<k<\alpha+1$，得 $2^k \mid a^2-1$，且指数 2 最小，所以 $2 \mid s-n$．

由 $5^k \mid a^{s-n}-1$，$k \geqslant \beta$，得 $\beta_0 \cdot 5^{k-\beta} \mid s-n$（定理4）．

所以 $M_2 \mid s-n$，$s=n+tM_2$．

$\Leftarrow$ 因为 $k<\alpha+1$ 即 $k \leqslant \alpha$，所以由 $2^k \mid a^2-1$，得 $2^k \mid a^{s-n}-1$．

由 $k \geqslant \beta$，$5^k \mid a^{\beta_0 \cdot 5^{k-\beta}}-1$（定理3），得 $5^k \mid a^{s-n}-1$．

所以 $10^k \mid a^{s-n}-1$，$10^k \mid a^s-a^n$．

⑤$\Rightarrow$ 由 $2^k \mid a^{s-n}-1$，同上得 $2 \mid s-n$．

由 $5 \mid a^{s-n}-1$，得 $\beta_0 \mid s-n$．

所以 $M_3 \mid s-n$，$s=n+tM_3$．

$\Leftarrow$ 由 $k \leqslant \alpha$，得 $2^k \mid a^2-1$，$2^k \mid a^{s-n}-1$．

由 $k<\beta$，得 $5^k \mid a^{\beta_0}-1$，$5^k \mid a^{s-n}-1$．

所以 $10^k \mid a^{s-n}-1$，$10^k \mid a^s-a^n$．

## 3　当$(a,10)=2$时,$\{A_n\}$的最小正周期

**定理8**　$a$是已知数,$5\mid a^{\beta_0}-1$,$\beta_0$最小,且$5^{\beta}\parallel a^{\beta_0}-1$,$2^k\mid a^{n_0}$,$s>n\geqslant n_0$.

(1) 当$k\geqslant\beta$时,$10^k\mid a^s-a^n\Leftrightarrow s=n+t\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$(此时$\{A_n\}_{n\geqslant n_0}$的最小正周期是$\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$);

(2) 当$k<\beta$时,$10^k\mid a^s-a^n\Leftrightarrow s=n+t\beta_0$(此时$\{A_n\}_{n\geqslant n_0}$的最小正周期是$\beta_0$).

**证明**　(1)$\Rightarrow$得$10^k\mid a^n(a^{s-n}-1)$,因为$2^k\mid a^n$,$5\nmid a$,所以$5^k\mid a^{s-n}-1$.由$k\geqslant\beta$,得$\beta_0\cdot 5^{k-\beta}\mid s-n$(定理4),$s=n+t\beta_0\cdot 5^{k-\beta}$.

$\Leftarrow$由$k\geqslant\beta$,得$5^k\mid a^{\beta_0\cdot 5^{k-\beta}}-1$(定理3),所以$5^k\mid a^{s-n}-1$,又$2^k\mid a^n$,所以$10^k\mid a^s-a^n$.

(2)$\Rightarrow$得$5\mid a^{s-n}-1$,所以$\beta_0\mid s-n$,$s=n+t\beta_0$.

$\Leftarrow$由$5^{\beta}\mid a^{\beta_0}-1$,$k<\beta$,$\beta_0\mid s-n$,得$5^k\mid a^{s-n}-1$,又$2^k\mid a^n$,得$10^k\mid a^s-a^n$.

## 4　当$(a,10)=5$时,$\{A_n\}$的最小正周期

**定理9**　(1) 设$\alpha\geqslant 2$,$2^{\alpha}\parallel a-1$,$5^k\mid a^{n_0}$,$s>n\geqslant n_0$.

① 当$k\geqslant\alpha$时,$10^k\mid a^s-a^n\Leftrightarrow s=n+t\cdot 2^{k-\alpha}$(此时$\{A_n\}_{n\geqslant n_0}$的最小正周期是$2^{k-\alpha}$);

② 当$k<\alpha$时,$10^k\mid a^{n+1}-a^n$(此时$\{A_n\}_{n\geqslant n_0}$是常数列).

(2) 设$2\parallel a-1$,$2^{\alpha}\parallel a+1$,$5^k\mid a^{n_0}$,$s>n\geqslant n_0$.

① 当$k=1$时,$10\mid a^{n+1}-a^n$(此时$\{A_n=a^n$的个位数$\}_{n\geqslant 1}$是常数列);

② 当$k\geqslant\alpha+1$时,$10^k\mid a^s-a^n\Leftrightarrow s=n+t\cdot 2^{k-\alpha}$(此时$\{A_n\}_{n\geqslant n_0}$的最小正周期是$2^{k-\alpha}$);

③ 当$1<k<\alpha+1$时,$10^k\mid a^s-a^n\Leftrightarrow s=n+2t$(此时$\{A_n\}_{n\geqslant n_0}$的最小正周期是2).

**证明**　(1)①$\Rightarrow$由$10\mid a^{s-n}-1$,$k\geqslant\alpha$,得$2^{k-\alpha}\mid s-n$(定理2),$s=n+t\cdot 2^{k-\alpha}$.

$\Leftarrow$由$k\geqslant\alpha$,得$2^k\mid a^{2^{k-\alpha}}-1$(定理1(1)).由$2^{k-\alpha}\mid s-n$,得$2^k\mid a^{s-n}-1$,$10^k\mid a^s-a^n$.

② 由$k<\alpha$,得$2^k\mid a-1$,又$5^k\mid a^n$,所以$10^k\mid a^{n+1}-a^n$.

(2)① 由 $2 \mid a-1, 5 \mid a^n (n \geqslant 1)$,得 $10 \mid a^{n+1}-a^n (n \geqslant 1)$.

② 同(1)①.

③$\Rightarrow$ 由 $2^k \mid a^{s-n}-1, 1 < k \leqslant \alpha$,得 $2 \mid s-n, s = n+2t$.

$\Leftarrow$ 由 $2^{\alpha} \mid a^2-1, 2 \mid s-n, k \leqslant \alpha$,得 $2^k \mid a^{s-n}-1, 10^k \mid a^s - a^n$.

## 5　当$(a,10) = 10$时的情形

**定理 10**　设 $10^{\alpha} \parallel a$,则

(1) 当整数 $n < \frac{k}{\alpha}$ 时,$A_n = a^n$ 的末 $k$ 位数 $\neq 0$;

(2) 当整数 $n \geqslant \frac{k}{\alpha}$ 时,$A_n = a^n$ 的末 $k$ 位数 $= 0$,即$\{A_n\}_{n \geqslant \frac{k}{\alpha}}$ 为常数列$\{0\}$.

**证明**　用 $10^{\alpha n} \parallel a^n$,$a^n$ 的末 $\alpha n$ 位数为 0,末 $\alpha n + 1$ 位数不为 0.

当 $n < \frac{k}{\alpha}$ 时,$k > \alpha n$,所以结论(1)成立.

当 $n \geqslant \frac{k}{\alpha}$ 时,$k \leqslant \alpha n$,所以结论(2)成立.

## 6　举例及应用

**例 1**　求$\{A_n = a^n$ 的末 $k$ 位数$\}$ 的最小正周期:

(1)$a = 1\,975, k = 5$;

(2)$a = 1\,997, k = 5$;

(3)$a = 1\,998, k = 4$;

(4)$a = 1\,999, k = 4$.

**解**　(1) 由定理 9(2)②($\alpha = 3, n_0 = 3$)得,$\{A_n\}_{n \geqslant 3}$ 的最小正周期是 4,可以验证$\{34\,375, 90\,625, 84\,375, 40\,625\}$ 是它的一个周期.

(2) 由定理 7(1)①($\alpha = 2, \beta_0 = 4, \beta = 1, M = 5\,000$)得,$\{A_n\}$ 的最小正周期是 5 000.

(3) 由定理 8(1)($\beta_0 = 4, \beta = 1, n_0 = 4$)得,$\{A_n\}_{n \geqslant 4}$ 的最小正周期是 500.

(4) 由定理 7(2)④($\alpha = 4, \beta_0 = 2, \beta = 3, M_2 = 10$)得,$\{A_n\}$ 的最小正周期是 10.

文献[1] 叙述了自生数的概念:

设 $a$ 是 $k$ 位数(首位数字可为 0),若存在整数 $m \geqslant 2$,使 $10^k \mid a^m - a$,则称 $a$ 是长为 $k$ 的 $m$ 阶自生数,此时,把最小的 $m$ 叫做自生数 $a$ 的次数,记作 $m(a)$.

设 $a$ 是 $k$ 位自生数,则 $m(a) =$ 数列$\{A_n = a^n$ 的末 $k$ 位数$\}$ 的最小正周期 $+1$.

由本文的定理,可得文献[1] 的定理 1,2(定理 1[1] 给出了 $a$ 是自生数的充

要条件),本文的定理解决了求 $m(a)$ 的问题.

**例 2** 求 $m(a)$:

(1)$a$ = 3 125;(2)$a$ = 03 125;(3)$a$ = 13 125;(4)$a$ = 256;(5)$a$ = 11 111.

**解** (1) 由定理 9(1)①($\alpha = 2, k = 4, n_0 = 1$) 得, $m$(3 125) = 5.

(2) 由定理 9(1)①($\alpha = 2, k = 5, n_0 = 1$) 得, $m$(03 125) = 9.

(3) 由 $5^5 \nmid$ 13 125,及文献[1] 定理 1(iii) 知 $m$(13 125) 不存在.

(4) 由定理 8(1)($\beta_0 = \beta = 1, k = 3, n_0 = 1$),得 $m$(256) = 26.

(5) 由定理 7(2)②($\alpha = 3, \beta_0 = \beta = 1, k = 5, M$ = 2 500),得 $m$(11 111) = 2 501.

## 参考文献

[1] 丁义明.再谈自生数[J].数学通讯,1993(4):35-36.

# 两类取整数列的求和公式

文献[1],[2] 给出了一些取整数列的求和公式(但文献[2] 的第一个式子有误,应改为下面的第一个式子):

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{3}\right]=\left[\frac{1}{6}n(n-1)\right]$$

本文给出 $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]^{l}$ 及 $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^{l}}{a}\right]$ ($a$, $l$ 是已知的正整数) 的求和公式.

## 1　预备知识

本文约定,$n$, $a$, $l$ 均表示正整数,同余式的模均为(mod $a$),$S_l(n)=\sum_{i=1}^{n}i^{l}$,并约定 $S_l(-1)=S_l(0)=0$, $T_l(a,j)=\sum_{i=0}^{j}\left[\frac{i^{l}}{a}\right]$ ($j\in\mathbf{N}$).

有很多文献给出了 $S_l(n)$ 的求法(如文献[3] 及其列出的文献)及求和公式(如文献[4],[5]),笔者还尚未见到求 $T_l(a,j)$ 的公式,值得探求.

**预备定理**　当 $\left[\frac{n}{a}\right]\geqslant 1$ 时,有

(1) $\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}i^{l}=aS_l\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+\left[\frac{n}{a}\right]^{l}\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]+1\right)$;

(2) $\sum_{j=0}^{a-1}j^{p}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}i^{l-p}=S_p(a-1)S_{l-p}\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p}S_p\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)$ $(p\in\mathbf{N}^{*}, p<l)$;

(3) $\sum_{j=0}^{a-1}\left(\left[\frac{n-j}{a}\right]+1\right)\left[\frac{j^{l}}{a}\right]=\left[\frac{n}{a}\right]T_l(a,a-1)+T_l\left(a,n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)$.

**证明**　(1) $\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}i^{l}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]}i^{l}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{a}\right]}i^{l}+\cdots+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-(a-1)}{a}\right]}i^{l}=$

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^l+\left[\frac{n}{a}\right]^l & \text{当 } n\equiv 0 \text{ 时} \\ a\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^l+2\left[\frac{n}{a}\right]^l & \text{当 } n\equiv 1 \text{ 时} \\ \qquad\vdots & \\ a\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^l+a\left[\frac{n}{a}\right]^l & \text{当 } n\equiv a-1 \text{ 时} \end{cases}$$

(因为当 $n\equiv j(j=0,1,\cdots,a-1)$ 时，$\left[\frac{n}{a}\right]=\left[\frac{n-1}{a}\right]=\cdots=\left[\frac{n-j}{a}\right]=\left[\frac{n-(j+1)}{a}\right]+1=\cdots=\left[\frac{n-(a-1)}{a}\right]+1$)

以上各种情况，综合等于 $aS_l\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+\left[\frac{n}{a}\right]^l\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]+1\right)$.

(2) $\sum\limits_{j=0}^{a-1} j^p\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]} i^{l-p}=1^p\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{a}\right]} i^{l-p}+2^p\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{a}\right]} i^{l-p}+\cdots+(a-1)^p\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-(a-1)}{a}\right]} i^{l-p}=$

$$\begin{cases} [1^p+2^p+\cdots+(a-1)^p]\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^{l-p} & \text{当 } n\equiv 0 \text{ 时} \\ [1^p+2^p+\cdots+(a-1)^p]\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^{l-p}+1^p\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p} & \text{当 } n\equiv 1 \text{ 时} \\ [1^p+2^p+\cdots+(a-1)^p]\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^{l-p}+(1^p+2^p)\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p} & \text{当 } n\equiv 2 \text{ 时} \\ \qquad\vdots & \qquad\vdots \\ [1^p+2^p+\cdots+(a-1)^p]\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{a}\right]-1} i^{l-p}+[1^p+2^p+\cdots+(a-1)^p]\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p} & \text{当 } n\equiv a-1 \text{ 时} \end{cases}$$

$=S_p(a-1)S_{l-p}\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+S_p(j)\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p}$(其中 $n\equiv j(j=0,1,\cdots,a-1)$) $=$
$S_p(a-1)S_{l-p}\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p}S_p\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)$

(3) $\sum\limits_{j=0}^{a-1}\left(\left[\frac{n-j}{a}\right]+1\right)\left[\frac{j^l}{a}\right]=\left(\left[\frac{n-1}{a}\right]+1\right)\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left(\left[\frac{n-2}{a}\right]+1\right)\left[\frac{2^l}{a}\right]+\cdots+$

$$\left(\left[\frac{n-(a-1)}{a}\right]+1\right)\left[\frac{(a-1)^l}{a}\right]=$$

$$\begin{cases}\left[\frac{n}{a}\right]\left(\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left[\frac{2^l}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{(a-1)^l}{a}\right]\right) & \text{当 } n\equiv 0 \text{ 时}\\ \left[\frac{n}{a}\right]\left(\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left[\frac{2^l}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{(a-1)^l}{a}\right]\right)+\left[\frac{1^l}{a}\right] & \text{当 } n\equiv 1 \text{ 时}\\ \left[\frac{n}{a}\right]\left(\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left[\frac{2^l}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{(a-1)^l}{a}\right]\right)+\left(\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left[\frac{2^l}{a}\right]\right) & \text{当 } n\equiv 2 \text{ 时}\\ \vdots & \vdots\\ \left[\frac{n}{a}\right]\left(\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left[\frac{2^l}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{(a-1)^l}{a}\right]\right)+\left(\left[\frac{1^l}{a}\right]+\left[\frac{2^l}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{(a-1)^l}{a}\right]\right) & \text{当 } n\equiv a-1 \text{ 时}\end{cases}$$

$$=\left[\frac{n}{a}\right]T_l(a,a-1)+T_l(a,j)(\text{其中 } n\equiv j(j=0,1,\cdots,a-1))$$

$$=\left[\frac{n}{a}\right]T_l(a,a-1)+T_l\left(a,n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)$$

## 2 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]^l$ 的求和公式

**定理 1** $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]^l=aS_l\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+\left[\frac{n}{a}\right]^l\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]+1\right)$.

**证明** 当$\left[\frac{n}{a}\right]=0$,即 $n<a$ 时,显然$\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]^l=0$,此时定理 1 成立(因为 $S_l(-1)=0$).

当$\left[\frac{n}{a}\right]\geqslant 1$时,定理 1 中等式左端的 $k$ 包括 $ai+j(j=0,1,\cdots,a-1)$ 形数.

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]^l=\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{ai+j=a}^{n}\left[\frac{ai+j}{a}\right]^l=\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}i^l$$

由预备定理(1) 知定理 1 成立.

**推论 1** $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]=\left[\frac{n}{a}\right]\left(n-\frac{a}{2}\left[\frac{n}{a}\right]-\frac{a}{2}+1\right)$.

可以验证,$a\leqslant 9$, 且 $n\geqslant a$ 时, $\left[\frac{n}{a}\right]\left(n-\frac{a}{2}\left[\frac{n}{a}\right]-\frac{a}{2}+1\right)=\left[\frac{1}{2a}\left(n-\left[\frac{a}{2}-1\right]\right)\left(n-\left[\frac{a-1}{2}\right]\right)\right]$($a=10,n=19$ 时,此式不成立).

所以 $a\leqslant 9$,且 $n\geqslant a$ 时,$\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]=\left[\frac{1}{2a}\left(n-\left[\frac{a}{2}-1\right]\right)\times\left(n-\left[\frac{a-1}{2}\right]\right)\right]$,当 $n=2,3$ 时,可得本文开头的两式.

## 3 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k^l}{a}\right]$的求和公式

**定理 2** $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k^l}{a}\right]=a^lS_l\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+a^{l-1}\left[\frac{n}{a}\right]^l\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]+1\right)+\sum\limits_{p=1}^{l-1}a^{l-p-1}C_l^p\left[S_p(a-1)S_{l-p}\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)+\left[\frac{n}{a}\right]^{l-p}S_p\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)\right]+\left[\frac{n}{a}\right]T_l(a,a-1)+T_l\left(a,n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)$(当 $l=1$ 时,约定此式右边的第三项即求和部分为 0).

**证明** 可以验证$\left[\frac{n}{a}\right]=0$时成立.

当$\left[\frac{n}{a}\right]\geqslant 1$时

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^l}{a}\right]=&\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{ai+j=1}^{n}\left[\frac{(ai+j)^l}{a}\right]=\\&\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}\left(a^{l-1}i^l+\sum_{p=1}^{l-1}a^{l-p-1}j^pC_l^pi^{l-p}+\left[\frac{j^l}{a}\right]\right)=\\&a^{l-1}\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}i^l+\sum_{p=1}^{l-1}a^{l-p-1}C_l^p\sum_{j=0}^{a-1}j^p\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-j}{a}\right]}i^{l-p}+\\&\sum_{j=0}^{a-1}\left(\left[\frac{n-j}{a}\right]+1\right)\left[\frac{j^l}{a}\right]\end{aligned}$$

由预备定理知,定理 2 成立.

**推论 2** 
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2}{a}\right]=&n\left[\frac{n}{a}\right]\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]+1\right)+\\&\left[\frac{n}{a}\right]\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\left(\frac{1}{3}a^2\left[\frac{n}{a}\right]+\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}a\right)+\\&\left[\frac{n}{a}\right]T_2(a,a-1)+T_2\left(a,n-a\left[\frac{n}{a}\right]\right)\end{aligned}$$

**推论 3** 
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^l}{2}\right]=&2^lS_l\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)+2^{l-2}[3-(-1)^n]\left[\frac{n}{2}\right]^l+\\&\sum_{p=1}^{l-1}2^{l-p-1}C_l^p\left[S_{l-p}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)+\frac{1-(-1)^n}{2}\left[\frac{n}{2}\right]^{l-p}\right].\end{aligned}$$

**推论 4** 
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^l}{3}\right]=&3^lS_l\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right)+3^{l-1}\left[\frac{n}{3}\right]^l\left(n-3\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)+\\&\sum_{p=1}^{l-1}3^{l-p-1}C_l^p\left[(1^p+2^p)S_{l-p}\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right)+\right.\end{aligned}$$

$$\left[\frac{n}{3}\right]^{l-p} S_p\left(n-3\left[\frac{n}{3}\right]\right)\Big]+$$
$$\left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{2^l}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}\left(n-3\left[\frac{n}{3}\right]\right)^l\right].$$

## 参考文献


[1] 陈景润.初等数论(Ⅱ)[M].北京:科学出版社,1980.

[2] 秦宗慈.一些取整数列的求和公式及应用[J].数学通讯,1996(4):25-27.

[3] 陈永林,储慧,张文军.关于方幂和的一个性质及其初等证法[J].数学通讯,1996(3):32-33.

[4] 汪军龙.求自然数方幂和的一个公式[J].湖南数学通讯,1994(6):封三 - 封四.

[5] B A Кречмар.一个幂和定理摘译[J].褚学璞,译.数学通讯,1997(1):33-34.

# 等差数列与等比数列的一条对偶性质

**等差数列的性质** 在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_k=0(k\in\mathbf{N}^*)$,则有恒等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1-n}(n=1,2,\cdots,2k-2) \quad ①$$

**证法1** 若$\{a_n\}$的公差$d=0$,得通项$a_n=0$,前$n$项和$S_n=0$,式①显然成立.

若$d\neq0$,易知$S_n$在$n\in\mathbf{R}$(应理解这种将定义域扩大后再解题的方法)时的图象是抛物线.由$a_k=0$,得$S_{k-1}=S_k$,所以抛物线的对称轴是$n=k-\frac{1}{2}$,所以抛物线$S_n(n\in\mathbf{R})$满足$S_n=S_{2k-1-n}$,即式①也成立.

**证法2** 下面用等差数列$\{a_n\}$的性质"若$m+n=p+q$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$"来证.

(1) 当$n>2k-1-n$时,即证

$$a_{2k-n}+a_{2k-n+1}+\cdots+a_n=0 \quad ②$$

设$x=a_{2k-n}+a_{2k-n+1}+\cdots+a_n$,得$x=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{2k-n}$相加,得

$$2x=(a_{2k-n}+a_n)+(a_{2k-n+1}+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_{2k-n})=$$
$$2a_k+2a_k+\cdots+2a_k=0$$
$$x=0$$

即式②成立.

(2) 当$n<2k-1-n$时,即证

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2k-1-n}=0$$

同上可证.

($n=2k-1-n$是不可能的)

**等比数列的性质** 在等比数列$\{b_n\}$中,若$b_k=1(k\in\mathbf{N}^*)$,则有恒等式

$$b_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_{2k-1-n}(n=1,2,\cdots,2k-2)$$

**证明** 用等比数列$\{b_n\}$的性质"若$m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则$b_mb_n=b_pb_q$"同以上证法2可证.

**例** （上海高考题）在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_{10}=0$，则有等式$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}(n<19,n\in\mathbf{N}^*)$成立．类比此性质，相应的：在等比数列$\{b_n\}$中，若$b_9=1$，则有等式________成立．

**解** 由以上"等比数列的性质"知，填"$b_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_{17-n}(n<17,n\in\mathbf{N}^*)$．"

# 谈一类数列的求和

**定理**　设$\{a_n\}$是公差为$d(d\neq 0)$且各项均不为0的等差数列，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+k}}\right\}(k\in \mathbf{N}^*)$的前$n$项和为

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}+\frac{1}{a_2a_3\cdots a_{k+2}}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+k}}=$$

$$\frac{1}{kd}\left(\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}}\right) \qquad ①$$

**证明**　因为$\dfrac{1}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}}=\left(\dfrac{1}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}}-\dfrac{1}{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{i+k}}\right)\cdot$

$$\frac{1}{a_{i+k}-a_i}=\frac{1}{kd}\left(\frac{1}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}}-\frac{1}{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{i+k}}\right)(i=1,2,\cdots,n)$$

所以，式①的左边$=\dfrac{1}{kd}\Big[\left(\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_k}-\dfrac{1}{a_2a_3\cdots a_{k+1}}\right)+$
$\left(\dfrac{1}{a_2a_3\cdots a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_3a_4\cdots a_{k+2}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+k-1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}}\right)\Big]=$
$\dfrac{1}{kd}\left(\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_k}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}}\right)=$式①的右边.

**推论**　设$\{a_n\}$是公差为$d$且各项均不为0的等差数列，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1(a_1+nd)} \qquad ②$$

**证明**　当$d=0$时，$a_n=a_1$，得式②的左边$=\dfrac{n}{a_1^2}=$式②的右边.

当$d\neq 0$时，在式①中令$k=1$，得

式②的左边$=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{nd}{a_1(a_1+nd)}=\dfrac{n}{a_1(a_1+nd)}=$式②的右边

2006年普通高考(湖北卷·理)第15,17题均要用到上述结论，可见本文中的结论在高考中的重要性.

15. 令 $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \cdots + \frac{1}{nC_{n-1}^2} + \frac{1}{(n+1)C_n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ________.

**解**　$\frac{1}{(i+1)C_i^2} = \frac{2}{(i-1)i(i+1)} = \frac{1}{(i-1)i} - \frac{1}{i(i+1)}$

令 $i = 2,3,\cdots,n$，相加得

$$a_n = \left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，填"$\frac{1}{2}$".

17. 设 $a_n = 6n - 5$，$b_n = \frac{3}{a_n a_{n+1}}$，$T_n$ 是数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和，求使得 $T_n < \frac{m}{20}$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 $m$.

**解**　由 $b_n = \frac{3}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$，得

$$T_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6n+1}\right)$$

题意即 $20T_n < m$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立，又

$$20T_n = 10 - \frac{10}{6n+1}$$

的取值范围是 $\left[\frac{60}{7}, 10\right)$，得 $m \geqslant 10$，所以所求的最小正整数 $m = 10$.

# 对两类递推数列的研究

我们对关于 $x$ 的多项式 $\sum_{i=0}^{2m} x^i$ 配方,设

$$\sum_{i=0}^{2m} x^i = \left(\sum_{i=0}^{m} a_{m-i}x^i\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} b_i x^{m-i}$$

得
$$\sum_{i=0}^{2m} x^i = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} x^{2m-i} + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=i}^{m} a_j a_{m+i-j} + b_i\right)x^{m-i}$$

所以
$$a_0 = 1, \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} = 1(i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{j=i}^{m} a_j a_{m+i-j} + b_i = 1(i = 1,2,\cdots,m)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_i = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} a_j a_{i-j}\right)(i \geqslant 2)$$

$$b_i = 1 - \sum_{j=i}^{m} a_j a_{m+i-j}(i = 1,2,\cdots,m)$$

所以,我们将研究如下两类递推数列:

## 1 $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}\right)(n \geqslant 2)$

可以求出 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2^3}, a_3 = \frac{5}{2^4}, a_4 = \frac{35}{2^7}, a_5 = \frac{39}{2^7}, a_6 = \frac{507}{2^{11}}, a_7 = \frac{229}{2^9}$.

容易用第二数学归纳法证明:

**定理** $a_n \in \mathbf{Q}$,且存在 $k \in \mathbf{N}^*$,使 $2^k a_n \in \mathbf{N}^*$.

**问题 1** 求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.

**问题 2** 求出最小的正整数 $k_n$,使 $2^{k_n} a_n \in \mathbf{N}^*$.还可研究数列 $\{k_n\}$.

**猜想 1** $0 < a_n < 1$.

## 2 对于上面的 $\{a_n\}$,研究

$$b_{n,i} = 1 - \sum_{j=i}^{n} a_j a_{n+i-j}(i = 1,2,\cdots,n)$$

**猜想 2** $0 < b_{n,i} < 1$.(由定理得 $b_{n,i} \in \mathbf{Q}$)

当 $n=1$ 时，$b_{1,1}=\frac{3}{4}$；

当 $n=2$ 时，$b_{2,1}=\frac{5}{8}$，$b_{2,2}=\frac{55}{64}$；

当 $n=3$ 时，$b_{3,1}=\frac{35}{64}$，$b_{3,2}=\frac{49}{64}$，$b_{3,3}=\frac{231}{256}$；

当 $n=4$ 时，$b_{4,1}=\frac{63}{128}$，$b_{4,2}=\frac{155}{512}$，$b_{4,3}=\frac{175}{2^{10}}$，$b_{4,4}=\frac{1\ 225}{2^{14}}$.

应用：设 $\sum_{i=0}^{2m}x^i=\left(\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}x^i\right)^2+\sum_{i=1}^{m}b_ix^{m-i}$，得

$$\sum_{i=0}^{2m+2}x^i=\left(\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}x^{i+1}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}b_ix^{m-i+2}+x+1$$

设 $x=10^k$，假设

$$a^2=\sum_{i=0}^{2m+2}10^{ki}=\left[\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}\cdot 10^{k(i+1)}\right]^2+\sum_{i=1}^{m}b_i\cdot 10^{k(m-i+2)}+10^k+1$$

则

$$\sum_{i=1}^{m}b_i\cdot 10^{k(m-i+2)}+10^k+1=\left[a+\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}\cdot 10^{k(i+1)}\right]\left[a-\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}\cdot 10^{k(i+1)}\right]\geqslant 2\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}\cdot 10^{k(i+1)}+1$$

# 对一道联考题的研究

学海大联考2006届高三第三次联考理科数学第18(2)题是:

在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$d=\frac{1}{2}$,$\{a_n\}$的前$n$项和是$S_n$,$O$是坐标原点,$\overrightarrow{OQ_n}=\left(\frac{a_n}{n},\frac{S_n}{n^2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,试问:是否存在一个半径最小的圆,使得对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$,点$Q_n$都不在这个圆的外部?并证明你的结论.

本题融数列、向量、圆于一起,初看还是超纲的"最小圆覆盖问题",但确是一道妙题,先看参考答案:

因为$a_n=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$,$S_n=n\left(1+\frac{n-1}{4}\right)=\frac{n(n+3)}{4}$,所以

$$\overrightarrow{OQ_n}=\left(\frac{a_n}{n},\frac{S_n}{n^2}\right)=\left(\frac{n+1}{2n},\frac{n+3}{4n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}\right)$$

即$Q_n$的坐标为$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}\right)$,它适合方程

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{4})^2=\frac{1}{4n^2}+\frac{9}{16n^2}=\frac{13}{16n^2}\leqslant\frac{13}{16}$$

所以存在圆心为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,最小半径为$\frac{\sqrt{13}}{4}$的圆,对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$,点$Q_n$都不在这个圆的外部.

质疑:以上参考答案没有阐述最小性的理由.

正确解答:同参考答案,得$Q_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}\right)$.

记$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$,$y_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}(n\in\mathbf{N}^*)$,得$Q_n(x_n,y_n)$.

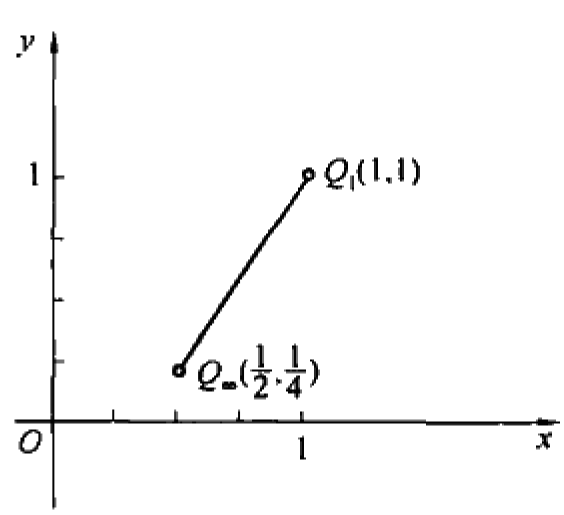



图1

容易验证点$Q_n(n\in\mathbf{N}^*)$均在直线$3x-2y=1$上(如图1),且$x_n$,$y_n$均是$n$的减函数,又$Q_1(1,1)$,$Q_\infty(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$(这里$n\to\infty$

时，$Q_n \to Q_\infty$).

所以，本题所求的最小圆是以 $Q_1Q_\infty$ 为直径的圆，即以点$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\right)$为圆心，$\frac{\sqrt{13}}{8}$为半径的圆.

一般问题：等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和是 $S_n$，点 $Q_n$ 的坐标是$\left(\frac{a_n}{n},\frac{S_n}{n^2}\right)$($n \in \mathbf{N}^*$)，试问：是否存在一个半径最小的圆，使得所有点 $Q_n$ 都不在这个圆的外部？

**简解**　记 $Q_n(x_n,y_n)$，得

$$x_n = d + \frac{a_1 - d}{n}, y_n = \frac{d}{2} + \frac{2a_1 - d}{2n}$$

点 $Q_n$ 在直线$(2a_1 - d)x + 2(d - a_1)y = a_1d$ 上，又 $Q_1(a_1,a_1)$，$Q_\infty\left(d,\frac{d}{2}\right)$，所以：

(1) 当 $a_1 = d = 0$ 时，$Q_n(0,0)$，所求的最小圆不存在；

(2) 当 $a_1,d$ 不全为 0 时，所求的最小圆是以线段 $Q_1Q_\infty$ 为直径的圆.

# 你熟悉公式 $a_n = a_mq^{n-m}(n \geqslant m)$ 吗?

读者可能熟悉以下结论:

(1) 若等差数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n = a_1 + (n-1)d$,则对于任意的 $m \in \mathbf{N}^*$,都有 $a_n = a_m + (n-m)d$;

(2) 若等比数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n = a_1q^{n-1}$,则对于任意的 $m \in \mathbf{N}^*$,都有 $a_n = a_mq^{n-m}$.

关于它们,还有两个伴随的结论:

(3) 若数列$\{a_n\}$从第 $m(m \in \mathbf{N}^*)$ 项开始成等差数列,则 $a_n = a_m + (n-m)d(n \geqslant m)$;

(4) 若数列$\{a_n\}$从第 $m(m \in \mathbf{N}^*)$ 项开始成等比数列,则 $a_n = a_mq^{n-m}(n \geqslant m)$.

**例 1** 已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,且 $a_n > 0, a_1 = 2$. 当 $n \geqslant 2$ 时,$S_n = 2a_n, b_n = \log_2 a_n$,则 $b_n =$ ________.

**解** 由 $S_2 = 2a_2 = a_1 + a_2 = 2 + a_2$,得 $a_2 = 2$.

由 $S_n = 2a_n, S_{n+1} = 2a_{n+1}(n \geqslant 2)$,得

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n, a_{n+1} = 2a_n(n \geqslant 2)$$

说明$\{a_n\}$从第二项开始起成等比数列,所以

$$a_n = a_2q^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}(n \geqslant 2)$$

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1) \\ 2^{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$$

$$b_n = \log_2 a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ n-1 & (n \geqslant 2) \end{cases}$$

**例 2** 若 $S_n$ 是数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和,$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}S_n(n \geqslant 1)$,则 $a_n =$ ________.

**解** 由 $S_n = 3a_{n+1}, S_{n+1} = 3a_{n+2}(n \geqslant 1)$,得

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 3a_{n+2} - 3a_{n+1}$$

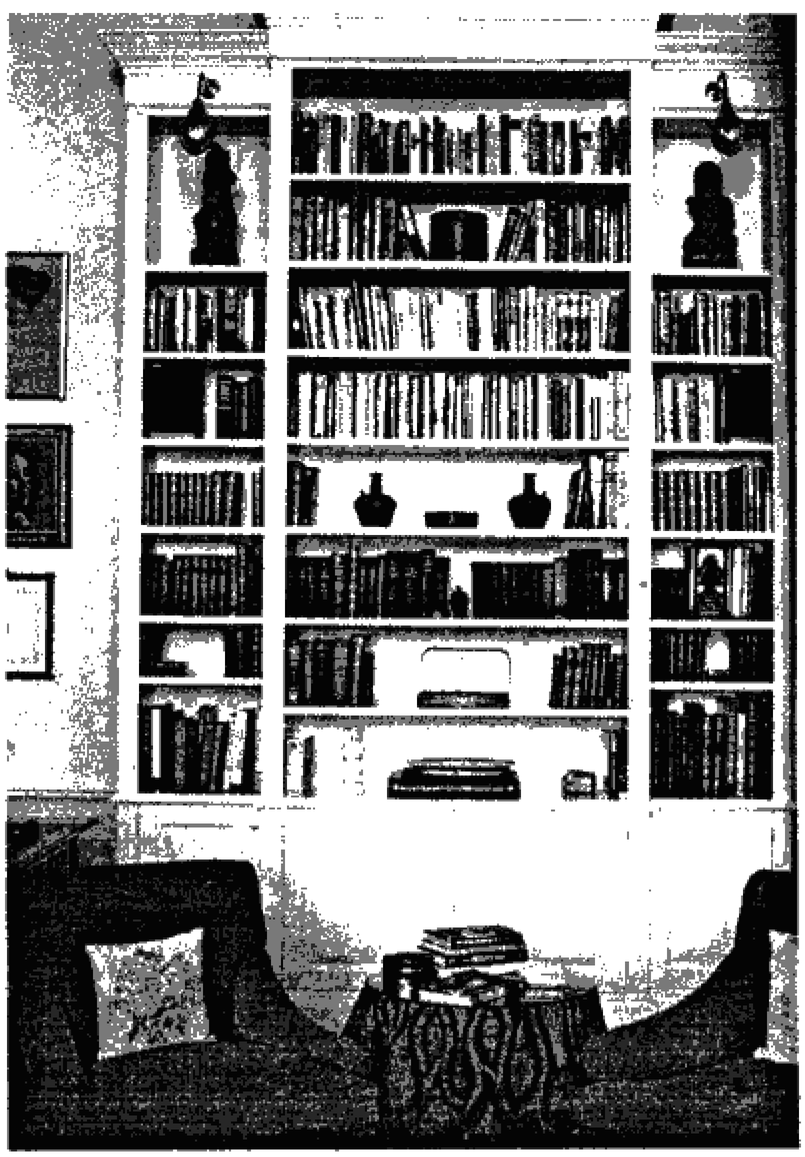
$$a_{n+2} = \frac{4}{3}a_{n+1}(n \geqslant 1)$$

又 $a_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{3}$，所以$\{a_n\}$从第二项起成等差数列，所以

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

若不熟悉以上结论(3)，(4)，很容易做错这两道例题.

# 三 角



# 一道例题结论的推广

本刊文献[1]用三角形的一个重要性质巧妙地证明了该文的例4:设 $\alpha,\beta$ 为锐角,且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$,求证:$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

本文推广这个结论(从以下定理1的证明中还可找到上述结论的简捷证明).

**定理1** 设 $\alpha,\beta$ 均为第一象限的角,则

$$\sin\alpha \gtreqless \cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta \gtreqless \sin(\alpha+\beta)$$

**证** 有 $\sin\alpha,\cos\alpha,\sin\beta,\cos\beta$ 均为正数,所以

$\sin\alpha \gtreqless \cos\beta \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\sin\alpha \gtreqless \cos\beta\\ \cos\alpha \lesseqgtr \sin\beta\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta) \gtreqless 0 \gtreqless \sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta) \Leftrightarrow \sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta) \gtreqless \sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta)$("$\Leftarrow$"的证明,由题设及反证法可得 $\sin\alpha \gtreqless \cos\beta$,还得 $\cos\alpha \lesseqgtr \sin\beta$.)

从而要证结论成立 $\Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta \gtreqless \sin(\alpha+\beta)$.

类似于上述证明,还可证得

**定理2** 设 $\alpha,\beta$ 均为第三象限的角,则

$$\sin\alpha \gtreqless \cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta \gtreqless \sin(\alpha+\beta)$$

**定理3** 设 $\alpha,\beta$ 分别为第二象限,第四象限的角,则

$$\sin\alpha \gtreqless \cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta \gtreqless \sin(\alpha+\beta)$$

**定理4** 设 $\alpha,\beta$ 分别为第四象限,第二象限的角,则

$$\sin\alpha \gtreqless \cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta \gtreqless \sin(\alpha+\beta)$$

## 参考文献

[1] 杨承毅.构造相似三角形探讨三角问题.数学通讯,2000(3):12-13.

# 关于角格点一些猜想的证明

文献[1]提出了45个猜想,但笔者没有看出其规律,因而不能知道被省略的猜想,本文将证明文献[1]列出的全部猜想.

首先约定,本文中的 $A,B,C,\beta,\gamma$ 分别表示图1中 $\triangle ABC$ 的三个内角及 $\angle PBC,\angle PCB$ 的度数.

**定理1**　在图1中,

$$\cot\angle PAB=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma\sin(B-\beta)}-\cot(B-\beta)$$

**证明**　在 $\triangle ABC$, $\triangle PBC$ 中,分别运用正弦定理,得

$$\frac{BC}{\sin(B+C)}=\frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{BC}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{PB}{\sin\gamma}$$

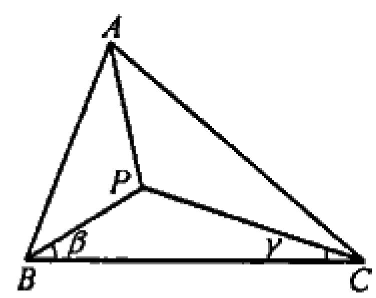



图1

所以

$$AB=\frac{BC\sin C}{\sin(B+C)}$$

$$PB=\frac{BC\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

在 $\triangle PAB$ 中,再运用正弦定理,得

$$\frac{AB}{\sin(\angle PAB+B-\beta)}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$$

所以

$$\frac{\sin(\angle PAB+B-\beta)}{\sin\angle PAB}=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma}$$

即

$$\frac{\sin\angle PAB\cdot\cos(B-\beta)+\cos\angle PAB\cdot\sin(B-\beta)}{\sin\angle PAB}=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma}$$

$$\sin(B-\beta)\cot\angle PAB=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma}-\cos(B-\beta)$$

因为 $0^\circ<\beta<B<180^\circ$,所以 $\sin(B-\beta)\neq 0$,从而可知定理1成立.

**定理2**　若 $0^\circ<\alpha<180^\circ$,且 $\frac{\sin(\alpha-\beta+B)}{\sin\alpha}=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma}$,则图1中的 $\angle PAB=\alpha$.

**证明**　由题设并参见定理1的证明,可得

$$\cot\alpha=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma\sin(B-\beta)}-\cot(B-\beta)$$

又由定理 1,得 $\cot\alpha=\cot\angle PAB$.

因为 $0^\circ<\alpha<180^\circ, 0^\circ<\angle PAB<180^\circ$,所以 $\angle PAB=\alpha$.

用定理 2 容易证明它们列出的猜想均成立(被省略的猜想也应能用定理 2 解决).兹举例如下:

**猜想 1 的证明**　在定理 2 中,由 $\alpha=30^\circ,\beta=20^\circ,\gamma=10^\circ,B=30^\circ,C=20^\circ$,知只需证

$$\frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ\sin 10^\circ}$$

即

$$\frac{\sin 40^\circ}{0.5}=\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\times 0.5}{\cos 40^\circ\sin 10^\circ}$$

$$2\sin 40^\circ=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$2\sin 40^\circ\cos 40^\circ=\sin 80^\circ$$

显然成立.

**猜想 2 的证明**　只需证 $\frac{\sin 120^\circ}{\sin 100^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ\sin 10^\circ}$,即

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ\sin 10^\circ=\cos 10^\circ\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 40^\circ-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{1}{4}(\cos 50^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 40^\circ+\frac{1}{4}\cos 50^\circ=\frac{1}{2}\cos 10^\circ$$

$$\frac{1}{2}\cos(30^\circ-40^\circ)=\frac{1}{2}\cos 10^\circ$$

显然成立.

**猜想 13 的证明**

只需证

$$\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\sin 30^\circ\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ\sin 20^\circ}$$

即

$$\sin 30^\circ\sin 40^\circ=\sin 70^\circ\sin 20^\circ$$

$$\sin 40^\circ=2\cos 20^\circ\sin 20^\circ$$

显然成立.

**猜想 45 的证明**

只需证

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{\sin 50^\circ\sin 40^\circ}{\sin 110^\circ\sin 20^\circ}$$

即 $\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}$,显然成立.

由文献(1) 中叙述的"三角形的角格点"定义及本文的定理 1,可得

**定理 3** 在图 1 中,点 $P$ 为三角形内的角格点的充要条件是:$A,B,C,\beta,\gamma$ 均为 $10^\circ$ 的整数倍,且由

$$\cot\alpha=\frac{\sin C\sin(\beta+\gamma)}{\sin(B+C)\sin\gamma\sin(B-\beta)}-\cot(B-\beta)(0^\circ<\alpha<180^\circ)$$

得到的 $\alpha$ 也是 $10^\circ$ 的整数倍.

另外,文献[1] 正文第6行中的"$A\leqslant B\leqslant C$"应改为"$A\geqslant B\geqslant C$"(因为它们表中所列的值均满足 $A\geqslant B\geqslant C$).

## 参考文献

[1] 田永海.关于三角形中角格点问题的研究.中学数学教学参考,2000(11):45.

# 用等距平行线把平面封闭图形涂成阴影的线段条数及总长度

## 1　用平行线把平面封闭图形涂成阴影

在画图时，通常要把平面上的封闭图形涂成阴影（比如求阴影部分的面积时）：用一组间距相等的平行线（即这组平行线中每两条相邻平行线间的距离都相等）涂满这个封闭图形，如图 1.

本文约定按如下方式涂阴影：按从上到下的方式依次画平行线段（这些线段也叫阴影线），即依次画出图 1 中的线段 $a_1, a_2, a_3, \cdots$. 图 1 中的 $a_0, b_0$ 是紧靠着图 $\Gamma$ 的两条与阴影线均平行的直线，且 $a_0$ 与阴影线 $a_1$ 的距离为 $h$，$a_0, b_0, a_n$ 在涂阴影时均不需画出.

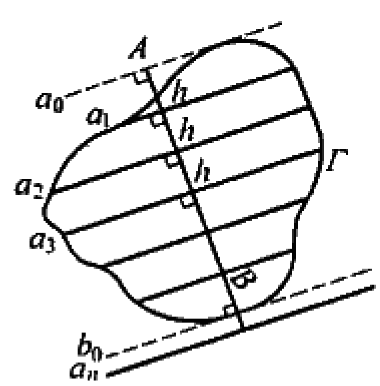



图 1　用平行线涂阴影

本文还要用到以下函数：

**定义**
$$g(x)=\begin{cases}x-1, & x\in \mathbf{Z}\\ [x], & x\in \complement_{R}Z\end{cases}$$

其中 $[x]$ 表示小于 $x$ 的最大整数，可证 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的非严格递增函数.

## 2　需阴影线的条数

由函数 $g(x)$ 的意义及约定的"涂阴影"方式，可得

**定理 1**　若图 1 中 $a_0, b_0$ 间的距离 $AB=d$，则用间距为 $h$ 的平行线把图 $\Gamma$ 涂成阴影所需阴影线的条数为 $g\left(\dfrac{d}{h}\right)$.

### 2.1　矩形的情形

又约定：本文中的矩形一组邻边的长为 $a, b$.

**定理 2**　用与矩形 $a$ 边（即长度为 $a$ 的边）成 $\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 角的一组间距为 $h$ 的平行线把这个矩形涂成阴影所需阴影线的条数为

$$g\left(\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{h}\right)$$

**证明** 当 $\alpha = 0$ 时,阴影线与 $a$ 边平行,得阴影线的条数为 $g\left(\frac{b}{h}\right)$,此时结论成立.

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,阴影线与 $b$ 边平行,阴影线的条数为 $g\left(\frac{a}{h}\right)$,此时结论也成立.

下证当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时结论成立(包括图 2,图 3 两种情形)

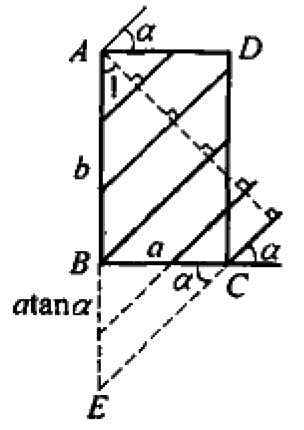



图 2

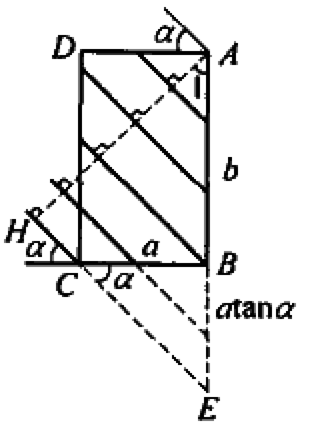



图 3

对于图 2(阴影线向上的方向与 $a$ 边向右的方向之间的夹角为 $\alpha$),过矩形 $ABCD$ 的顶点 $C$ 作与阴影线平行的直线 $CE$ 交直线 $AB$ 于 $E$,可证 $BE = a\tan\alpha$, $AE = a\tan\alpha + b$.

在 $AH \perp CE$, $H$ 为垂足.在 $\text{Rt}\triangle AEH$ 中,可得 $\angle 1 = \alpha$,所以

$$AH = AE\cos\alpha = a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

由定理 1 得,此时所画阴影线的条数为

$$g\left(\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{h}\right)$$

对于图 3(阴影线向上的方向与 $a$ 边向左的方向之间的夹角为 $\alpha$),证明过程全同图 2 的情形.

**定理 3** 把矩形涂成阴影时:

(1) 当阴影线与矩形任一对角线垂直时所画阴影线条数最多,最多条数为

$$g\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}\right)$$

(2) 当阴影线与矩形较短边垂直时所画阴影线条数最少,最少条数为 $g\left(\frac{a}{h}\right)$(这里 $a$ 是矩形的较短边长).

**证明** 因为 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的非严格递增函数,所以由定理 2 知:求出了 $a\sin\alpha + b\sin\alpha$ 的最大、最小值,就求出了阴影线条数 $g\left(\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{h}\right)$ 的最

大、最小值.

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

其中 $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$.

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 即阴影线与图2,图3中的矩形对角线 $AC$ 垂直时,阴影线的条数取最大值,且最大值是 $g\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h}\right)$,结结论(1)成立.

当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin(\alpha+\varphi)$ 取最小值,从而可得结论(2)成立.

**注** 因为 $g(x)$ 不是严格递增函数,所以不能把定理3中的"当"改为"当且仅当",定理3(1)是鲜为人知的结论.

### 2.2 圆的情形

由定理1,立得

**定理4** 用间距为 $h$ 的平行线把直径为 $d$ 的圆涂成阴影所需阴影线的条数为 $g\left(\frac{d}{h}\right)$.

## 3 阴影线的总长度

以上研究的是阴影线的条数问题,还可研究阴影线的总长度及其最值,特别是矩形和圆的情形.

**定理5** 用间距为 $h$ 的平行线把直径为 $d$ 的圆涂成阴影时所画阴影线的总长度为

$$l = 2\sum_{i=1}^{[\frac{d}{h}]}\sqrt{ih(d-ih)}$$

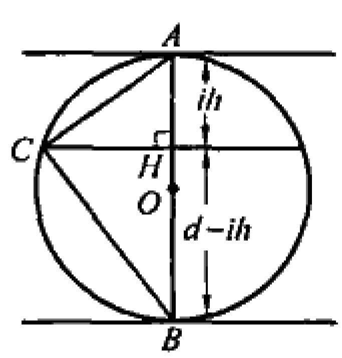



图4

**证明** 用图4可证(由射影定理得 $CH=\sqrt{ih(d-ih)}$, $i=1,2,\cdots,[\frac{d}{h}]$).

(能将 $l$ 的表达式化简吗?)

**猜想1** 当 $d$ 为常量时,定理5中的 $l$ 是 $h$ 的严格递减函数.

因为当 $h>d$ 时,恒有 $l=0$,所以只需研究 $h\leqslant d$ 的情形.

当 $h\leqslant d$ 时,设 $[\frac{d}{h}]=n$, $n\in\mathbf{N}^*$,得 $n\leqslant\frac{d}{h}<n+1$,又设 $\frac{d}{h}=x$,得 $h=\frac{d}{x}$, $l=2d\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{x}(1-\frac{i}{x})}$,所以上述猜想等价于:

**猜想 2** 设 $n \leqslant x < n+1(n \in \mathbf{N}^*)$,则 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{x}(1-\frac{i}{x})}$ 是严格递增函数.

当 $n=1$ 时由阴影线的画法知显然成立.

# “余弦定理在四边形的一个推广”的一个注释

文献[1]的定理给出了余弦定理在四边形的一个推广，但该定理的题设是凸四边形，实际上，该定理可以推广到任意四边形.

**定理**　记四边形 $ABCD$(可以是凸的、凹的，也可以退化成三角形——即有一个角是平角的情形）的四边长 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$，两对角线长 $AC = p, BD = q$，则

$$\cos(B + D) = \frac{(ac)^2 + (bd)^2 - (pq)^2}{2abcd}$$

($A, B, C, D$ 分别表示四边形 $ABCD$ 的相应内角)

**证明**　文献[1]已证出凸四边形的情形，该证明完全适合退化成三角形的情形，下面再证凹四边形的情形（只证图1的情形）.

在图1中，$AC$ 与 $BD$ 的延长线交于点 $O$，$\angle AOB = \theta$，$OA = P_1, OC = p_2, OB = q_1, OD = q_2, p = p_1 + p_2, q = q_1 - q_2$. 把文献[1]定理的证明只作三处改动或说明便得此处的证明：

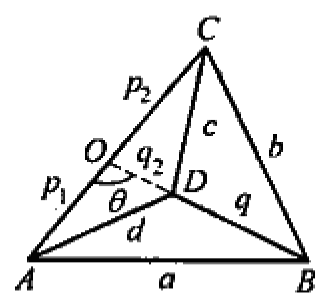


图1

(1) 因为 $\cos D = \cos(2\pi - D)$，所以文献[1]定理证明中的第二个等式在这里仍成立.

(2) 容易证明，对于定理中的四边形 $ABCD$（凸、凹、退化），均有其面积 $S = \frac{1}{2}pq\sin\theta$.

(3) 文献[1]左栏最后一行“$d^2 - c^2 = p_1^2 - p_2^2 + 2pq_2\cos\theta$”在这里应改为“$d^2 - c^2 = p_1^2 - p_2^2 - 2pq_2\cos\theta$”(由 $d^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1q_2\cos\theta, c^2 = p_2^2 + q_2^2 + 2p_2q_2\cos\theta$ 两式相减得).

由文献[1]的定理知文献[1]的推论1,3应只对凸四边形成立，而由本文的定理知文献[1]的推论1,3对任意四边形（凸、凹、退化）均成立.

## 参考文献

[1] 杨克昌. 余弦定理在四边形的一个推广. 数学通报，2003(7)：13,38.

# 再探三角形的一种边角关系

以下用 $a,b,c$ 分别表示 $\triangle ABC$ 中角 $A,B,C$ 的对边,文献[1]已证得:

**定理1**　若 $a^n,b^n,c^n(n=1,2,3,4)$ 成等差数列,则 $B\leqslant 60^\circ$.

**定理2**　若 $a^n,b^n,c^n(n\in \mathbf{Z}^-)$ 成等差数列,则 $B\leqslant 60^\circ$.

实际上,还可将定理2推广为:

**定理3**　若 $a^n,b^n,c^n(n<0)$ 成等差数列,则 $B\leqslant 60^\circ$.

**证明**　因为 $a,b,c\in \mathbf{R}^+$,$\frac{a^n+c^n}{2}=b^n$,所以 $b^n\geqslant\sqrt{a^nc^n}$.又 $n<0$,所以 $b^2\leqslant ac$,得

$$(a-c)^2\geqslant 0\geqslant b^2-ac$$

$$a^2+c^2-b^2\geqslant ac,\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\geqslant\frac{1}{2},B\leqslant 60^\circ$$

**猜想1**　若 $a^n,b^n,c^n(n\leqslant 4,n\in \mathbf{R}^*)$ 成等差数列,则 $B\leqslant 60^\circ$.

下面是对猜想1的研究:

由 $a^n+c^n=2b^n$,可不妨设 $a^n\geqslant b^n\geqslant c^n$,得 $a\geqslant b\geqslant c$.

又设 $\frac{a}{c}=k$,可得 $k\geqslant 1$,$\frac{b}{c}=(\frac{k^n+1}{2})^{\frac{1}{n}}$.

又 $B\leqslant 60^\circ\Leftrightarrow\cos B\geqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2+c^2-b^2\geqslant ac\Leftrightarrow k^2-k+1\geqslant(\frac{k^n+1}{2})^{\frac{2}{n}}$

所以,要证猜想1成立,只需证明:

**猜想2**　若 $0<n\leqslant 4,k\geqslant 1$,则 $k^2-k+1\geqslant(\frac{k^n+1}{2})^{\frac{2}{n}}$.

**问题1**　求出最大的正实数 $n$,使以下结论成立:若 $a^n,b^n,c^n$ 成等差数列,则 $B\leqslant 60^\circ$.

**问题2**　求出最大的正实数 $n$,使 $k\geqslant 1$ 时,$k^2-k+1\geqslant(\frac{k^n+1}{2})^{\frac{2}{n}}$ 成立.

问题1,2是等价的.

文献[2]还证得"若 $B\geqslant 60^\circ$,则 $a^n+c^n\leqslant 2b^n(0<n\leqslant 4)$",也可将它改述为:

**定理4**　若 $a^n+c^n>2b^n$($n$ 是一已知数,$0<n\leqslant 4$),则 $B<60^\circ$.

# 参考文献

[1] 李来敏,杨小林,两个关于三角形边角关系的结论,数学通报,2003(8):29.
[2] 梁丽平,安振平.对一个不等式的深人思考.数学通讯,2002(19):27-28.

# 例谈三角迭加公式的运用

三角迭加公式也叫做辅助角公式,它不仅可以处理三角函数问题,而且适当的变换、合理转化后,还能解决很多非三角问题.

三角迭加公式:对于正弦与余弦的叠加函数 $a\sin x + b\cos x$,存在终边通过点$(a,b)$的角 $\varphi \in [0,2\pi)$,使得

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$$

(其证明见普通高中课程标准实验教科书,且有 $\varphi$ 是唯一存在的.)

由此,可得以下重要结论:

**定理 1** 函数 $f(x) = a\sin x + b\cos x(x \in \mathbf{R})$ 的值域是$[-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}]$.

**定理 2** 存在 $x \in \mathbf{R}$,使得 $c = a\sin x + b\cos x$ 的充要条件是$c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

**例 1** 已知 $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$,求 $x - 2y$ 的取值范围.

**解** 可得$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$,所以可设

$$x = 1 + \sqrt{5}\cos\theta, y = -2 + \sqrt{5}\sin\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

得

$$x - 2y = 5 + \sqrt{5}\cos\theta - 2\sqrt{5}\sin\theta$$

所以存在 $\varphi \in [0,2\pi)$,使得

$$x - 2y = 5 + 5\sin(\theta + \varphi)$$

所以 $x - 2y$ 的取值范围是$[0,10]$.

**例 2** 求函数 $z = x^2 + \frac{81}{x^2} - 2xy + \frac{18}{x}\sqrt{2 - y^2}$ 的最小值.

**解** 由 $2 - y^2 \geqslant 0$,得 $|y| \leqslant \sqrt{2}$,所以可设 $y = \sqrt{2}\cos\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

又可设 $w = \sqrt{x^2 + \frac{81}{x^2}}$,易得 $w \geqslant 3\sqrt{2}$.

所以

$$z = w^2 - 2\sqrt{2}\left(x\cos\theta + \frac{9}{x}|\sin\theta|\right)$$

又由定理 1,得 $x\cos\theta + \frac{9}{x}|\sin\theta| \leqslant \sqrt{x^2 + \frac{81}{x^2}} = w$,所以 $z \geqslant w^2 - 2\sqrt{2}w$.

可得 $w^2 - 2\sqrt{2}w(w \geqslant 3\sqrt{2})$ 的最小值是 6.

从而可得,函数 $z$ 的最小值是 6(当 $x = -3, y = 1$ 时,$z$ 可取到这个最小

值).

**例 3** 求函数 $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{2\sin x+\cos x-3}$ 的值域.

**解** 原式可化为

$$(2y-1)\sin x+(y+1)\cos x=3y$$

由定理 2,得

$$(3y)^2\leqslant(2y-1)^2+(y+1)^2$$

$$-1\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$$

所求函数的值域是$\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$.

**例 3** 求函数 $y=\sqrt{2008-x}+\sqrt{x-2007}$ 的值域.

**解** 该函数的定义域为[2007,2008],所以 $x-2007\in[0,1]$.

可设 $x-2007=\cos^2\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,得

$$y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

所以函数 $y$ 的值域是$[1,\sqrt{2}]$.

**例 5** 设 $U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)\mid x\cos\theta+y\sin\theta=1,x,y,\theta\in\mathbf{R}\}$,求$\complement_U A$.

**解** 由定理 2 知,$1=x\cos\theta+y\sin\theta\Leftrightarrow x^2+y^2\geqslant 1$,所以

$$\complement_U A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x,y\in\mathbf{R}\}$$

## 练 习

1. 函数 $y=3x-4\cos(\arcsin x)(-1<x<1)$ 的最小值是________.

2. 若实数 $x,y$ 满足$x^2+y^2-2x-2y+1=0$,则使 $x+y\leqslant k$ 恒成立的实数 $k$ 的取值范围是________.

3. 方程 $3\cos x+4\sin x=6$ 的解集是________.

**参考答案** 1. $-5$;2. $k\geqslant 2+\sqrt{2}$;3. $\varnothing$.

# 两点不易觉察且流传很广的错误

先来看看发表于《中学数学教学参考》(该刊是目前仅有的两家数学方面的全国初等教育/中等教育类核心期刊之一)2008年第1~2期合刊的《三角函数解题中隐含条件的挖掘》一文(作者:余锦银)的例1及其解法(以下仅在表述上有所改动):

**例1** 已知 $\sin\alpha=2\sin\beta,\tan\alpha=3\tan\beta$,求 $\cos\alpha$ 的值.

**原解** 当 $\tan\alpha=3\tan\beta=0$ 即 $\alpha=\beta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,满足题意,得 $\cos\alpha=\pm1$.

当 $\tan\alpha=3\tan\beta\neq0$ 时,把已知的两式相除,得

$\cos\alpha=\frac{2}{3}\cos\beta$,所以 $\cos\beta=\frac{3}{2}\cos\alpha$;

再由 $\sin\alpha=2\sin\beta$,得 $\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\alpha$,把这两式平方相加,得

$$\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2=1,\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt6}{4}$$

所以
$$\cos\alpha=\pm1,\ \pm\frac{\sqrt6}{4}$$

原解中有两处不严谨:其一,$\cos\alpha$ 的四个值 $1,-1,\frac{\sqrt6}{4},-\frac{\sqrt6}{4}$ 都能取到吗?其二,由 $\tan\alpha=\tan\beta=0$ 能得到 $\alpha=\beta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 吗?这种错误就是本文要指出的"第一点不易觉察且流传很广的错误".

产生这种错误的原因是:由 $\tan\alpha=\tan\beta=0$ 只能得到所有 $\alpha$ 值的集合与所有 $\beta$ 值的集合相等,并不能得到 $\alpha=\beta$.可把这种错误修正为:由 $\tan\alpha=\tan\beta=0$ 可得 $\alpha=k\pi$,且 $\beta=l\pi(k,l\in\mathbf{Z})$.

由此知,我们必须注意:在解同一道题时,用过的字母不要随意再用,因为在同一道题的解题过程中,相同的字母一般表示相同的意义.

该题的正确解法可表述为:

**正解** 当 $\tan\alpha=3\tan\beta=0$ 即 $\alpha=k\pi$,且 $\beta=l\pi(k,l\in\mathbf{Z})$ 时,满足题意,得 $\cos\alpha=\pm1$(当 $k$ 为偶数时取"+";当 $k$ 为奇数时取"-").

当 $\tan\alpha=3\tan\beta\neq0$ 时,把已知的两式相除,得

$\cos\alpha=\frac{2}{3}\cos\beta$,所以 $\cos\beta=\frac{3}{2}\cos\alpha$;

再由 $\sin\alpha=2\sin\beta$，得 $\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\alpha$，把这两式平方相加，得$\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2=1$，$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$（当且仅当 $\alpha,\beta$ 都在第一、四象限时取"+"；当且仅当 $\alpha,\beta$ 都在第二、三象限时取"-"）.

所以
$$\cos\alpha=\pm 1,\ \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

本文指出的上述错误还流传很广，比如由人民教育出版社中学数学室编著的全日制普通高级中学教材（人教版）教案系列丛书《教案（数学·第一册（下））》（2005 年（第三版）由人民教育出版社，延边教育出版社联合出版）第 100～101 页的例 1 的第②小题是

**例 2**　求函数 $y=\lg\sin x+\sqrt{\tan x-\sqrt{3}}$ 的定义域.

**原解**　由$\begin{cases}\sin x>0\\ \tan x-\sqrt{3}\geqslant 0\end{cases}$　得$\begin{cases}2k\pi<x<2k\pi+\pi\\ k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$

所以原函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

笔者认为此解法也不严谨，正确的解法可以是：

**正解**　因为 $2\pi$ 是原函数的一个周期（不一定是最小正周期），所以可先求原函数在某一个周期（比如$[0,2\pi)$）范围上的定义域：

由$\begin{cases}\sin x>0\\ \tan x-\sqrt{3}\geqslant 0\\ 0\leqslant x<2\pi\end{cases}$　得$\begin{cases}0<x<\pi\\ \frac{\pi}{3}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\text{或}\frac{4\pi}{3}\leqslant x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

所以原函数在$[0,2\pi)$范围上的定义域为$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$.

所以原函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

我们再来解答全日制普通高级中学教科书（必修）《数学·第一册（下）》（2006 年人民教育出版社）（下简称教科书）复习参考题四 B 组的第 12 题（第 101 页）：

**例 3**　求函数 $y=\dfrac{\lg\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan x-1}$ 的定义域.

**解**因为 $\pi$ 是原函数的一个周期，所以可先求原函数在一个周期$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$范围上的定义域：

由$\begin{cases}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)>0\\ \tan x-1\neq 0\\ -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 得$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{5\pi}{12}\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}\\ -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

所以原函数在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$范围上的定义域为$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right)$.

所以原函数的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{12}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}\text{ 或 }k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

我们再来看与教科书配套使用的《教师教学用书》(下简称教师用书)第46页的给出的答案:$\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right),k\in\mathbf{Z}$.

细细品味一下可知,教师用书的这个答案也不正确:因为该答案并没有指出当$k=0,1,-1,2,-2,\cdots$时,各集合$\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$之间应当求并集.而正确答案应当是这些集合的并集.

当然,本题的答案也可改述为

$\left\{x\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{12}<x<k\pi+\frac{5\pi}{12}\text{ 且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$;但不能改述为

$\left\{x\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{12}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup$

$\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$,因为还应当计算出并集的结果.

以上例3就是本文要指出的“第二点不易觉察且流传很广的错误”.

# “奇变偶不变，符号看象限”的又一用途

全日制普通高级中学教科书（必修）《数学·（第一册（下）》（2006年人民教育出版社）（下简称教科书）第34页写到：

$\alpha+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ-\alpha$ 的三角函数值，等于 $\alpha$ 的同名函数值，前面加上一个把 $\alpha$ 看成锐角时原函数值的符号.

这个结论还可以推广成通常所说的结论：

奇变偶不变，符号看象限.

用这一结论可以快速求解这样一类问题：已知 $\alpha$ 所在的象限及 $\alpha$ 的某一个三角函数值，求 $\alpha$ 的其他三角函数值.（只需用勾股定理即可，不需用同角三角函数的基本关系式）

**例** （教科书第30页第1(2)题）已知 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，且 $\alpha$ 为第二象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 的值.

**解** 设 $\beta$ 是锐角时，设 $\cos\beta=\frac{5}{13}$，把锐角 $\beta$ 放置在直角三角形中，且 $\beta$ 的邻边长是5，斜边长是13，所以 $\beta$ 的对边长是12.

由锐角三角函数的定义，立得 $\sin\beta=\frac{12}{13}$，$\tan\beta=\frac{12}{5}$，$\cot\beta=\frac{5}{12}$.

为了求 $\alpha$ 的三角函数值，由终边相同的同一三角函数的值相等（见教科书第19页）知可设 $\alpha\in[0,2\pi)$，又 $\alpha$ 为第二象限角，所以可选择 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，再由 $\cos\alpha=-\cos\beta$ 及“奇变偶不变，符号看象限”得 $\alpha=\pi-\beta$，最后又由“奇变偶不变，符号看象限”可得

$$\sin\alpha=\sin\beta=\frac{12}{13},\tan\alpha=-\tan\beta=-\frac{12}{5},\cot\alpha=-\cot\beta=-\frac{5}{12}$$

可以证明下面的结论成立（证明时要用到教科书第31页中 $\beta$ 与 $\alpha$ 之间关系的结论——用锐角表示象限角）：

“已知 $\alpha$ 所在的象限及 $\alpha$ 的某一个三角函数值，求 $\alpha$ 的其他三角函数值”时，可以先把 $\alpha$ 当锐角看（$\alpha$ 的已知三角函数值也应随着改成其绝对值），再把锐角 $\alpha$ 放置在直角三角形中，由 $\alpha$ 的已知三角函数值的绝对值可以得到这个直角三角形两边的比，再由勾股定理可以算出这个直角三角形任意两边的比值.这些比值就是所求三角函数值的绝对值（选择的方法就是锐角三角函数的定义），从而可以求出所求的三角函数值.

以上结论（方法）叙述起来冗长，但使用起来却很方便.

# 实验班学生敢于探索的一道三角题

志鸿优化系列丛书——高中同步测控优化设计·数学(高一下),2007年南方出版社、南海出版公司第7版,第29页右栏第5题上有这样一道填空题:

**题1** 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\alpha$ 的取值范围是________.

(答案:$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$)

该题可能是由2005年高考(湖北卷)理科第7题也即文科第10题改编而成的,这道高考题是:

**题2** 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\alpha\in$________.

A.$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ B.$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ C.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ D.$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

(答案:C)

题1的答案不对,并且高中生也难以解答此题,因为所求 $\alpha$ 的取值范围是方程

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \quad ①$$

的根,而这个三角方程很不好解.(不能说题1的答案就是

$$\left\{\alpha\,\middle|\,\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\right\})$$

而本学期笔者任教的高一理科实验班学生(我校多次评为全国百强中学,这唯一的一个高一理科实验班的学生功底较好)见到这道题后,也知道此题的背景是题2,并能迅速解答题2;还有一个大胆的想法——正确解答题1,即求解方程①.下面来解决这个问题.

由万能公式,得方程①即

$$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left(0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}\right)$$

设

$$\tan\frac{\alpha}{2}=t\quad(0<t<1) \quad ②$$

得方程 ① 即

$$t^4-4t^3-2t^2+1=0 \qquad ③$$

其中 $0<t<1$.

下面来解这个四次方程，依据的方法是张元达编著的《浅谈高次方程》(1983年湖北教育出版社)第28 ~ 30页的一元三次方程的解法和第51 ~ 52页的一元四次方程的第三种解法：

方程 ③ 等价于

$$t^4-4t^3+(a-2)t^2+bt+c+1=at^2+bt+c \qquad ④$$

又令该方程的左边恒等于$(t^2-2t+m)^2$,即

$$\begin{cases}a=2m+6\\b=-4m\\c=m^2-1\end{cases} \qquad ⑤$$

令 $b^2=4ac$,得

$$m^3+m^2-m-3=0 \qquad ⑥$$

再令 $m=\dfrac{n-1}{3}$,得

$$n^3-12n-70=0 \qquad ⑦$$

下面需要求出方程 ⑦ 的一个根. 又令 $n=y+z$,得

$$n^3-3yz\cdot n-(y^3+z^3)=0$$

让此方程与 ⑦ 相比较知，可令

$$\begin{cases}yz=4\\y^3+z^3=70\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y^3z^3=64\\y^3+z^3=70\end{cases}$$

通过解一元二次方程便可求得次方程组的一组解$(y,z)$,从而可得 ⑦ 的一个解 $n=y+z=\sqrt[3]{35+3\sqrt{129}}+\sqrt[3]{35-3\sqrt{129}}$,所以得 ⑥ 的一个解

$$m=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{35+3\sqrt{129}}+\sqrt[3]{35-3\sqrt{129}}-1\right)=1.359\,304\,0\cdots \qquad ⑧$$

由 $b^2=4ac$, $a>0$ 知，方程 ④ 等价于：

$$t^2-2t+m=\pm\left(\sqrt{2m+6}\,t-\sqrt{m^2-1}\right)$$

即 $$t^2-(\sqrt{2m+6}+2)t+m+\sqrt{m^2-1}=0 \qquad ⑨$$

或 $$t^2+(\sqrt{2m+6}-2)t+m-\sqrt{m^2-1}=0 \qquad ⑩$$

可以证明方程 ⑩ 无实根，⑨ 的两实根分别为

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2m+6}+\sqrt{4\sqrt{2m+6}-4\sqrt{m^2-1}-2m+10}\right)+1 = 4.439\ 109\ 10\cdots$$

$$t_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2m+6}-\sqrt{4\sqrt{2m+6}-4\sqrt{m^2-1}-2m+10}\right)+1 = 0.513\ 619\ 82\cdots \quad ⑪$$

再由 $0 < t < 1$ 知 ⑨ 中的 $t$ 的值即 ⑪ 中的 $t_2$，又由 ②，① 知方程 ① 的根为 $\alpha = 2\arctan t_2$，其中 $t_2, m$ 由 ⑪，⑧ 确定. 所以题 1 的正确答案是

$$\left\{2\arctan\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2m+6}-\sqrt{4\sqrt{2m+6}-4\sqrt{m^2-1}-2m+10}\right) \middle| 3m = \sqrt[3]{35+3\sqrt{129}}+\sqrt[3]{35-3\sqrt{129}}-1\right\}$$

学生也弄清了一般的一元三次方程、一元四次方程的解法，这是从一般课堂上学不到的知识. 笔者还建议同学们有时间的话可以研读张远达先生的《浅谈高次方程》，定会收获更多.

# 谈谈教科书上的一道练习题

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(下)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第42页练习的第1题是：

1.(1) 等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立吗?为什么?

(2) 等式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 成立吗?为什么?

本文将给出它们能成立的所有 $\alpha,\beta$.

先看(1):原式即

$$\sin\alpha(1-\cos\beta)+\sin\beta(1-\cos\alpha)=0$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

$$\alpha=2k\pi,\text{或}\ \beta=2l\pi,\text{或}\ \alpha+\beta=2n\pi(k,l,n\in\mathbf{Z}) \qquad ①$$

即(1)中式子成立的充要条件是①.

再看(2):原式即

$$\cos\alpha(1-\cos\beta)+\cos\beta=-\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\neq 1) \qquad ②$$

(若 $\cos\alpha=1$,得 $\sin\alpha=0$,②式不成立.)

两边平方,得

$$(1-\cos\beta)\cos^2\alpha+\cos\beta(1-\cos\beta)\cos\alpha+\frac{\cos^2\beta-\sin^2\beta}{2}=0(\cos\alpha\neq 1) \qquad ③$$

视式③为 $\cos\alpha$ 的一元二次方程,得

当 $\cos\beta>\sqrt{3}-1$ 时,方程③无解;

当 $\cos\beta\leqslant\sqrt{3}-1$ 时,方程③的解为

$$\cos\alpha=\frac{\cos\beta(\cos\beta-1)\pm\sqrt{(1-\cos^2\beta)(2-2\cos\beta-\cos^2\beta)}}{2(1-\cos\beta)}(\cos\beta\leqslant\sqrt{3}-1) \qquad ④$$

但④中 $\cos\alpha$ 的两个值不一定适合(2)中的式子:

比如,当 $\cos\beta=\sqrt{3}-1$ 时,由④得,$\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$,但此时(2)中的式子

不一定成立.因为可得 $\sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$,$\sin\beta=\pm\sqrt{2\sqrt{3}-3}$(两个“±”应任意搭配),但仅在 $\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$,$\cos\beta=\sqrt{3}-1$ 且异号时(2)中的式子才成立.

(2)的较好处理方法是——万能公式:

(2)中的式子即

$$\cos\alpha(\cos\beta-1)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\beta \qquad ⑤$$

① 当 $\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ 即 $\beta=2l\pi\pm\dfrac{\pi}{3}(l\in\mathbf{Z})$ 时,⑤即

$$2\sin\alpha\sin\beta=-\cos\alpha-1 \qquad ⑥$$

当 $\beta=2l\pi+\dfrac{\pi}{3}(l\in\mathbf{Z})$ 时,可得

$$\begin{cases}\cos\alpha=-1\\ \sin\alpha=0\end{cases} 或 \begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

即 当 $\beta=2l\pi+\dfrac{\pi}{3}(l\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=2k\pi+\pi$,或 $\alpha=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ ⑦

同理,还可得

当 $\beta=2l\pi-\dfrac{\pi}{3}(l\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=2k\pi+\pi$,或 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ ⑧

从而,可得

当 $\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ 即 $\beta=2l\pi\pm\dfrac{\pi}{3}(l\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=2k\pi\mp(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\alpha=2k\pi+\pi$(两个“±”按顺序搭配).

② 当 $\cos\beta\neq\dfrac{1}{2}$ 时(由(2)中的式子可得 $\cos\alpha\neq-1$,所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 有意义).

(2)中的式子即⑤,在⑤中用万能公式,得

$$\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\cdot(\cos\beta-1)=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\beta+\cos\beta$$

$$(2\cos\beta-1)\tan^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\beta\cdot\tan\frac{\alpha}{2}+1=0(2\cos\beta-1\neq0)$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{-\sin\beta\pm\sqrt{2-2\cos\beta-\cos^2\beta}}{2\cos\beta-1}(当\cos\beta\leqslant\sqrt{3}-1时) \qquad ⑨$$

从而,可得

当 $\cos\beta\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{3}-1\right]$ 时,(2)中的式子即式⑩;

当 $\cos\beta \in (\sqrt{3}-1,1]$ 时,(2) 中的式子不能成立.

所以,(2) 中的式子成立的充要条件是:

$$\begin{cases}\alpha = 2k\pi+\pi,\text{或 } 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \\ \beta = 2l\pi \mp \dfrac{\pi}{3}\end{cases}(k,l\in \mathbf{Z},\text{两个“}\pm\text{”按顺序搭配})$$

或

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-\sin\beta \pm \sqrt{2-2\cos\beta-\cos^2\beta}}{2\cos\beta-1}\left(\cos\beta\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}-1\right]\right)$$

# 谈谈课本上的两个公式

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(下)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第45页第7题的(3),(4)小题是两个有用的公式:

(3)$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

(4)$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

其中的结论(4)就是

**正弦平方差公式** $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

这是一个形式优美,使用频繁的三角公式.运用和、差角公式展开右边后可以证得此公式成立.熟悉和差化积公式(见教科书第50页例5(2)及第51页第3题)的同学还可给出下面的简洁证明:

**证明** $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

**例1** 已知$\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\sin\beta=\frac{1}{3}$,则$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=$________.

**解** 由正弦平方差公式,立得

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{36}$$

**例2** (2006年四川卷理科第11题)设$a$、$b$、$c$分别是$\triangle ABC$的三个内角$A$,$B$,$C$所对的边,则$a^2=b(b+c)$是$A=2B$的( )

(A)充要条件 (B)充分而不必要条件

(C)必要而不充分条件 (D)既不充分又不必要条件

**解** 由正弦定理,可得

$a^2=b(b+c)\Leftrightarrow\sin^2A-\sin^2B=\sin B\sin C\Leftrightarrow\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin B\sin C$(正弦平方差公式)$\Leftrightarrow\sin(A-B)=\sin B$(因为$\sin(A+B)=\sin C>0$)$\Leftrightarrow A-B=B\Leftrightarrow A=2B$

(倒数第二步中“$\Rightarrow$”的理由是:在$\triangle ABC$中,由$\sin(A-B)=\sin B>0$,得$B,A-B\in(0,\pi)$,又得$A-B=B$,或$(A-B)+B=\pi$,所以$A=2B$.)

所以选 A.

以上结论(3) 也是一个很有用的公式，在某些时候会起到不可替代的作用. 比如我们来看看教科书第 46 页第 16 题:

*16. 已知 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$, $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$, 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

解答此题肯定容易:将已知两式平方相加即可，答案为$\frac{59}{72}$.

但如何求 $\cos(\alpha+\beta)$ 呢?将已知两式平方相减并用结论(3) 即可，答案为 $-\frac{5}{13}$.

请解答该题的一般情形:

已知 $\sin\alpha-\sin\beta=a$, $\cos\alpha-\cos\beta=b$, 求 $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

**解** 将已知两式平方相加，可得 $\cos(\alpha-\beta)=1-\frac{a^2+b^2}{2}$;

用已知的第二式的平方减去第一式的平方，可得

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha+\beta)=b^2-a^2$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(a^2+b^2\neq 0)$$

**注** (1) 当 $a^2+b^2=0$ 即 $a=b=0$ 时，得 $\sin\alpha=\sin\beta$, $\cos\alpha=\cos\beta$, $\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$, 所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos2\alpha$.

(2) 将已知两式和差化积再相除可求得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$, 又用万能公式可求得 $\cos(\alpha+\beta)$.

# 先把未知角表示成已知角的和(差)后再解题

我们在解某些三角题时,不要急着用和(差)角公式 $\sin(\alpha \pm \beta)$,$\cos(\alpha \pm \beta)$,$\tan(\alpha \pm \beta)$ 展开,而是先把未知角表示成已知角的和或差(有时还要把未知角表示成已知角的倍数和)后再解题下面举例说明这种技巧.

**例1** 已知 $\tan(\alpha+\beta)=3$,$\tan(\alpha-\beta)=5$,求 $\tan2\alpha$,$\tan2\beta$ 的值.

**解** $\tan2\alpha=\tan[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=$

$$\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{3+5}{1-3\times5}=-\frac{4}{7}$$

$$\tan2\beta=\tan[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=$$

$$\frac{3-5}{1+3\times5}=-\frac{1}{8}$$

**例2** 求证$\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

**证明** 即证 $\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$

$$\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]-\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

这时再用和(差)角公式展开上式的左边,即知上式成立,所以要证结论成立.

**例3** (全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(下)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第50页的例5(2))求证:$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$.

**分析** 先把未知的角 $\theta$,$\varphi$ 表示成已知角$\dfrac{\theta+\varphi}{2}$,$\dfrac{\theta-\varphi}{2}$的和(差),再用和(差)角公式展开,可得要证结论成立.

**例4** (教科书第101页第10题)已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{3}{5}$,$\dfrac{17\pi}{12}<x<\dfrac{7\pi}{4}$,求$\dfrac{\sin2x+2\sin^2x}{1-\tan x}$的值.

**解** 得$\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\in\left(\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$,所以 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=-\dfrac{4}{3}$.

$$原式=\frac{\sin2x(1+\tan x)}{1-\tan x}=\sin2x\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$$
$$-\cos2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$$
$$\left[1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$$
$$\left[1-2\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{28}{75}$$

**例 4** （教科书第 101 页第 14 题）已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，且 $m\neq1,\alpha\neq\frac{k\pi}{2},\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，求证 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$.

**分析** 先把未知的角 $\beta,2\alpha+\beta$ 表示成已知角 $\alpha+\beta,\alpha$ 的差、和，再用和（差）角公式展开，可得要证结论成立.

## 练 习

1.（教科书第 46 页第 11 题）已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5},\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，且 $(\alpha-\beta)\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),(\alpha+\beta)\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\cos2\alpha,\cos2\beta$ 的值（提示：$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$）.

2.（教科书第 46 页第 12 题）已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7},\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，且 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\cos\beta$ 的值.

**参考答案**

1. $\cos2\alpha=-\frac{7}{25},\cos2\beta=-1$；2. $\cos\beta=\frac{1}{2}$.

# 已知 $\sin\alpha\cos\beta$ 的值巧求 $\cos\alpha\sin\beta$ 的范围

**定理 1** 若 $\sin\alpha\cos\beta = a(a\in[-1,1])$，则 $\cos\alpha\sin\beta$ 的取值范围是 $[|a|-1, 1-|a|]$.

**证法 1** 由和(差)角公式，可得

$$-1\leqslant a+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\leqslant 1 \quad ①$$

$$-1\leqslant a-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)\leqslant 1 \quad ②$$

从而可得
$$|a|-1\leqslant\cos\alpha\sin\beta\leqslant 1-|a| \quad ③$$

若能再证明式③中的两个等号均能取到，再由 $\cos\alpha\sin\beta$ 的值是连续变化的，便可得定理 1 成立. 需分三种情形来证：

(1) 当 $-1\leqslant a<0$ 时，式③即 $-a-1\leqslant\cos\alpha\sin\beta\leqslant 1+a$.

易得 $-a-1=\cos\alpha\sin\beta$ 的充要条件是式①中的 $\sin(\alpha+\beta)=-1$，即 $\alpha+\beta=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$；

易得 $\cos\alpha\sin\beta=1+a$ 的充要条件是式②中的 $\sin(\alpha-\beta)=-1$，即 $\alpha-\beta=2l\pi-\frac{\pi}{2}(l\in\mathbf{Z})$.

(2) 当 $a=0$ 时，式③即 $-1\leqslant\cos\alpha\sin\beta\leqslant 1$.

再由 $\sin\alpha\cos\beta=0$ 可得 $-1=\cos\alpha\sin\beta$ 的充要条件是 $\alpha=k\pi,\beta=l\pi+\frac{\pi}{2}(k,l\in\mathbf{Z}$，且 $2\nmid k+l)$；$\cos\alpha\sin\beta=1$ 的充要条件是 $\alpha=k\pi,\beta=l\pi+\frac{\pi}{2}(k,l\in\mathbf{Z}$，且 $2\mid k+l)$.

(3) 当 $0<a\leqslant 1$ 时，式③即 $a-1\leqslant\cos\alpha\sin\beta\leqslant 1-a$.

易得 $a-1=\cos\alpha\sin\beta$ 的充要条件是式②中的 $\sin(\alpha-\beta)=1$，即

$$\alpha-\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$$

易得 $\cos\alpha\sin\beta=1-a$ 的充要条件是式①中的 $\sin(\alpha+\beta)=1$，即 $\alpha+\beta=2l\pi+\frac{\pi}{2}(l\in\mathbf{Z})$.

总之，式③中的两个等号均能取到，所以定理 1 成立.

**证法 2** 当 $a=0$ 时，可得要证结论成立.

当 $a\neq 0$ 时，得 $\sin\alpha\neq 0,\cos\beta=\frac{a}{\sin\alpha}$，所以

$(\cos\alpha\sin\beta)^2 = (1-\sin^2\alpha)\left(1-\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}\right) = 1+a^2-\left(\sin^2\alpha+\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}\right) \leqslant$
$(|a|-1)^2$(均值不等式)

再由 $a\in[-1,1]$ 且 $a\neq 0$,得式 ③ 在这里也成立,并且 $a\in[-1,1]$ 时恒有式 ③ 成立.

接下来可以验证式 ③ 中的两个等号均能取到,所以定理 1 成立.

**定理 2** (1) 若 $\cos\alpha\cos\beta = a(a\in[-1,1])$,则 $\sin\alpha\sin\beta$ 的取值范围是$[|a|-1,1-|a|]$;

(2) 若 $\sin\alpha\sin\beta = a(a\in[-1,1])$,则 $\sin\alpha\sin\beta$ 的取值范围是$[|a|-1,1-|a|]$;

(3) 若 $\cos\alpha\sin\beta = a(a\in[-1,1])$,则 $\sin\alpha\cos\beta$ 的取值范围是$[|a|-1,1-|a|]$.

**证明** (1) 在定理 1 中令 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}-\alpha'$ 立得.

(2) 在定理 1 中令 $\beta = \dfrac{\pi}{2}-\beta'$ 立得.

(3) 在(2) 中令 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}-\alpha'$ 立得.

用定理 1 的证法 1 即可快速解决定理 1、2 中的四类取值范围问题.若是填空、选择题,通过 ①,式 ② 得到的式 ③ 即为最后结果.

# 已知扇形的内接矩形面积的最大值

可不妨设已知扇形的半径为1.当此扇形的圆心角 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,通过画图试验可知,作此扇形的内接矩形只有两种情形(见以下图1,图2;当矩形的一边在半径 $OB$ 上时,与图1的情形相同):

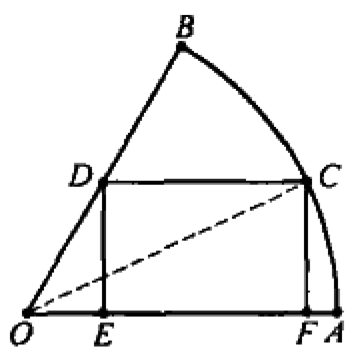



图1

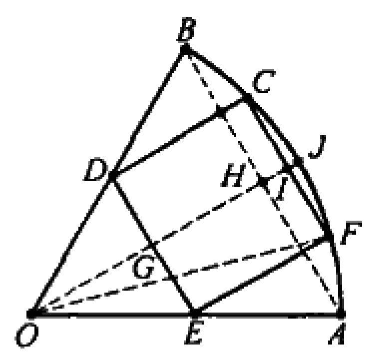



图2

在图1中,设 $\angle AOC = \theta(0 < \theta < \alpha)$,得

$$CF = OC\sin\theta, EF = OF - OE = OC\cos\theta - OC\sin\theta\cot\alpha, OC = 1 \quad ①$$

$$S_{矩形CDEF} = \sin\theta(\cos\theta - \sin\theta\cot\alpha) = \frac{1}{2}[\sin2\theta - \cot\alpha(1-\cos2\theta)] =$$

$$\frac{1}{2\sin\alpha}(\sin\alpha\sin2\theta + \cos\alpha\cos2\theta) - \frac{1}{2}\cot\alpha = \frac{1}{2\sin\alpha}\cos(2\theta - \alpha) - \frac{1}{2}\cot\alpha \quad ②$$

所以当且仅当 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 时,$S_{矩形CDEF}$ 取到最大值,且最大值是 $\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{1}{2}\cot\alpha = \frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

在图2中,设 $\angle AOF = \theta\left(0 < \theta < \frac{\alpha}{2}\right)$,得

$$\angle JOF = \frac{\alpha}{2} - \theta, CF = 2IF = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)$$

$$EF = OI - GE\cot\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad ③$$

$$S_{矩形CDEF} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad ④$$

所以当且仅当 $\theta = \frac{\alpha}{4}$ 时，$S_{矩形CDEF}$ 取到最大值，且最大值是 $\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{4}$.

又由 $\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，可证 $\tan\frac{\alpha}{4} < \frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$，所以只有在图 1 的情形中，点 $C$ 是弧 $AB$ 的中点时半径为 1 且圆心角为 $\alpha\left(\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的扇形 $AOB$ 的内接矩形 $CDEF$ 的面积最大，且最大值为 $\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

对于半径为 1 且圆心角为 $\alpha\left(\alpha \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$ 的扇形 $AOB$ 的内接矩形只有图 2 的情形，且解法及结论也同上：当且仅当 $\angle AOF = \frac{\alpha}{4}$ 时，该扇形的内接矩形 $CDEF$ 的面积取到最大值，且最大值是 $\tan\frac{\alpha}{4}$.

对于半径为 1 且圆心角为 $\alpha\left(\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的扇形 $AOB$ 的内接矩形 $CDEF$ 何时为正方形呢？

先看图 1 的情形：由 ①，得 $CF = EF = \sin\theta = \cos\theta - \sin\theta\cot\alpha$，即

$$\cot\theta = 1 + \cot\alpha \tag{5}$$

再由万能公式及 ② 可得此时正方形 $CDEF$ 的面积为

$$S_{正方形CDEF} = \frac{1}{2}[\sin2\theta - \cot\alpha(1-\cos2\theta)] = \frac{1}{(1+\cot\alpha)^2+1} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 2} \tag{6}$$

再看图 2 的情形：由 ③，得 $CF = EF = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$，即

$$\tan\theta = \frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \tag{7}$$

再由 ④ 可得此时正方形 $CDEF$ 的面积为

$$S_{正方形CDEF} = \left(\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{2(1-\cos\alpha)}{3+2\sin\alpha-2\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{1+2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha+\cos\alpha} \tag{8}$$

再比较 ⑥，⑧ 的结果，可得如下结论（文献[1] 已得，并有详细过程）：

当 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$ 时,图 1 中正方形的面积小于图 2 中正方形的面积;当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,图 1 中正方形的面积等于图 2 中正方形的面积;当 $\frac{\pi}{6}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,图 1 中正方形的面积大于图 2 中正方形的面积.

文献[2] 还给出了图 1,图 2 中的扇形的内接正方形的几何作图法.

最后,笔者再提出如下问题:

(1) 当扇形的圆心角在 $(\pi,2\pi)$ 时,如何用这个扇形剪出一块面积最大的矩形(正方形),并求出其面积.

(2) 当扇形的圆心角在 $(\pi,2\pi)$ 时,如何用这个扇形剪出一块周长最大的矩形(正方形),并求出其周长.

(3) 当扇形的圆心角在 $(0,\pi]$ 时,求这个扇形的内接矩形周长的取值范围.

## 参考文献

[1] 徐道.数学问题 1405.数学通报,2002(12):44-45.

[2] 郭要红.扇形内的内接正方形.数学通报,2005(5):63-64.

# 用公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 的变式解题

由和角公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 立得下面一些很有用的公式：

$$\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)=\tan\alpha+\tan\beta \quad ①$$

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta=\tan(\alpha+\beta) \quad ②$$

$$\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta) \quad ③$$

**注**　公式①，②，③中的 $\alpha,\beta$ 都是在式子的左右两边都有意义时才成立.

**例1**　求下面各式的值：

(1) $\tan20^\circ+\tan40^\circ+\sqrt{3}\tan20^\circ\tan40^\circ$；

(2) $\dfrac{\tan20^\circ+\tan40^\circ-\sqrt{3}}{\tan20^\circ\tan40^\circ}$.

**解**　(1) 在式②中令 $\alpha=20^\circ,\beta=40^\circ$，立得

原式 $=\tan60^\circ=\sqrt{3}$.

(2) 在式③中令 $\alpha=20^\circ,\beta=40^\circ$，可得

原式 $=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$.

**例2**　(全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(下)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)复习参考题四A组的第15(3)题(第98页))已知 $A,B$ 为锐角，求证 $A+B=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow(1+\tan A)(1+\tan B)=2$.

**证明**　由 $A,B$ 为锐角，在式①中令 $\alpha=A,\beta=B$ 得

$$A+B=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\tan(A+B)=1\Leftrightarrow1-\tan A\tan B=\tan A+\tan B$$

$$\Leftrightarrow(1+\tan A)(1+\tan B)=2$$

**例3**　求 $\tan17^\circ\tan43^\circ+\tan17^\circ\tan30^\circ+\tan30^\circ\tan43^\circ$ 的值.

**解**　原式 $=\tan17^\circ\tan43^\circ+\cot60^\circ(\tan17^\circ\tan43^\circ)=$

$\tan17^\circ\tan43^\circ+1-\tan17^\circ\tan43^\circ$(用式①) $=1$

**例4**　化简 $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$.

**解**　原式 $=\tan\left[\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\right]\cdot$

$\left[1+\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\right]$(用式①) $=2\tan x$.

**例 5** 求$\dfrac{1-\tan 7^\circ-\tan 8^\circ-\tan 7^\circ\tan 8^\circ}{1+\tan 7^\circ+\tan 8^\circ-\tan 7^\circ\tan 8^\circ}$的值.

**解** 原式 $=\dfrac{(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)-(\tan 7^\circ+\tan 8^\circ)}{(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)+(\tan 7^\circ+\tan 8^\circ)}=$

$\dfrac{(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)-\tan 15^\circ(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)}{(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)+\tan 15^\circ(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)}$(用①式)$=$

$\dfrac{(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)(1-\tan 15^\circ)}{(1-\tan 7^\circ\tan 8^\circ)(1+\tan 15^\circ)}=$

$\dfrac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**例 6** 已知$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$,$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$,求$\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\beta\tan(\alpha+\beta)}$的值.

**解** 原式 $=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\beta\tan(\alpha+\beta)}=$

$\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}{\tan^2\beta\tan(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$.

**例 7** 计算$\tan 67^\circ30'-\tan 22^\circ30'$.

**解** 原式 $=\tan(67^\circ30'-22^\circ30')(1+\tan 67^\circ30'\tan 22^\circ30')=$

$\tan 45^\circ(1+\cot 22^\circ30'\tan 22^\circ30')=2$

## 练 习

1.若$\tan A\tan B=\tan A+\tan B+1$,则$\tan(A+B)$的值为(　　)

A.1　　B.$-1$　　C.$\pm 1$　　D.0

2.若$\alpha+\beta=-\dfrac{\pi}{4}$,则$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)$的值为(　　)

A.1　　B.$-1$　　C.2　　D.$-2$

3.$\tan 70^\circ-\tan 10^\circ-\sqrt{3}\tan 70^\circ\tan 10^\circ$的值为(　　)

A.$-\sqrt{3}$　　B.0　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4.(教科书第44页第4(1)题)证明$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\sqrt{3}$.

**参考答案** 1.B　2.D　3.C

# 余弦定理的妙用

**题1**　(全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2006年人民教育出版社)第33页第6题)设 $a,b,c$ 分别是 $\triangle ABC$ 的三条边,求证:$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

**证明**　$2(ab+bc+ca)>2ab\cos C+2bc\cos A+2ca\cos B=$
$(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+$
$(c^2+a^2-b^2)=a^2+b^2+c^2.$

**题2**　已知 $a,b,c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边,那么方程 $a^2x^2-(a^2-b^2+c^2)x+c^2=0$,则(　　)

A.有两个不等实根　　B.有两个相等实根

C.无实根　　D.视 $a,b,c$ 的具体情况而定

**解**　$\Delta=(a^2-b^2+c^2)^2-4a^2c^2=$
$(2ac\cos B)^2-4a^2c^2=$
$-4a^2c^2\sin^2B<0$

所以原方程无实根,选C.

# 2008 年高考试题全国卷(Ⅱ) 理科压轴题的简解

2008 年高考试题全国卷(Ⅱ) 理科压轴题(第 22 题) 及提供的解答是:

设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 如果对任何 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\leqslant ax$,求 $a$ 的取值范围.

**解** (以下叙述略有改动)

(1) 略.

(2) 令 $g(x)=ax-f(x)$,得

$$g'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\frac{2}{2+\cos x}+\frac{3}{(2+\cos x)^2}=$$
$$3\left(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{1}{3}$$

所以当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$g'(x)\geqslant 0$;所以当 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $f(x)\leqslant ax$.

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时,令 $h(x)=\sin x-3ax$,得 $h'(x)=\cos x-3a$,可得当 $x\in(0,\arccos 3a)$ 时 $h'(x)>0,h(x)>h(0)=0,\sin x>3ax,f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}>\frac{\sin x}{3}>ax$,说明此时不合题意.

当 $a\leqslant 0$ 时,有 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}>a\cdot\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}$,说明此时也不合题意.

所以所求的取值范围是$[\frac{1}{3},+\infty]$.

笔者再给出第(2) 问的一种简洁解法:

令 $g(x)=ax-f(x)$,得 $g'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$.

$g'(x)$ 为连续函数,有 $\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)=a-\frac{1}{3}$.

若 $a-\frac{1}{3}<0$,则存在 $\varepsilon>0$,使得 $g'(x)$ 在$(0,\varepsilon)$ 上恒有 $g'(x)<0$(可参考函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义),则对于任意的 $x\in(0,\varepsilon)$,有 $g'(x)<0$,此时有

$g(x) < g(0) = 0, f(x) > ax$，与题设矛盾！所以 $a - \frac{1}{3} \geqslant 0, a \geqslant \frac{1}{3}$.

当 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时，$g'(x) = \frac{a\cos^2 x + (4a - 2)\cos x + (4a - 1)}{(2 + \cos x)^2}$.

设 $h(t) = at^2 + (4a - 2)t + (4a - 1)$，因为 $\Delta = 4(1 - 3a) \leqslant 0$，所以 $h(t) \geqslant 0$ 恒成立，即 $g'(x) \geqslant 0$ 恒成立，得 $g(x) \geqslant g(0) = 0$，即 $f(x) \leqslant ax$ 恒成立. 说明 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 符合题意，所以所求 $a$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

# 一类三角问题的完整解答

## 1 问题

**问题1** 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=m,\sin\alpha+\sin\beta=n$,求 $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$ 的值.

**问题2** 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=m,\sin\alpha-\sin\beta=n$,求 $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$ 的值.

**问题3** 已知 $\cos\alpha-\cos\beta=m,\sin\alpha+\sin\beta=n$,求 $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$ 的值.

**问题4** 已知 $\cos\alpha-\cos\beta=m,\sin\alpha-\sin\beta=n$,求 $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$ 的值.

它们是文献[1],[2]中研究的问题的推广,文献[3]用向量的方法也研究了这些问题,但没有给出具体的答案,本文仅用一元二次方程的知识给出它们的完整解答.

## 2 问题的转化

因为问题2中的$(\alpha,\beta)$即问题1中的$(\alpha,-\beta)$,问题3中的$(\alpha,\beta)$即问题1中的$(\alpha,\pi-\beta)$,问题4中的$(\alpha,\beta)$即问题1中的$(\alpha,\pi+\beta)$,所以只需解决问题1即可.

## 3 问题1的解决

**定理1** 若 $\cos\alpha+\cos\beta=m,\sin\alpha+\sin\beta=n$,则

(1) 为 $m=n=0$ 时,题设等价于 $\alpha-\beta=(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(2) 当 $0<m^2+n^2\leqslant4$ 时,题设等价于(下文中的"±"前后选取一致):

$$\sin\alpha=\frac{n(m^2+n^2)\pm m\sqrt{(m^2+n^2)(4-m^2-n^2)}}{2(m^2+n^2)}$$

$$\cos\alpha=\frac{m(m^2+n^2)\mp n\sqrt{(m^2+n^2)(4-m^2-n^2)}}{2(m^2+n^2)}$$

$$\sin\beta=\frac{n(m^2+n^2)\mp m\sqrt{(m^2+n^2)(4-m^2-n^2)}}{2(m^2+n^2)}$$

$$\cos\beta = \frac{m(m^2+n^2) \pm n\sqrt{(m^2+n^2)(4-m^2-n^2)}}{2(m^2+n^2)}$$

(3) 当 $m^2+n^2>4$ 时,题设不成立.

**证明**　(1) 显然成立.

(2) 先证关于 $\sin\alpha,\cos\alpha,\sin\beta,\cos\beta$ 的解的结论.

由题设可得 $\cos\alpha = m-\cos\beta,\sin\alpha = n-\sin\beta$,又 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,所以

$$2m\cos\beta = m^2+n^2-2n\sin\beta$$

① 当 $m=0$ 时,得 $n\neq 0$,所以 $\sin\beta = \frac{n}{2}$,也得 $\sin\alpha = \frac{n}{2}$,$\cos\alpha = \mp\frac{\sqrt{4-n^2}}{2}$,$\cos\beta = \pm\frac{\sqrt{4-n^2}}{2}$.

即此时要证结论成立.

② 当 $m\neq 0$ 时,得 $\cos\beta = \frac{m^2+n^2-2n\sin\beta}{2m}$,再由 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$,可得要证结论成立.

再由解的结论证得题设.只需检验这些解均满足题设即可.

(3) 将题设中的两式平方相加,得

$$2+2\cos(\alpha-\beta) = m^2+n^2$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(m^2+n^2)-1$$

所以要证结论成立.

**定理 2**　当 $m^2+n^2>4$ 时,问题 1 的答案不存在;当 $m^2+n^2\leqslant 4$ 时,问题 1 的答案存在,此时答案为:

$$\sin(\alpha+\beta) = \begin{cases} \dfrac{2mn}{m^2+n^2} & (\text{当 } 0<m^2+n^2\leqslant 4 \text{ 时}) \\ -\sin 2\alpha & (\text{当 } m=n=0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2)(4-m^2-n^2)}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \begin{cases} \dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2} & (\text{当 } 0<m^2+n^2\leqslant 4 \text{ 时}) \\ -\cos 2\alpha & (\text{当 } m=n=0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(m^2+n^2)-1$$

**证明**　由定理 1 及和、差角公式可证.

对于定理 2,还可给出关于 $\sin(\alpha+\beta),\cos(\alpha+\beta),\cos(\alpha-\beta)$ 结论的简洁

证明(只需证 $m^2+n^2>0$ 时的情形):

在定理1(3)中已证出“$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(m^2+n^2)-1$”

$$\cos\alpha+\cos\beta=m=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=n=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

当 $m\neq 0$ 时,可得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{n}{m}$.

由万能公式,得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

当 $m=0,n\neq 0$ 时,得 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0,\alpha+\beta=(2k+1)\pi$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=0,\cos(\alpha+\beta)=-1$,此时结论也成立.

由定理2容易得到问题1的解的组数.

## 参考文献

[1] 赵春祥.一道三角习题解法启示.中学数学教学参考,2001(11):17-18.
[2] 张在明.再谈一道三角题的解法.中学数学教学参考,2002(6):7-8.
[3] 刘德明.一类三角问题解的讨论.数学通讯,2003(7):14-15.

# 浅探方程 $\sin x = ax$ 解的个数

高一学生可能做过这样的题：

求方程 $\sin x = \frac{x}{10}$ 解的个数.

**解**　在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = \sin x$ 及 $y = \frac{x}{10}$ 的图象，因为它们有且仅有 7 个交点，所以方程 $\sin x = \frac{x}{10}$ 有且仅有 7 个解.

本文欲研究一般性的问题.

**问题**　求方程 $\sin x = ax$($a \in \mathbf{R}^*$，$\mathbf{R}^*$ 指非零实数集）解的个数.

**定理 1**　若方程 $\sin x = ax$($a \in \mathbf{R}^*$）满足 $x \in \mathbf{R}^+$ 的解有且仅有 $s$ 个，则方程 $\sin x = ax$($a \in \mathbf{R}^*$）满足 $x \in \mathbf{R}$ 的解有且仅有 $2s+1$ 个.

**定理 2**　若 $\frac{1}{a} \in [(2n+\frac{1}{2})\pi, (2n+2)\pi]$($n \in \mathbf{N}$)，则方程 $\sin x = ax$ ($x \in \mathbf{R}$) 的解有且仅有 $4n+3$ 个.具体的情形是：在 $x \in (2k\pi, (2k+2)\pi]$ 上，当 $k=0$ 时为 1 个解，当 $k = 1,2,\cdots,n$ 时均为 2 个解，当 $k > n$ 时无解，在 $x \in [-(2k+2)\pi, -2k\pi)$ 上，当 $k=0$ 时为 1 个解，当 $k = 1,2,\cdots,n$ 时均为 2 个解，当 $k > n$ 时无解；$x = 0$ 是方程的解.

**证明**　因图象法可证（注意 $y = ax$ 的图象是过点 $(0,0)$，$(\frac{1}{a},1)$ 的直线）.

**定理 3**　若 $-\frac{1}{a} \in [(2n-\frac{1}{2})\pi, (2n+1)\pi]$($n \in \mathbf{N}^*$)，则方程 $\sin x = ax$($x \in \mathbf{R}$) 的解有且仅有 $4n+1$ 个，具体的情形是：在 $x \in (2k\pi, (2k+2)\pi]$ 上，当 $k = 0,1,\cdots,n-1$ 时均为 2 个解，当 $k \geqslant n$ 时无解；在 $x \in [-(2k+2)\pi, -2k\pi)$ 上，当 $k = 0,1,\cdots,n-1$ 时均为 2 个解，当 $k \geqslant n$ 时无解；$x = 0$ 是方程的解.

**证明**　用图象法可证（注意：$y = ax$ 的图象是过点 $(0,0)$，$(-\frac{1}{a},-1)$ 的直线）.

定理 2,3 只是解决了问题的一些特例，下面再作一般性的研究.

过原点 $(0,0)$ 作 $y = \sin x$，$x \in [2k\pi, (2k+2)\pi)$($k \in \mathbf{N}$) 的图象的切线，设切点为 $(\alpha, \sin\alpha)$，因为 $y' = \cos x$，所以切线的斜率为 $\cos\alpha$，切线方程为

$$y = x\cos\alpha$$

**定理 4** 过原点(0,0)作 $y=\sin x, x\in[2k\pi,(2k+2)\pi)(k\in\mathbf{N})$ 图象的切线.

(1) 当 $k=0$ 时,由不等式 $\alpha<\tan\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 知切线只有一条即 $y$ 轴.

(2) 当 $k>0$ 时,切线有且仅有两条,又因为切点 $(\alpha,\sin\alpha)$ 在切线上,所以 $\sin\alpha=\alpha\cos\alpha$,可证 $\tan\alpha=\alpha$.一条切线的斜率为正数,设此时的切点为 $(x_k,\sin x_k)$,则 $x_k\in[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})$,$x_k$ 也是方程 $\tan x=x$ 满足 $x\in[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 的唯一解;一条切线的斜率为负数,设此时的切点为 $(x'_k,\sin x'_k)$,则 $x'_k\in((2k+1)\pi,(2k+\frac{3}{2})\pi)$,$x'_k$ 也是方程 $\tan x=x$ 满足 $x\in((2k+1)\pi,(2k+\frac{3}{2})\pi)$ 的唯一解.

**定义** 本文中的 $x_k$ 表示方程 $\tan x=x$ 满足 $x\in[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{N})$ 的唯一解;$x'_k$ 表示方程 $\tan x=x$ 满足 $x\in((2k+1)\pi,(2k+\frac{3}{2})\pi)(k\in\mathbf{N})$ 的唯一解.

**定理 5** (1) 若 $\cos x_{k+1}<a<\cos x_k(k\in\mathbf{N})$,则方程 $\sin x=ax(x\in\mathbf{R})$ 的解有且仅有 $4k+3$ 个.具体的情形是:在 $x\in(2n\pi,(2n+2)\pi]$ 上,当 $n=0$ 时为 1 个解,当 $n=1,2,\cdots,k$ 时均为 2 个解,当 $n>k$ 时无解,在 $x\in[-(2n+2)\pi,-2n\pi)$ 上,当 $n=0$ 时为 1 个解,当 $n=1,2,\cdots,k$ 时均为 2 个解,当 $n>k$ 时无解;$x=0$ 是方程的解.

(2) 若 $a=\cos x_k$,则方程 $\sin x=ax(x\in\mathbf{R})$ 的解有且仅有 $4k+1$ 个.具体的情形是:在 $x\in(2n\pi,(2n+2)\pi]$ 上,当 $n=0$ 时为 1 个解,当 $n=1,2,\cdots,k-1$ 时均为 2 个解,当 $n=k$ 时为 1 个解,当 $n>k$ 是无解;在 $x\in[-2(2n+2)\pi,-2n\pi)$ 上,当 $n=0$ 时为 1 个解,当 $n=1,2,\cdots,k-1$ 时均为 2 个解,当 $n=k$ 时为 1 个解,当 $n>k$ 时无解;$x=0$ 是方程的解.

**证明** 如图 1,直线 $l_k$ 与 $y=\sin x, x\in[2k\pi,(2k+2)\pi)$ 相切,切点为 $(x_k,\sin x_k)$,此直线的斜率为

$$\frac{\sin x_k}{x_k}=\frac{\sin x_k}{\tan x_k}=\cos x_k$$

所以图 1 中的直线 $l:y=ax$ 的斜率 $a\in(\cos x_{k+1},\cos x_k)$.

从而可证定理 5 成立.

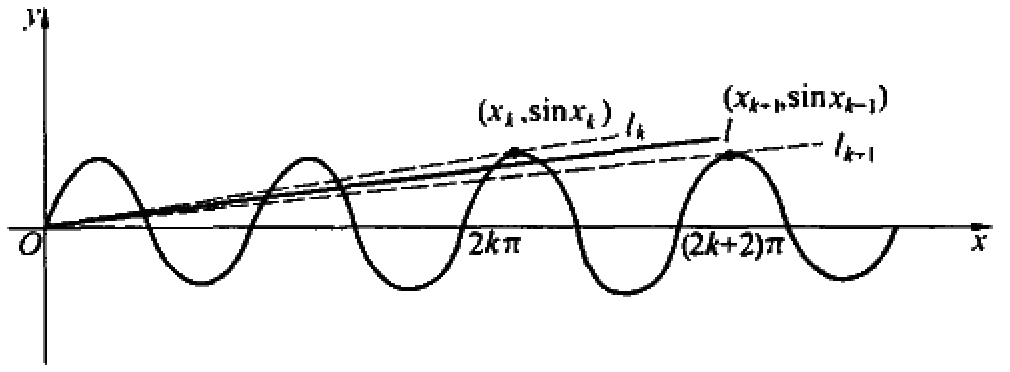



图 1

**定理 6**　(1) 若 $\cos x'_k < a < \cos x'_{k+1}(k \in \mathbf{N})$，则方程 $\sin x = ax(x \in \mathbf{R})$ 的解有且仅有 $4k+5$ 个. 具体的情形是：在 $x \in (2n\pi, (2n+2)\pi)$ 上，当 $n = 0,1,2,\cdots,k$ 时均有 2 个解，当 $n > k$ 时无解；在 $x \in [-(2n+2)\pi, -2n\pi)$ 上，当 $n = 0,1,2,\cdots,k$ 时均为 2 个解，当 $n > k$ 时无解；$x = 0$ 是方程的解.

(2) 若 $a = \cos x'_k$，则方程 $\sin x = ax(x \in \mathbf{R})$ 的解有且仅有 $4k+3$ 个. 具体的情形是：在 $x \in (2n\pi, (2n+2)\pi]$ 上，当 $n = 0,1,\cdots,k-1$ 是均为 2 个解，当 $n = k$ 时为 1 个解，当 $n > k$ 时无解；在 $x \in [-(2n+2)\pi, -2n\pi)$ 上，当 $n = 0,1,\cdots,k-1$ 时均为 2 个解，当 $n = k$ 时为 1 个解，当 $n > k$ 时无解；$x = 0$ 是方程的解.

(3) 若 $a < \cos x'_0$，则方程 $\sin x = ax(x \in \mathbf{R})$ 有唯一解 $(x = 0)$.

(读者参见图 2 可证)

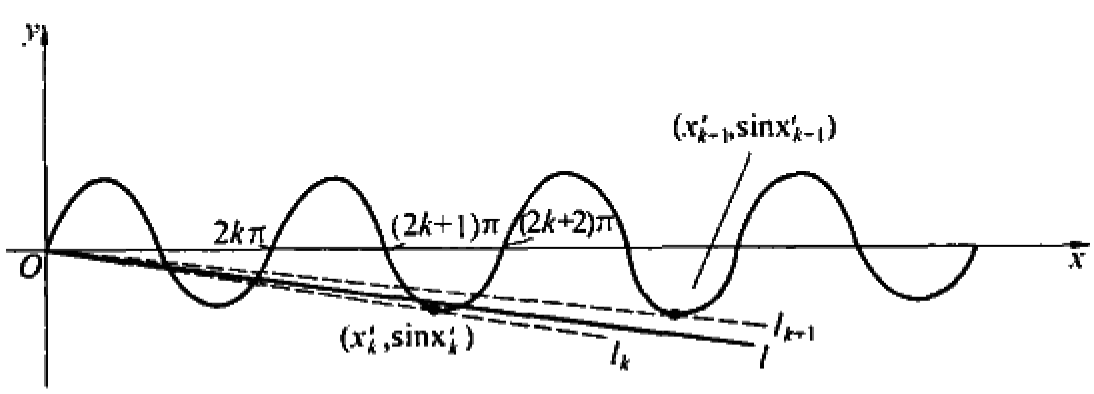



图 2

# 用三角形面积公式证明 $S_{\alpha\pm\beta}$

本文仅用三角形面积公式

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BA\cdot CA\sin A$$

证明三角函数的两个公式:

(1) $S_{\alpha+\beta}$: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$($\alpha,\beta$ 均为锐角).

(2) $S_{\alpha-\beta}$: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$($\alpha,\beta$ 均为锐角, $\alpha>\beta$).

**(1) 的证明** 见图 1. 在 Rt$\triangle AOH$ 中, $\angle AOH=\alpha$, $\angle AHO=90°$. 延长 $AH$ 至 $B$, 使 $\angle HOB=\beta$. 有 $OH=OA\cos\alpha=OB\cos\beta$.

由 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOH}+S_{\triangle BOH}$, 得

$$\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cos\beta\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}BO\cdot AO\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

所以
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(2) 的证明可由图 2 给出, 这里略去.

再由三角函数的诱导公式, 容易证得公式(1)(2)中的 $\alpha,\beta$ 为任意角时仍成立.

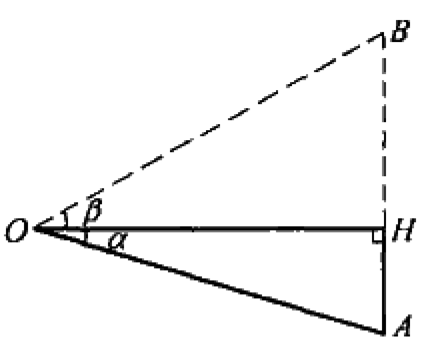



图 1

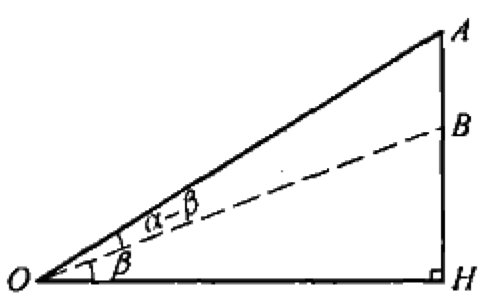



图 2

# 对一道三角例题的再研究

## 1　引理

引理[1]　在 $\triangle ABC$ 中，以 $\sin A,\sin B,\sin C$ 为边可以构造一个 $\triangle A'B'C'$（角 $A',B',C'$ 的对边分别是 $\sin A,\sin B,\sin C$），且 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径为$\frac{1}{2}$.

## 2　一个三角恒等式

注意引理中的 $A'=A,B'=B,C'=C$，并对 $\triangle A'B'C'$ 运用余弦定理，可得

$$\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C=\sin^2 C$$

又 $C=\pi-A-B$，所以

$\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos(A+B)=\sin^2(A+B)$（其中 $A,B$ 是某三角形的两个内角）

实际上，还可直接证得以下三角恒等式（$\alpha,\beta$ 为任意角）：

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta) \qquad ①$$

在式 ① 中作代换 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-\alpha,\beta\to\frac{\pi}{2}-\beta$，又得一个三角恒等式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta) \qquad ②$$

在式 ① 中又作代换 $\beta\to\frac{\pi}{2}+\beta$，得另一个三角恒等式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\beta-2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)=\cos^2(\alpha+\beta) \qquad ③$$

用 ② - ①，还可得三角恒等式：

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=1 \qquad ④$$

三角恒等式 ①②③④ 在解三角函数求值题时极为方便，比如由 ② 立得文献[1] 例 1 的结论：

$$\cos^2 47^\circ+\cos^2 73^\circ+\cos 47^\circ\cos 73^\circ=\frac{3}{4}$$

## 3　对一道三角例题的再研究

文献[1] 用引理巧妙的证明了该文的例 4：

设 $\alpha,\beta$ 为锐角,且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$,求证 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

文献[2]推广了这个结论,得到了

**定理 1** 设 $\alpha,\beta$ 均为第一象限的角,则 $\sin\alpha>(=,<)\cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta>(=,<)\sin(\alpha+\beta)$.

**定理 2** 设 $\alpha,\beta$ 均为第三象限的角,则 $\sin\alpha>(=,<)\cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta<(=,>)\sin(\alpha+\beta)$.

**定理 3** 设 $\alpha,\beta$ 分别为第二、第四象限的角,则 $\sin\alpha>(=,<)\cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta>(=,<)\sin(\alpha+\beta)$.

**定理 4** 设 $\alpha,\beta$ 分别为第四、第二象限的角,则 $\sin\alpha>(=,<)\cos\beta \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta>(=,>)\sin(\alpha+\beta)$(文献[1]的定理4有误).

先给出这四个定理的联系:

在定理1中令 $\alpha=\alpha'-\pi,\beta=\beta'-\pi$($\alpha',\beta'$ 均为第三象限的角),得定理2.

在定理1中令 $\alpha=\pi-\alpha',\beta=2\pi-\beta'$($\alpha',\beta'$ 分别为第二、第四象限的角),得定理3.

在定理1中令 $\alpha=2\pi-\alpha',\beta=\pi-\beta'$($\alpha',\beta'$ 分别为第四、第二象限的角),得定理4.

若在定理1中令 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha',\beta=\frac{\pi}{2}-\beta'$($\alpha',\beta'$ 均为第一象限的角),还可得:

**定理 5** 若 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>(=,<)\sin(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha+\beta<(=,>)\frac{\pi}{2}$.

笔者曾收到了武汉市硚口区教研室一位老师给笔者的来信中给出了定理1~4的统一证明(但这位老师的来信没有署名,因而无法将这位老师的大名写上,这位老师若能读到此文请与笔者联系),抄录如下:

首先,易得恒等式

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta=\sin^2\beta-\cos^2\alpha \quad ⑤$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin(\alpha+\beta)=\\
&\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\\
&\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)+\sin\beta(\sin\beta-\cos\alpha)=\\
&\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)+\frac{\sin\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}(\sin^2\beta-\cos^2\alpha)=
\end{aligned}$$

$(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\beta+\cos\alpha})(\sin\alpha+\cos\beta)(\sin\alpha-\cos\beta)$(用式⑤)

从而可得定理1～4均成立.

由定理1～4及恒等式④还可得一些结论：把定理1～4中的“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta$”均改为“$1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$”后，所得结论均成立，比如：

**定理6**　若$\frac{x\pm y}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sin x+\cos x\cos y>(=,<)1\Leftrightarrow x<(=,>)\frac{\pi}{2}$.

## 参考文献

[1] 杨承毅.构造相似三角形探讨三角问题.数学通讯,2000(3):12-13.
[2] 甘志国.一道例题结论的推广.数学通讯,2000(21):35.

# 几个三角恒等式

文献[1] 的式(2) 即如下三角恒等式(本文中的恒等式中字母的取值范围应使等式两边均有意义):

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\alpha}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}=\tan n\alpha$$

本文将把上式推广,得到一些新的三角恒等式.

**定理 1** 若 $a\in\mathbf{R},m,n\in\mathbf{N}^*$,则

(1) $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin m\alpha}{\cos(a+k)\alpha\cos(a+k+m)\alpha}=\sum_{i=n}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha-\sum_{i=0}^{m-1}\tan(a+i)\alpha;$$

(2) $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin m\alpha}{\sin(a+k)\alpha\sin(a+k+m)\alpha}=\sum_{i=n}^{m-1}\cot(a+i)\alpha-\sum_{i=n}^{n+m-1}\cot(a+i)\alpha;$$

**证明** (1) 因为

$$\frac{\sin m\alpha}{\cos(a+k)\alpha\cos(a+k+m)\alpha}=\frac{\sin[(a+k+m)\alpha-(a+k)\alpha]}{\cos(a+k)\alpha\cos(a+k+m)\alpha}=$$

$$\frac{\sin(a+k+m)\alpha\cos(a+k)\alpha-\cos(a+k+m)\alpha\sin(a+k)\alpha}{\cos(a+k)\alpha\cos(a+k+m)\alpha}=$$

$$\tan(a+k+m)\alpha-\tan(a+k)\alpha$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin m\alpha}{\cos(a+k)\alpha\cos(a+k+m)\alpha}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\tan(a+k+m)\alpha-\tan(a+k)\alpha]=$$

$$\sum_{i=m}^{m+n-1}\tan(a+i)\alpha-\sum_{i=0}^{n-1}\tan(a+i)\alpha=$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha+\sum\limits_{i=m}^{n-1}\tan(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=m}^{n-1}\tan(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\tan(a+i)\alpha & (\text{当 } n>m \text{ 时})\\ \sum\limits_{i=n}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\tan(a+i)\alpha & (\text{当 } n=m \text{ 时})\\ \sum\limits_{i=m}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha+\sum\limits_{i=n}^{m-1}\tan(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=n}^{m-1}\tan(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\tan(a+i)\alpha & (\text{当 } n<m \text{ 时})\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{i=n}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha-\sum_{i=0}^{m-1}\tan(a+i)\alpha$$

(2) 可证 $\dfrac{\sin m\alpha}{\sin(a+k)\alpha\sin(a+k+m)\alpha}=\cot(a+k)\alpha-\cot(a+k+m)\alpha$,

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\sin m\alpha}{\sin(a+k)\alpha\sin(a+k+m)\alpha}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}[\cot(a+k)\alpha-\cot(a+k+m)\alpha]$

$=\sum\limits_{i=0}^{m-1}\cot(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}\cot(a+i)\alpha$(最后一步的证明过程同(1)).

**定理 2** 若 $a\in\mathbf{R}, m, n\in\mathbf{N}^*$,则

(1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\cos m\alpha}{\sin(a+k+m)\alpha\cos(a+k)\alpha}-$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\cos m\alpha}{\cos(a+k+m)\alpha\sin(a+k)\alpha}=\sum\limits_{i=0}^{m-1}[\tan(a+i)\alpha-\cot(a+i)\alpha]-$

$\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}[\tan(a+i)\alpha-\cot(a+i)\alpha]$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\cos(2a+2k+m)\alpha}{\sin(a+k+m)\alpha\cos(a+k)\alpha}-$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\cos(2a+2k+m)\alpha}{\cos(a+k+m)\alpha\sin(a+k)\alpha}=\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}[\tan(a+i)\alpha+\cot(a+i)\alpha]-$

$\sum\limits_{i=0}^{m-1}[\tan(a+i)\alpha+\cot(a+i)\alpha]$

**证明** (1) 左边 $=\sum\limits_{k=0}^{n-1}[\cot(a+k+m)\alpha-\cot(a+k)\alpha]-\sum\limits_{k=0}^{n-1}[\tan(a+k+m)\alpha-\tan(a+k)\alpha]=\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}\cot(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\cot(a+i)\alpha-\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha+\sum\limits_{i=0}^{m-1}\tan(a+i)\alpha$(参见定理 1(2),(1) 的证明过程) $=\sum\limits_{i=0}^{m-1}[\tan(a+i)\alpha-\cot(a+i)\alpha]-\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}[\tan(a+i)\alpha-\cot(a+i)\alpha]$

(2) 左边 $= \sum_{k=0}^{n-1}[\cot(a+k+m)\alpha - \cot(a+k)\alpha] + \sum_{k=0}^{n-1}[\tan(a+k+m)\alpha - \tan(a+k)\alpha] = \sum_{i=n}^{n+m-1}\cot(a+i)\alpha - \sum_{i=0}^{m-1}\cot(a+i)\alpha + \sum_{i=n}^{n+m-1}\tan(a+i)\alpha - \sum_{i=0}^{m-1}\tan(a+i)\alpha$(参见定理 1(2),(1) 的证明过程) $= \sum_{i=n}^{n+m-1}[\tan(a+i)\alpha + \cot(a+i)\alpha] - \sum_{i=0}^{m-1}[\tan(a+i)\alpha + \cot(a+i)\alpha]$

在定理 1(1) 中选 $a=0, m=1$,即得本文开头的恒等式,还可得

**推论** (1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha} = \cot\alpha - \cot(n+1)\alpha$;

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\alpha}{\sin(k+1)\alpha\cos k\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\alpha}{\cos(k+1)\alpha\sin k\alpha} = \tan\alpha - \cot\alpha - \tan(n+1)\alpha - \cot(n+1)\alpha$;

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k+1)\alpha}{\sin(k+1)\alpha\cos k\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k+1)\alpha}{\cos(k+1)\alpha\sin k\alpha} = \tan(n+1)\alpha + \cot(n+1)\alpha - \tan\alpha - \cot\alpha$

## 参考文献

[1] 金兔.一个三角恒等式的探索过程.数学通讯,2001(9):18-20.

# 圆心四边形的性质及一个三角恒等式

有一个顶点为圆心,其余三个顶点在圆周上的四边形叫做这个圆的圆心四边形.如图1,图2中的四边形 $ABOC$ 均是圆心四边形.

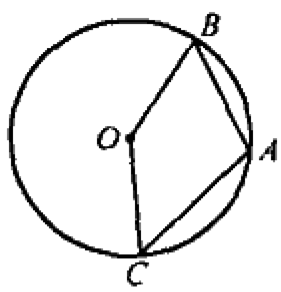



图1

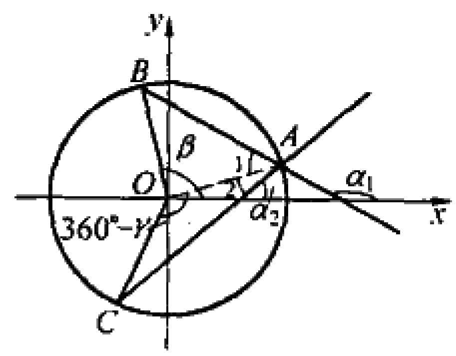



图2

圆心四边形显然有性质:

**定理1** 在圆心四边形中圆心角的对角等于它的两个邻角之和.

即在图1,图2中,有 $\angle B+\angle C=\angle BAC$(连结 $OA$ 可证).

把图2中的 $\odot O$ 放在平面直角坐标系 $xOy$ 中,设 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2=1$, $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $B(\cos\beta,\sin\beta)$, $c(\cos\gamma,\sin\gamma)$, $\alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi)$,得

$$\tan\angle BAC=\tan(\pi-\alpha_1+\alpha_2)=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\tan\alpha_1}=$$

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\alpha-\cos\gamma}-\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\alpha-\cos\gamma}\cdot\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}}=$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)-1}$$

又由定理1及图2,可得

$$\angle BOC+2\angle BAC=2\pi(\angle BOC\text{ 是四边形 }ABOC\text{ 的一个内角})$$

$$(\beta+2\pi-\gamma)+2\angle BAC=2\pi$$

$$\angle BAC=\frac{\gamma-\beta}{2}$$

所以 $$\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)-1}=\tan\frac{\gamma-\beta}{2}$$

又设 $\gamma-\beta=A$, $\beta-\alpha=B$,可得如下三角恒等式:

**定理 2**　$\dfrac{\sin A+\sin B-\sin(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}(A,B\neq(2k+1)\pi,$ $A+B\neq 2l\pi,k,l\in\mathbf{Z})$.

也可直接证明定理 2:

当 $A=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,容易验证定理 2 成立.当 $A\neq 2k\pi$ 时,有:

由 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$,得

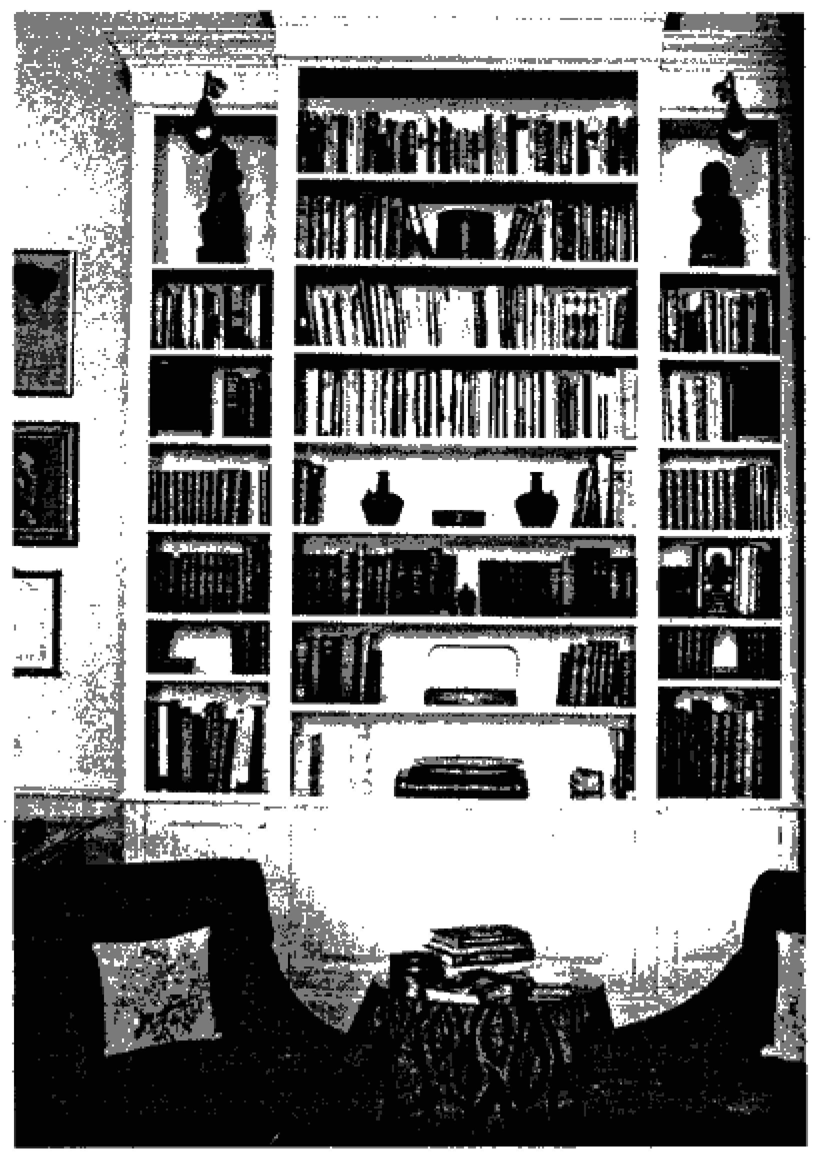
$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}$$

$$\frac{2\cos\frac{A+2B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{2\cos\frac{A+2B}{2}\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}$$

$$\frac{\sin(A+B)-\sin B}{\sin A}=\frac{\cos(A+B)+\cos B}{1+\cos A}$$

$$\frac{\sin A+\sin B-\sin(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$$

# 平面向量



# 例谈“定比分点坐标公式引出的结论”的运用

文献[1]由线段的定比分点坐标公式类比出丰富的结论,可把这些结论综述为:

**定理1** 设梯形中平行于底边的截线及上、下底边长分别为 $a_0,a_1,a_2$,用 $\lambda_1,\lambda_2$ 分别表示截得的上梯形与下梯形的高、面积的比,则 $a_0^i=\dfrac{a_1^i+\lambda_i a_2^i}{1+\lambda_i}(i=1,2)$.

**定理2** 设台体(指棱台或圆台)中平行于底面的截面及上、下底面面积分别为 $S_0,S_1,S_2$,用 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 分别表示截得的上台体与下台体的高、侧面积、体积的比,则

$$(\sqrt{S_0})^i=\frac{(\sqrt{S_1})^i+\lambda_i(\sqrt{S_2})^i}{1+\lambda_i}(i=1,2,3)$$

下面再给出定理1,2的简洁证明.

**定理1的证明** 延长梯形的两腰交于点 $A$,设点 $A$ 到截线及上、下底边的距离分别为 $h_0,h_1,h_2$;点 $A$ 与截线及上、下底边所构成的三角形的面积分别为 $D_0,D_1,D_2$,则

(1) 由题设,得 $\lambda_1=\dfrac{h_0-h_1}{h_2-h_0}$.又由相似三角形的性质,可得 $h_0:h_1:h_2=a_0:a_1:a_2$,所以

$$\lambda_1=\frac{a_0-a_1}{a_2-a_0},a_0=\frac{a_1+\lambda_1 a_2}{1+\lambda_1}$$

(2) 由题设,得 $\lambda_2=\dfrac{D_0-D_1}{D_2-D_0}$.又可得 $D_0:D_1:D_2=a_0^2:a_1^2:a_2^2$,所以 $\lambda_2=\dfrac{a_0^2-a_1^2}{a_2^2-a_0^2},a_0^2=\dfrac{a_1^2+\lambda_2 a_2^2}{1+\lambda_2}$.

**定理2的证明** 延长台体的各侧棱(或母线)交于点 $A$,设点 $A$ 到截面及上、下底面的距离分别为 $h_0,h_1,h_2$;点 $A$ 与截面及上、下底面所构成的锥体的侧面积分别为 $D_0,D_1,D_2$;体积分别为 $V_0,V_1,V_2$,则

(1) 由题设,得 $\lambda_1=\dfrac{h_0-h_1}{h_2-h_0}$. 又有 $h_0:h_1:h_2=\sqrt{S_0}:\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$,所以

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{S_0}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_0}},\sqrt{S_0}=\frac{\sqrt{S_1}+\lambda_1\sqrt{S_2}}{1+\lambda_1}$$

(2) 由题设,得 $\lambda_2=\dfrac{D_0-D_1}{D_2-D_0}$, 又有 $D_0:D_1:D_2=h_0^2:h_1^2:h_2^2=(\sqrt{S_0})^2:(\sqrt{S_1})^2:(\sqrt{S_2})^2$,所以 $\lambda_2=\dfrac{S_0-S_1}{S_2-S_0}, S_0=\dfrac{S_1+\lambda_2S_2}{1+\lambda_2}$.

(3) 同上可证.

在定理 2 中令 $S_1=0$,可得

**推论 1** 设锥体(指棱锥或圆锥)中平行于底面的截面与底面面积的比为 $S_0:S_1$,用 $\mu_1,\mu_2,\mu_3$ 分别表示截得的小锥体与原锥体的高、侧面积、体积的比,则 $\mu_i=(\sqrt{\dfrac{S_0}{S}})^i(i=1,2,3)$.

**推论 2** 若高为 $h$(或侧面积为 $D$,或体积为 $V$)的台体的上、下底面面积的比为 $S_0:S$,则被上底面截出这个台体的原锥体的高为 $\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_0}}h$(或 $\dfrac{S}{S-S_0}D$,或 $\dfrac{(\sqrt{S})^3}{(\sqrt{S})^3-(\sqrt{S_0})^3}V$).

**例 1** 设棱台的高是 $h$,上、下底面的面积之比为 $S_1:S_2$,一个平行于底面的截面面积是 $S_1$ 与 $S_2$ 的比例中项,求这个截面与上底面的距离 $x$.

**解** 由定理 2 中 $i=1$ 时的情形,可得

$$\sqrt[4]{S_1S_2}=\frac{\sqrt{S_1}+\frac{x}{h-x}\sqrt{S_2}}{1+\frac{x}{h-x}}$$

所以
$$x=\frac{\sqrt[4]{S_1}}{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}h$$

**例 2** 一个圆锥的体积是 54 cm$^3$,用平行于底面的圆面截这个圆锥,且截面面积是底面面积的 $\dfrac{1}{9}$. 求截得的圆台的体积 $V$.

**解** 由推论 2,可得

$$\frac{(\sqrt{9})^3}{(\sqrt{9})^3-(\sqrt{1})^3}V=54$$

所以 $V = 52\ \mathrm{cm}^3$

## 参考文献

[1] 方家鸿.定比分点坐标公式引出的几个结论,数学通讯,2000(7):32-33.

# 建　议

应将“线段定比分点”的定义改述为：

设点 $P$ 是有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$($P_1$, $P_2$ 不重合)所在直线上不同于 $P_2$ 的任意一点，则$\dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}=\lambda$(即$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$)叫做点 $P$ 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比，点 $P$ 叫做分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$成定比 $\lambda$ 的定比分点.

由画图可知，当点 $P$ 在线段 $P_1P_2$ 内时，$\lambda>0$；当 $P$ 与 $P_1$ 重合时，$\lambda=0$；当点 $P$ 在线段 $P_1P_2$ 或 $P_2P_1$ 的延长线上时，$\lambda<0$.

定比 $\lambda$ 可取不为 $-1$ 的全体实数(若 $\lambda=-1$，则 $P_1$, $P_2$ 重合)，课本上没有强调这一点，所以在推导定比分点坐标公式时欠严谨.

# 初学向量时应注意的问题

## 1 要注意向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 $a$ 的区别

向量 $\boldsymbol{a}$ 是既有大小又有方向的量，它的大小就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度（也叫做模），记作 $|\boldsymbol{a}|$，所以 $|\boldsymbol{a}|$ 是一个非负实数．两个向量不能比较大小，$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 都是错误的．两个向量之间的关系只能是相等或不相等，平行或不平行（共线或不共线），但两个向量的模之间可以比较大小．而实数 $a$ 只有大小，没有方向，两个实数之间可以比较大小．

## 2 要注意 $\boldsymbol{0}$ 向量与实数 0 的区别

$\boldsymbol{0}$ 向量表示长度为0的向量，它的方向是任意的，所以 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量都平行；而 0 是一个没有方向的实数．

请注意下面的几个式子都是错误的：

(1)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0$;(2)$\boldsymbol{a}\pm 0=\boldsymbol{a}$;(3)$0\cdot\boldsymbol{a}=0$;(4)$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{0}$.

可分别改为：

(1)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;(2)$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;(3)$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;(4)$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{a}|=0$.

## 3 要注意 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 与 $AB=DC$ 的区别

前者表示向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$ 的长度相等并且方向相同，后者仅表示向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$ 的长度相等．

## 4 要注意向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与实数乘法 $a\cdot b$ 的区别

从公式的角度看，$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以 $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$ 的几何意义是其中一个向量的长度乘以另一个向量在其方向上的投影．

从运算律来看，向量的数量积不满足结合律，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，这是因为该式的左右两边均无意义；向量的数量积也不满足消去律，即由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，只能得到 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$．

这些均与实数乘法 $a\cdot b$ 的规律不同．

## 5 不能错误地认为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

这是因为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$(当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时取等号)

## 6 不能从 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

## 7 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角与直线 $a$ 与 $b$ 的夹角不同

两者的定义不同,从它们的定义可以看出:向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的范围是 $[0,\pi]$,而直线 $a$ 与 $b$ 的夹角(将在高二上学期学到:当 $a$ 与 $b$ 平行或重合时,它们的夹角为0;当 $a$ 与 $b$ 不平行也不重合时,它们的夹角为这两条相交直线所成的四个角中的锐角或直角)的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

# 对向量共线基本定理的挖掘

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·(第一册(下)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第115页给出的定理就是向量共线基本定理:

**定理** 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是有且只有一个实数 $\lambda$,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

该定理中的 $\lambda$ 能用 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$ 表示出来吗?

由 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,得 $|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

又 $\boldsymbol{a}\neq 0$,得 $|\boldsymbol{a}|>0$,所以 $|\lambda|=\left|\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right|$,$\lambda=\pm\left|\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right|$.

从而得到以上定理的伴随结论:

**结论** 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线,则 $\boldsymbol{b}=\pm\left|\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right|\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$ 同向时取"+",$\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$ 反向时取"-"(下同).(若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}$)

**推论1** 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量是 $\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

**推论2** 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线且模为 $m$ 的向量是 $\pm\frac{m\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

**例1** (教科书第162页第17题)求与向量 $\boldsymbol{a}=(6,8)$ 共线的单位向量.

**解** 由推论1立得答案为 $\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{10}(6,8)$,即 $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$,$(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

**例2** 已知 $|\boldsymbol{a}|=10$,$\boldsymbol{b}=(3,-4)$,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,求 $\boldsymbol{a}$.

**解** 由推论2立得 $\boldsymbol{a}=\pm\frac{10\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\pm 2(3,-4)$,即 $(6,-8)$,$(-6,8)$.

若不用以上方法,则需设所求向量的坐标是 $(x,y)$,通过解方程组求解,这样运算量大一些.

# 纠正《向量题新证》一文中的一点瑕疵

《中学生数学》2008年2月上期刊登的《向量题新证》一文(作者:李建潮)中的题目及其两种解法都很新颖,其中的解法1是一种常规解法,容易被学生接受.但仔细研读解法1后发现之中有一处不严谨.文末的引申也是一个不完整的结论.

解法1的错误是运用了不正确的结论:

在同一个平面内的向量中,垂直于同一个向量的两个向量平行(共线).

此结论应修正为:

**定理** 在同一个平面内的向量中,垂直于同一个非零向量的两个向量平行(共线).

下面订正原解法1.

**题目** 在平面凸四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,请判断四边形 $ABCD$ 的形状.

**解** 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,得 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$.

同理,有 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$.

若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,即 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,这将与"平面凸四边形 $ABCD$"矛盾!所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$.

又 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$,$\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$,所以由定理得 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$.同理,有 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$.得平行四边形 $ABCD$.

由 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$,得 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$,所以平面凸四边形 $ABCD$ 是矩形.

**巧解** 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}>0$,得凸四边形 $ABCD$ 的四个内角都是锐角;若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}<0$,得凸四边形 $ABCD$ 的四个内角都是钝角,这均将与凸四边形 $ABCD$ 的四个内角和是周角相矛盾!所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$,得凸四边形 $ABCD$ 的四个内角都是直角,所以平面凸四边形 $ABCD$ 是矩形.(注:由此解法知若将题目中的"凸"字去掉,结论不变.)

原文末的

**引申** 在(平面)四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,则四边形 $ABCD$(或 $ABDC$)是矩形.

笔者认为,这里的“平面四边形 $ABCD$”应理解为“平面闭折线 $ABCD$”.此结论不对,应修正为:

**推广**　设 $A,B,C,D$ 是平面上两两不重合的四个点,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,则四边形 $ABCD$ 或 $ABDC$ 或 $ACBD$ 是矩形.

**证明**　(1) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,得平行四边形 $ABDC$.

由 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$,得 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b})=0$,即

$$\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{CD}\cdot 2\overrightarrow{BD}=0,\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{BD}$$

所以有矩形 $ABDC$.

(2) 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,同理可得矩形 $ACBD$.

(3) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}$,同原题目的证明,可得矩形 $ABCD$.

# 例谈向量和三角形的"四心"问题

三角形的"四心"(内心——三条内角平分线的交点,外心——三边中垂线的交点,重心——三条中线的交点,垂心——三条高线的交点)问题与向量联系密切,本文谈谈这方面题目的解法(下面各题由易到难).

**例1** 已知 $O$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点,若 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$,则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　B.外心　C.重心　D.垂心

**解** 可得 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$,所以选 B.

**例2** 已知 $O$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点,若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　B.外心　C.重心　D.垂心

**解** 得 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,作平行四边形 $BOCD$,又设 $BC$ 的中点为 $E$,则 $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OE}$,得 $A,O,E$ 共线,即点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的中线 $AE$ 所在的直线上.

同理,点 $O$ 也在 $\triangle ABC$ 的各边中线所在的直线上.

所以点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,选 C.

**例3** 已知 $O$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点,若 $\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{AB}^2$,则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　B.外心　C.重心　D.垂心

**解** 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,得

$$\boldsymbol{a}^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{b}^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0,\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$$

说明点 $C$ 在 $AB$ 边的高线上.

同理可得点 $C$ 是 $\triangle ABC$ 三边上的高线的交点,即垂心.选 D.

**例4** 已知 $O$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点,若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})(\lambda\in\mathbf{R})$,则动点 $P$ 的轨迹通过 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　B.外心　C.重心　D.垂心

**解** 在 $\triangle ABC$ 中,设 $BC$ 的中点为 $E$,则已知的向量式,即 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}$,得 $A,P,E$ 共线,动点 $P$ 的轨迹是 $\triangle ABC$ 的中线 $AE$ 所在的直线.选 C.

**例5** 若 $P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$,

则点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$,得 $\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$,$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$.同理,有 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$.所以,选 D.

**例6**　已知 $O$ 为平面上的一定点,$A,B,C$ 是该平面上不共线的三点,点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)(\lambda\in\mathbf{R})$,则动点 $P$ 的轨迹通过 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　已知的向量式,即

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)(\lambda\in\mathbf{R})$$

再注意到 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量,从而可得动点 $P$ 的轨迹是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线所在的直线.选 A.

**例7**　已知 $O$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点,角 $A,B,C$ 所对的边长分别为 $a,b,c$,若 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　由 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$,得

$$(a+b+c)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$$

由例 6 的解法知,点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线所在的直线上.

同理可得点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$,$\angle C$ 的平分线所在的直线上.选 A.

**例8**　已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$,则 $\triangle ABC$ 为(　　)

A.不等边三角形　　B.直角三角形

C.非等边的等腰三角形　　D.等边三角形

**解**　由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 知,$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线与 $BC$ 垂直,所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

又 $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$,$A=\frac{\pi}{3}$,得等边 $\triangle ABC$,选 D.

**例9**　已知三个不共线的向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}\right)=$

$\overrightarrow{OB}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\right)=\overrightarrow{OC}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}\right)=0$,则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　因为向量$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$与 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分线平行,再由 $\overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}\right)=0$,知点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线所在的直线上.从而可知选 A.

**例 10**　若点 $P$ 满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}\right)(\lambda\in\mathbf{R})$,则动点 $P$ 的轨迹通过 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　在 $\triangle ABC$ 中,作 $AD\perp BC$ 于 $D$,设 $BC$ 的中点为 $E$,则

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{2\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}|}\qquad ①$$

再由题设,得$\overrightarrow{AP}=\frac{2\lambda\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}|}(\lambda\in\mathbf{R})$,$A,P,E$ 共线,可得动点 $P$ 的轨迹是 $\triangle ABC$ 的中线 $AE$ 所在的直线.选 C.

**例 11**　若点 $P$ 满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)(\lambda\in\mathbf{R})$,则动点 $P$ 的轨迹通过 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　得$\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)(\lambda\in\mathbf{R})$,又

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=$$

$$\lambda\left(\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-B)}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos C}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)=-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|=0\qquad ②$$

所以$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$,选 D.

**例 12**　若点 $P$ 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}\right)$ $(\lambda\in\mathbf{R})$,则动点 $P$ 的轨迹通过 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解**　在 $\triangle ABC$ 中,设边 $BC$ 的中点为 $E$,则

$$\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{EP} \quad ③$$

由①知$\overrightarrow{EP}\parallel\overrightarrow{AE}$,所以点 $P$ 的轨迹是$\triangle ABC$ 的中线$AE$ 所在的直线,选 C.

**例 13** 若点 $P$ 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)(\lambda\in\mathbf{R})$,则动点 $P$ 的轨迹通过$\triangle ABC$ 的(　　)

A.内心　　B.外心　　C.重心　　D.垂心

**解** 又可得$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)\perp\overrightarrow{BC}$(参见②),再由③得$\overrightarrow{EP}\perp\overrightarrow{BC}$(其中 $E$ 是边 $BC$ 的中点),说明点 $P$ 的轨迹是边 $BC$ 的中垂线,选 B.

# 巧用单位向量求三角形的角平分线

**题目** 已知$\triangle ABC$各顶点的坐标分别是$A(-1,-1)$,$B(4,-13)$,$C(-4,4)$,求$\angle A$的平分线所在直线的方程.

通常的解法是三角形的角平分线性质或到角公式,很复杂,而下面用单位向量给出一种巧解.

**解** 得$\overrightarrow{AB}=(5,-12)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,4)$,与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$方向相同的单位向量分别是:

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=(\frac{5}{13},-\frac{12}{13}),\overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$$

设$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线是$AD$,则$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}=(-\frac{14}{65},-\frac{8}{65})$共线(因为菱形的对角线也是角平分线),所以直线$AD$的一个方向向量为$(1,\frac{4}{7})$,得直线$AD$的斜率$k=\frac{4}{7}$,从而可求得$\angle A$的平分线$AD$所在直线的方程是$4x-7y-3=0$.

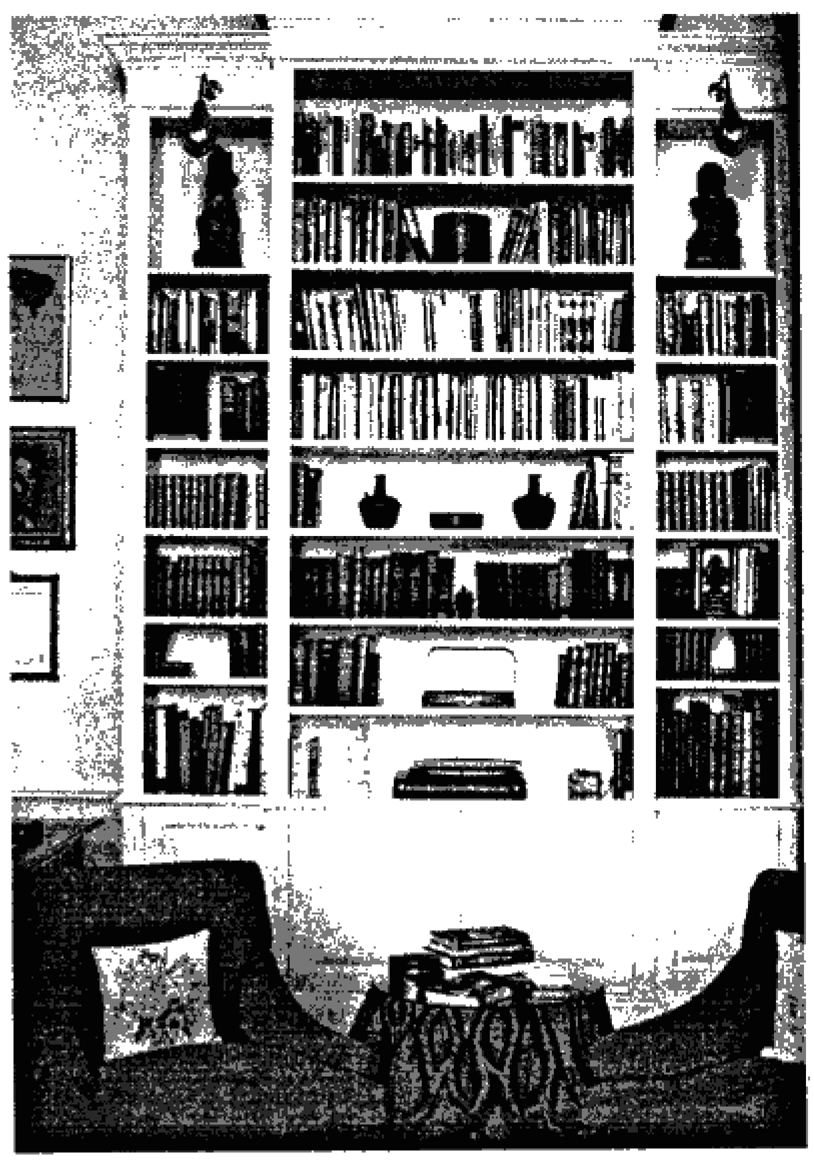
## 练　习

1.(全日制普通高级中学教科书(必修)《数学・第二册(上)》(2006年人民教育出版社)复习参考题A组的第1题)已知$\triangle ABC$顶点的坐标是$A(2,3)$,$B(5,3)$,$C(2,7)$,求$\angle A$的平分线长及所在直线的方程.

2.已知$\triangle ABC$各顶点的坐标分别是$A(-1,-1)$,$B(1,3)$,$C(-2,1)$,求$\angle A$的平分线所在直线的方程.

**参考答案** 1.$\frac{12}{7}\sqrt{2}$,$x-y+1=0$;2.$x=-1$.

# 不等式

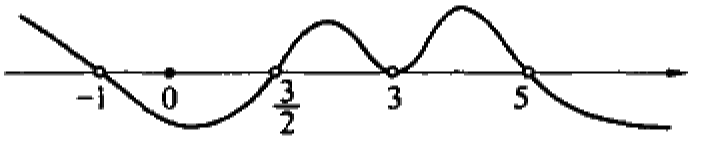


# 一元高次不等式的解决口诀

首正右上翘，首负右下掉；奇过偶不过，引线解知道.

说明：解一元高次不等式，常通过分解因式(求根)，“穿针引线”便可迅速得到解集. 如解不等式$(3-2x)(x+1)^3(x-3)^6(x-5)^9>0$.

左边多项式最高次项的系数是$-2$，据“首负右下掉”知，最右边的“线”掉在$x$轴的下方，由于$x=3$为六重根，即偶数重根，其余的根均为奇数重根，根据“奇过偶不过”可得下面的引线图案.




由图可知，不等式的解集为$(-\infty,-1)\cup(\frac{3}{2},3)\cup(3,5)$.

# 整体求,莫拆开

**题目** 已知$\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3}$,$-\pi\leqslant\alpha-\beta\leqslant-\frac{\pi}{3}$,求$2\alpha-\beta$的取值范围.

**错解** 题设即为
$$\begin{cases}\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3} & ①\\ -\pi\leqslant\alpha-\beta\leqslant-\frac{\pi}{3} & ②\end{cases}$$

也即
$$\begin{cases}\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3} & ①\\ \frac{\pi}{3}\leqslant-\alpha+\beta\leqslant\pi & ③\end{cases}$$

① + ②,① + ③,得
$$\begin{cases}0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} & ④\\ \frac{2\pi}{3}\leqslant\beta\leqslant\frac{7\pi}{6} & ⑤\end{cases}$$

则
$$\begin{cases}0\leqslant2\alpha\leqslant\pi & ⑥\\ -\frac{7\pi}{6}\leqslant-\beta\leqslant-\frac{2}{3}\pi & ⑦\end{cases}$$

所以
$$-\frac{7\pi}{6}\leqslant2\alpha-\beta\leqslant\frac{\pi}{3} \qquad ⑧$$

所以$2\alpha-\beta$的取值范围是$[-\frac{7\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$.

**剖析** 上述推导过程虽然没有逻辑错误,但所求出的$2\alpha-\beta$的取值范围却在无意中被扩大了!

从以上推导过程来看:$2\alpha-\beta$能取到$\frac{\pi}{3}$的充要条件是$2\alpha=\pi$且$-\beta=-\frac{2\pi}{3}$(由⑥⑦知),即$\alpha=\frac{\pi}{2}$且$\beta=\frac{2\pi}{3}$(由④⑤知),亦即$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}\\ \alpha-\beta=-\frac{\pi}{3}\end{cases}$(由①②知)且$\begin{cases}\alpha+\beta=\pi\\ -\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}\end{cases}$(由①③知),而这两组条件是不可能同时成立的!

所以 $2\alpha-\beta$ 不能取到 $\frac{\pi}{3}$.

同理可知 $2\alpha-\beta$ 也不能取到 $-\frac{7\pi}{6}$.

**正解** （先把 $2\alpha-\beta$ 表示成 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的倍数和的形式，再利用不等式的性质求解）

设 $2\alpha-\beta=k(\alpha+\beta)+l(\alpha-\beta)$（$k,l$ 是待定的系数），通过比较两边 $\alpha$，$\beta$ 的系数，可以求出 $k=\frac{1}{2}$，$l=\frac{3}{2}$，所以有恒等式

$$2\alpha-\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{3}{2}(\alpha-\beta) \quad ⑨$$

再由题设即 ①②，得

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\leqslant\frac{2\pi}{3}\\-\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{3}{2}(\alpha-\beta)\leqslant-\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

所以，由 ⑨，得 $-\pi\leqslant2\alpha-\beta\leqslant\frac{\pi}{6}$.

从以上推导过程来看，当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}\\\frac{3}{2}(\alpha-\beta)=-\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，即 $\alpha=0,\beta=\pi$ 时，$2\alpha-\beta=-\pi$；当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{2\pi}{3}\\\frac{3}{2}(\alpha-\beta)=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{5\pi}{6}$ 时，$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$.

所以 $2\alpha-\beta$ 的取值范围是 $[-\pi,\frac{\pi}{6}]$.

**注** 上面解法的实质是将 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 作为平面向量中的一组“基向量”来表示“向量”$2\alpha-\beta$. 若同学们学习了之后的线性规划（见本册书7.4简单的线性规划）的知识，解答此题将更直接，也更容易.

# 解题宜简

现在笔者正在教学"第六章 —— 不等式",翻阅了有关文献资料,下面摘录其中的几个"难题" 及其解法:

**题 1** 已知正数 $p,q$ 满足 $p^3+q^3=2$,求证:$p+q\leqslant 2$.

**证明** 由三元均值不等式,得

$$p^3+1+1\geqslant 3p,q^3+1+1\geqslant 3q$$

相加后可得欲证.

还有文献把它加强为:

**题 2** 已知 $p^3+q^3=2,p,q\in\mathbf{R}$,求证:$p+q\leqslant 2$.

**证明** 设 $p+q=t$,可得 $pq=\dfrac{3pq(p+q)}{3(p+q)}=\dfrac{(p+q)^3-(p^3+q^3)}{3(p+q)}=\dfrac{1}{3}t^2-\dfrac{2}{3t}$,所以 $p,q$ 是方程

$$x^2-tx+\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3t}=0$$

的两个实根,所以

$$\Delta=t^2-4\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3t}\right)\geqslant 0$$

解得 $t\leqslant 2$,即 $p+q\leqslant 2$.

下面给出题 2 的一个最自然的证法:

由 $p^3+q^3=2$,得 $q=\sqrt[3]{2-p^3}$,所以即证

$$\sqrt[3]{2-p^3}\leqslant 2-p,(\sqrt[3]{2-p^3})^3\leqslant(2-p)^3$$

$$2-p^3\leqslant 8-12p+6p^2-p^3$$

$$6(p-1)^2\geqslant 0$$

说明要证结论成立!

**题 3** 设某三角形的三边长、半周长分别为 $a,b,c,p$,求证:$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\sqrt{3p}$.

**证明** 引入正参数 $k$,得

$\sqrt{k(p-a)} \leqslant \frac{k+(p-a)}{2}$, $\sqrt{k(p-b)} \leqslant \frac{k+(p-b)}{2}$, $\sqrt{k(p-c)} \leqslant \frac{k+(p-c)}{2}$

相加,得

$$\sqrt{k(p-a)}+\sqrt{k(p-b)}+\sqrt{k(p-c)} \leqslant \frac{p+3k}{2}$$

$$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \leqslant \frac{p}{2\sqrt{k}}+\frac{3\sqrt{k}}{2}$$

所以 $$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \leqslant \left(\frac{p}{2\sqrt{k}}+\frac{3\sqrt{k}}{2}\right)_{\min}=\sqrt{3p}$$

此解法有深刻的思想技巧,而以下解法却朴素自然:

即证 $$(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2 \leqslant 3p$$

$$2\sqrt{p-a}\cdot\sqrt{p-b}+2\sqrt{p-b}\cdot\sqrt{p-c}+2\sqrt{p-c}\cdot\sqrt{p-a} \leqslant a+b+c \quad ①$$

可证 ① 成立,所以要证结论成立:

$$\sqrt{p-a}\cdot\sqrt{p-b}+2\sqrt{p-b}\cdot\sqrt{p-c}+2\sqrt{p-c}\cdot\sqrt{p-a} \leqslant$$
$$(p-a+p-b)+(p-b+p-c)+(p-c+p-a)=a+b+c$$

**题 4** 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$,且 $x+y=1$,求证$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \geqslant \frac{25}{4}$.

**证明** $$x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x} \geqslant 5\sqrt[5]{\frac{1}{4^4x^3}}$$

$$y+\frac{1}{y} \geqslant 5\sqrt[5]{\frac{1}{4^4y^3}}$$

所以 $$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \geqslant 25\sqrt[5]{\frac{1}{4^8(xy)^3}}$$

又 $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,得$\frac{1}{xy} \geqslant 4$,所以

$$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \geqslant 25\sqrt[5]{\frac{1}{4^8(xy)^3}} \geqslant \frac{25}{4}$$

笔者有以下简洁通俗的证法:

由 $x,y\in\mathbf{R}^+$,且 $x+y=1$,得 $xy \leqslant \frac{1}{4}$.

又 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 在$(0,1)$上是减函数,所以 $xy+\frac{1}{xy} \geqslant \frac{17}{4}$.

$$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \geqslant \frac{17}{4}+2=\frac{25}{4}$$

由此证法读者还可证明：

**题 5** 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y=1$，求证 $(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2\geqslant\frac{25}{2}$.

**证明** 由 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y=1$，得 $xy\leqslant\frac{1}{4}$.

又 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，所以 $xy+\frac{1}{xy}\geqslant\frac{17}{4}$.

$$(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2=(x^2+y^2)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+4\geqslant 2xy+\frac{2}{xy}+4\geqslant\frac{25}{2}$$

**注** 由题 4 的结论及均值不等式可立得题 5 的结论.

**题 6** 设 $a,b,c$ 是某三角形的三边，求证 $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geqslant a+b+c$.

**证明** $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}-(a+b+c)=$

$$a\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right)+b\left(\frac{b}{c+a-b}-1\right)+c\left(\frac{c}{a+b-c}-1\right)\geqslant$$

$$a\left(1-\frac{b+c-a}{a}\right)+b\left(1-\frac{c+a-b}{b}\right)+c\left(1-\frac{a+b-c}{c}\right)\text{（均值不等式）}=$$

$$a-b-c+a+b-c-a+b+c-a-b+c=0$$

所以要证结论成立.

而以下证法更简洁：

把以下三式相加即得：

$$\frac{a^2}{b+c-a}+(b+c-a)\geqslant 2a$$

$$\frac{b^2}{c+a-b}+(c+a-b)\geqslant 2b$$

$$\frac{c^2}{a+b-c}+(a+b-c)\geqslant 2c$$

解题宜简，是一条解题的基本原则，只有这样的解法学生才记忆最深刻.一个合格的老师，应当把难题讲得简单，决不能把简单的题讲难，把难题讲得更难.

# 凸函数的一个性质

**定理1** 如果 $y=f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的上凸函数，那么对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$，有

$$(n-1)f(0)+f(x_1+x_2+\cdots+x_n)<f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

**证明** 要证不等式的右边是熟知的结论，下证左边成立.

读者自己画图并用上凸函数的定义及直线的斜率可得：

$$\frac{f(x_i)-f(0)}{x_i}>\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)-f(x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$$

$$f(x_i)-f(0)>\frac{x_i}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}[f(x_1+x_2+\cdots+x_n)-f(x_n)]$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i)-f(0)]>f(x_1+x_2+\cdots+x_n)-f(x_n)$$

即 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)>(n-1)f(0)+f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

同理，有

**定理2** 如果 $y=f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的下凸函数，那么对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$，有

$$nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<(n-1)f(0)+f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

由定理1,2可以编拟很多例题：

**例1** 若正数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=3$，则 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$ 的取值范围是 $(2+\sqrt{13},3\sqrt{5}]$.

**例2** 若正数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=2$，则 $\sqrt[3]{7a+1}+\sqrt[3]{7b+1}+\sqrt[3]{7c+1}$ 的取值范围是 $(2+\sqrt[3]{15},\sqrt[3]{153}]$.

**例3** 在 $\triangle ABC$ 中，$\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+5}$ 的取值范围是 $(\sqrt{6}+2\sqrt{5},4\sqrt{3}]$.

## 参考文献

[1] 金楚华. 凸函数的一个性质. 中学数学, 2000, (5): 42-43.

# 一道复习参考题的多种证法

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2004年人民教育出版社)复习参考题六B组的第6题是:

6.设 $a,b,c$ 为 $\triangle ABC$ 的三条边,求证 $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

下面的各种证法均写得简略,省略的只是三角形三边关系的结论:三角形的任意两边之和大于第三边,任意两边之差的绝对值小于第三边.所以读者完全能看懂下面的各种证明.

**证法1** $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)=a(a-b-c)+b(b-c-a)+c(c-a-b)<0$

**证法2** $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)=(a-b)^2+c^2-2c(a+b)<(a-b)^2+c^2-2c^2=|a-b|^2-c^2<0$

**证法3** $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)=(|a-b|^2-c^2)+(|b-c|^2-a^2)+(|c-a|^2-b^2)<0$

**证法4** $2(ab+bc+ca)>2ab\cos C+2bc\cos A+2ca\cos B=(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)=a^2+b^2+c^2$

**证法5**

$$\begin{cases}a+b>c & ①\\ b+c>a & ②\\ c+a>b & ③\end{cases}$$

$(1)\times c+(2)\times a+(3)\times b$,立得欲证.

**证法6** (用切线长代换)

设 $\triangle ABC$ 的内切圆为 $\odot I$,点 $A$ 出发的两切线长均相等,设为 $x$;点 $B$ 出发的两切线长均相等,设为 $y$;点 $C$ 出发的两切线长均相等,设为 $z$(如图1),则 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$(这就是在证明有关三角形的不等式时用途广泛的切线长代换).

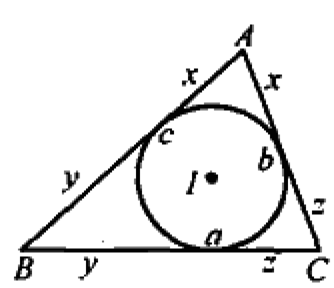



图1

所以所证不等式等价于

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2<2(y+z)(z+x)+2(z+x)(x+y)+2(x+y)(y+z)$$

即

$$0<xy+yz+zx$$

而这显然成立，所以要证结论成立.

# 一个不等式的简证及推广

**不等式** 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$,且 $x+y=1$,则$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\geqslant\frac{25}{4}$.

**证明** $x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x}\geqslant5\sqrt[5]{\frac{1}{4^4x^3}}$

$$y+\frac{1}{y}\geqslant5\sqrt[5]{\frac{1}{4^4y^3}}$$

所以
$$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\geqslant25\sqrt[5]{\frac{1}{4^8(xy)^3}}$$

又 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,得$\frac{1}{xy}\geqslant4$,所以

$$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\geqslant25\sqrt[5]{\frac{1}{4^8(xy)^3}}\geqslant\frac{25}{4}$$

用这种方法可将以上不等式推广为

**推广1** 若 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant k\leqslant n,k^2\in\mathbf{N}^*$,则$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(\frac{n}{k}+\frac{k}{n}\right)^n$(当且仅当 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 且 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{k}{n}$ 时取等号.)

**证明** $x_i+\frac{1}{x_i}=\frac{x_i}{k^2}\cdot k^2+\frac{1}{n^2x_i}\cdot n^2\geqslant(n^2+k^2)\cdot\sqrt[n^2+k^2]{\frac{x_i^{k^2-n^2}}{k^{2k^2}n^{2n^2}}}$

(当且仅当$\frac{x_i}{k^2}=\frac{1}{n^2x_i}$ 即 $x_i=\frac{k}{n}$ 时取等号)

所以

$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant(n^2+k^2)^n\cdot\sqrt[n^2+k^2]{\frac{(x_1x_2\cdots x_n)^{k^2-n^2}}{k^{2nk^2}n^{2n^3}}}$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{k}{n}$ 时取等号)

又 $x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号)

$\leqslant\left(\frac{k}{n}\right)^n$(当且仅当 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 时取等号).

由 $k \leqslant n$,得 $k^2 - n^2 \leqslant 0$,所以

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{k^2-n^2} \geqslant \left(\frac{k}{n}\right)^{n(k^2-n^2)}$$

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n^2+k^2)^n \sqrt[n^2+k^2]{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{n(k^2-n^2)}}{k^{2nk^2}n^{2n^3}}} = \left(\frac{n}{k}+\frac{k}{n}\right)^n$$

进而可得推广 1 成立.

**推广 2** 在推广 1 中去掉条件"$k^2 \in \mathbf{N}^*$"后,所得结论仍成立.

不过,若再用以上思路证明推广 2,需用到

**加权平均值不等式**[1] 若 $a_i, \alpha_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n; n \geqslant 2)$,则 $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \geqslant (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)(a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n}}$(当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots a_n$ 时取等号).

(推广 2 的证明同推广 1 的证明:只不过推广 1 中使用的是均值不等式,而推广 2 中使用的是加权均值不等式.)

若不用推广 1 的思路证明推广 2,可参见文献[2].

还可把推广 1,2 等价的改述为更简洁的结论:

**定理** 若 $x_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant n$,则 $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \left(\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$(当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号).

笔者不能解决的是推广 1 的一个类似问题:

**问题** 若 $x_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k > n$($k$ 为已知数),如何求 $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ 的最小值.

## 参考文献

[1] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲(修订版)[M].2 版.北京:高等教育出版社,1983.
[2] 邓太文.一个不等式的再推广.中学数学研究(南昌),2003(6):17.

# 由教科书中的三道小题所想到的

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书) 第4页的例1和第5页练习的第1,3题分别是

1. 比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小;

2. 比较$(x+5)(x+7)$与$(x+6)^2$的大小;

3. 已知$a\neq 0$,比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.

这是三道及其平常的题,教科书及其《教师教学用书》都是用作差法进行比较大小的.细心的读者可能已经发现了这三道题的共同特点:

1. 题设是 $(a+3)+(a-5)=(a+2)+(a-4)$

$|(a+3)-(a-5)|>|(a+2)-(a-4)|$

结论是 $(a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$

2. 题设是 $(x+5)+(x+7)=(x+6)+(x+6)$

$|(x+5)-(x+7)|>|(x+6)-(x+6)|$

结论是 $(x+5)(x+7)<(x+6)^2$

3. 题设是 $(a^2+\sqrt{2}a+1)+(a^2-\sqrt{2}a+1)=(a^2+a+1)+(a^2-a+1)$

$|(a^2+\sqrt{2}a+1)-(a^2-\sqrt{2}a+1)|>|(a^2+a+1)-(a^2-a+1)|\ (a\neq 0)$

结论是 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

它们蕴含着一般的规律吗?这就是本文要介绍的

**定理** 对于任意的实数$x,y$,有:

(1) 若$xy$是定值,则$|x-y|$越小时,$|x+y|$越小;

(2) 若$x+y$是定值,则$|x-y|$越小时,$xy$越大.

**证明** 由以下恒等式可证:

(1)$|x+y|=\sqrt{|x-y|^2+4xy}$;(2)$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$

教科书第10页的例1是

已知$x,y$都是正数,求证:

(1) 如果积$xy$是定值$P$,那么当$x=y$时,和$x+y$有最小值$2\sqrt{P}$;

(2) 如果和$x+y$是定值$S$,那么当$x=y$时,积$xy$有最大值$\frac{1}{4}S^2$.

这个例题的结论就是不等式中的最值定理,本文将推广这个结论.

显然,本文的定理就是该结论(即不等式中的最值定理)的推广.由定理可立得本文开头的三道小题的解法.

**例** (1)已知 $x+y=9(x,y\in \mathbf{N}^*)$,求 $xy$ 的最值;

(2)已知 $xy=60(x,y\in \mathbf{N}^*)$,求 $x+y$ 的最值.

**分析** 若用不等式中的最值定理是做不出来的.

(1) $xy=x(9-x)=-x^2+9x(x\in\{1,2,3,\cdots,8\})$,用二次函数的单调性可以求解.

(2) $x+y=x+\frac{60}{x}$($x$ 是60的正约数),用对勾函数的单调性可以试验求解.

但运用本文的定理来求解将更简洁.

**解** (1)由定理(2)知,当且仅当 $|x-y|$ 取最小(大)值时,$xy$ 取到最大(小)值.所以当且仅当 $(x,y)=(4,5)$ 或 $(5,4)$ 时,$xy$ 取到最大值,且最大值是20;当且仅当 $(x,y)=(1,8)$ 或 $(8,1)$ 时,$xy$ 取到最小值,且最小值是8.

(2)由定理(1)知,当且仅当 $|x-y|$ 取最小(大)值时,$x+y$ 取到最小(大)值.所以当且仅当 $(x,y)=(6,10)$ 或 $(10,6)$ 时,$x+y$ 取到最小值,且最小值是16;当且仅当 $(x,y)=(1,60)$ 或 $(60,1)$ 时,$x+y$ 取到最大值,且最大值是61.

# 浅探加权平均三角形各角的取值范围

文献[1]给出了平均三角形的定义：

设 $\triangle ABC$ 中角 $A,B,C$ 的对边长分别为 $a,b,c$(可不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,下文也同),则满足下列条件之一的 $\triangle ABC$ 都叫做平均三角形：

$$(1)b=\frac{a+c}{2};(2)b=\sqrt{ac};(3)b=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}};(4)b=\frac{2ac}{a+c}$$

还可分别叫做算术平均三角形;几何平均三角形;平方平均三角形;调和平均三角形.

文献[1]还证明了它们的一条共性:$0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$(当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立).

笔者研读了文献[1]对以上结论的证明,由该证明还可得到：

对于以上四类三角形,都有 $A$、$B$ 的取值范围均是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$,$C$ 的取值范围均是 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$(均当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $A,B,C$ 取到 $\frac{\pi}{3}$);均当且仅当 $a\to\frac{c}{3}$ 即 $b\to\frac{2}{3}c$ 时算术平均三角形中 $A\to 0,B\to 0,C\to\pi$,均当且仅当 $a\to\frac{3-\sqrt{5}}{2}c$ 即 $b\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}c$ 时几何平均三角形中 $A\to 0,B\to 0,C\to\pi$,均当且仅当 $a\to(2-\sqrt{3})c$ 即 $b\to(\sqrt{3}-1)c$ 时算术平均三角形中 $A\to 0,B\to 0,C\to\pi$,均当且仅当 $a\to(\sqrt{2}-1)c$ 即 $b\to(2-\sqrt{2})c$ 时算术平均三角形中 $A\to 0,B\to 0,C\to\pi$.

**证明**　先证明关于角 $B$ 的结论.

(1)对于算术平均三角形的情形：

当 $a\leqslant b\leqslant c$ 时,$a,b,c$ 是某三角形三边长的充要条件是 $a+b>c$,即 $a>\frac{c}{3}$.

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3(a^2+c^2)}{8ac}-\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{2}(\text{当且仅当 } a=c \text{ 时取等号})$$

所以可得 $B$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $B$ 取到

$\frac{\pi}{3}$，当且仅当 $a\to\frac{c}{3}$ 即 $b\to\frac{2}{3}c$ 时 $B\to 0$.

(2) 对于几何平均三角形的情形：

当 $a\leqslant b\leqslant c$ 时，$a,b,c$ 是某三角形三边长的充要条件是 $a+b>c$，即 $a>\frac{3-\sqrt{5}}{2}c$.

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}$(当且仅当 $a=c$ 时取等号)

所以可得 $B$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $B$ 取到 $\frac{\pi}{3}$，当且仅当 $a\to\frac{3-\sqrt{5}}{2}c$ 即 $b\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}c$ 时 $B\to 0$.

(3) 对于平方平均三角形的情形：

当 $a\leqslant b\leqslant c$ 时，$a,b,c$ 是某三角形三边长的充要条件是 $a+b>c$，即 $a>(2-\sqrt{3})c$.

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{4ac}\geqslant\frac{1}{2}$(当且仅当 $a=c$ 时取等号)

所以可得 $B$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $B$ 取到 $\frac{\pi}{3}$，当且仅当 $a\to(2-\sqrt{3})c$ 即 $b\to(\sqrt{3}-1)c$ 时 $B\to 0$.

(4) 对于调和平均三角形的情形：

当 $a\leqslant b\leqslant c$ 时，$a,b,c$ 是某三角形三边长的充要条件是 $a+b>c$，即 $a>(\sqrt{2}-1)c$.

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+c)^2}{2ac}-\frac{2ac}{(a+c)^2}-1$$

令 $\frac{(a+c)^2}{2ac}=t$，有 $t\geqslant 2$(当且仅当 $a=c$ 时取等号)，得

$$\cos B=t-\frac{1}{t}-1(t\geqslant 2)$$

易知上式右边是 $t$ 的增函数，$\cos B\geqslant\frac{1}{2}$，从而可得 $B$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $B$ 取到 $\frac{\pi}{3}$，当且仅当 $a\to(\sqrt{2}-1)c$ 即 $b\to(2-\sqrt{2})c$ 时 $B\to 0$.

再由 $A\leqslant B\leqslant C$ 及 $A+B+C=\pi$ 可立得关于 $A,C$ 的结论也成立.

文献[2]第 280 ~ 281 页给出了均值概念的推广：

称 $M_x=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha\in\mathbf{R})$ 为非负数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 $\alpha$ 次幂平均. 可证：

$M_1, M_0(M_0 = \lim_{\alpha\to 0} M_\alpha), M_2, M_{-1}$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均，几何平均，平方平均，调和平均.

称为 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}^+, \alpha \in \mathbf{R})$ 为非负数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 $\alpha$ 次 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 加权平均.

**定义** 设 $\triangle ABC$ 中角 $A, B, C$ 的对边长分别为 $a, b, c$，把满足 $b = \left(\frac{a^\alpha + c^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 的 $\triangle ABC$ 叫做 $\alpha$ 次幂平均三角形，满足 $b = \left(\frac{ka^\alpha + lc^\alpha}{k + l}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(k, l \in \mathbf{R}^+)$（当 $\alpha = 0$ 时，应理解为 $b = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{ka^\alpha + lc^\alpha}{k + l}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (a^k c^l)^{\frac{1}{k+l}}$（用洛必达法则可证），下同）的 $\triangle ABC$ 叫做 $\alpha$ 次 $k, l$ 加权平均三角形.

本文将用初等方法研究加权平均三角形各角的取值范围的求法.

**定理1** 若 $\alpha < 0 < k \leqslant l$，$\triangle ABC$ 是 $\alpha$ 次 $k, l$ 加权平均三角形（设 $t_0$ 是关于 $t$ 的方程 $kt^\alpha + l = (k + l)(1 - t)^\alpha$ 在 $(0,1)$ 上的唯一根），则 $A$、$B$ 的取值范围均是 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$，$C$ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$（均当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $A, B, C$ 取到 $\frac{\pi}{3}$）；均当且仅当 $a \to t_0 c$ 时 $A \to 0, B \to 0, C \to \pi$.

**证明** 先证明关于角 $B$ 的结论.

当 $a \leqslant b \leqslant c$ 时，$a, b, c$ 是某三角形三边长的充要条件是 $a + b > c$，即

$$a + \left(\frac{ka^\alpha + lc^\alpha}{k + l}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > c$$

$$ka^\alpha + lc^\alpha < (k + l)(c - a)^\alpha$$

设 $\frac{a}{c} = t$，得 $0 < t \leqslant 1$，且

$$kt^\alpha + l - (k + l)(1 - t)^\alpha < 0 \quad ①$$

又设 $g(t) = kt^\alpha + l - (k + l)(1 - t)^\alpha$，易知 $t^\alpha, (1 - t)^\alpha$ 分别是 $t$ 的减函数、增函数，所以 $g(t)$ 是 $(0,1)$ 上的减函数. 又

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = +\infty, \lim_{t\to 1^-} g(t) = -\infty$$

所以关于 $t$ 的方程 $kt^\alpha + l = (k + l)(1 - t)^\alpha$ 在 $(0,1)$ 上有唯一根且为 $t_0$. 得不等式 ① 的解集是 $t \in (t_0, 1]$，此即 $a, b, c$ 是某三角形三边长的充要条件.

有 $b = \left(\frac{ka^\alpha + lc^\alpha}{k + l}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，由余弦定理，得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-\left(\frac{ka^\alpha+lc^\alpha}{k+l}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{2ac}=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2+1-\left[\frac{k\left(\frac{a}{c}\right)^\alpha+l}{k+l}\right]^{\frac{2}{\alpha}}}{2\left(\frac{a}{c}\right)}$$

可设

$$f(t)=2\cos B=\frac{t^2+1-\left(\frac{kt^\alpha+l}{k+l}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{t}=\left(t+\frac{1}{t}\right)-(k+l)^{-\frac{2}{\alpha}}\left(kt^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{l}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$$

$(t\in(t_0,1])$

易知当 $0<t\leqslant 1$ 时，$t+\frac{1}{t}$ 是 $t$ 的减函数；当 $0<t\leqslant 1,\alpha<0<k\leqslant l$ 时 $\left(kt^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{l}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$ 是 $t$ 的增函数（用复合函数的“同增异减”性质可证），所以 $f(t)$ 是减函数.

所以 $f(t)=2\cos B\geqslant f(1)=1$，得当且仅当 $t=1$ 即 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $B$ 取到最大值，且最大值是 $\frac{\pi}{3}$.

由题设 $kt_0^\alpha+l=(k+l)(1-t_0)^\alpha$，得

$$(1-t_0)^2=\left(\frac{kt_0^\alpha+l}{k+l}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$$

已证 $f(t)$ 是减函数，所以

$$f(t)<f(t_0)=\frac{t_0^2+1-\left(\frac{kt_0^\alpha+l}{k+l}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{t_0}=\frac{t_0^2+1-(1-t_0)^2}{t_0}=2$$

得 $\cos B<1$，当且仅当 $t\to t_0$ 即 $a\to t_0c$ 时 $B\to 0$.

再由 $A\leqslant B\leqslant C$ 及 $A+B+C=\pi$ 可立得关于 $A,C$ 的结论也成立.

**定理 2** 若 $0<k\leqslant l$，$\triangle ABC$ 是 0 次 $k,l$ 加权平均三角形（设 $t_0$ 是关于 $t$ 的方程 $t^k=(1-t)^{k+l}$ 在 $(0,1)$ 上的唯一根），则 $A,B$ 的取值范围均是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，$C$ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$（当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 $A,B,C$ 取到 $\frac{\pi}{3}$）；均当且仅当 $a\to t_0c$ 时 $A\to 0,B\to 0,C\to\pi$.

**证明** 先证明关于角 $B$ 的结论.

当 $a\leqslant b\leqslant c$ 时，$a,b,c$ 是某三角形三边长的充要条件是 $a+b>c$，即

$$a+(a^kc^l)^{\frac{1}{k+l}}>c$$

$$a^kc^l > (c-a)^{k+l}$$

设$\frac{a}{c}=t$,得$0<t\leqslant 1$,且

$$t^k > (1-t)^{k+l} \quad ②$$

又设$g(t)=t^k-(1-t)^{k+l}$,易知$g(t)$是(0,1)上的减函数.又

$$\lim_{t\to 0^+} g(t)=-1,\lim_{t\to 1^-} g(t)=1$$

所以关于$t$的方程$t^k=(1-t)^{k+l}$在(0,1)上有唯一根且为$t_0$.得不等式②的解集是$t\in(t_0,1]$,此即$a,b,c$是某三角形三边长的充要条件.

有$b=(a^kc^l)^{\frac{1}{k+l}}$,由余弦定理,得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-(a^kc^l)^{\frac{2}{k+l}}}{2ac}=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2+1-\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2k}{k+l}}}{2\left(\frac{a}{c}\right)}$$

可设

$$f(t)=2\cos B=t+\frac{1}{t}-t^{\frac{k-l}{k+l}}(t\in(t_0,1])$$

易知当$0<t\leqslant 1$,$0<k\leqslant l$时,$f(t)$是减函数.

所以$f(t)=2\cos B\geqslant f(1)=1$,得当且仅当$t=1$即$\triangle ABC$为正三角形时$B$取到最大值,且最大值是$\frac{\pi}{3}$.

由题设$t_0{}^k=(1-t_0)^{k+l}$,得

$$(1-t_0)^2=(t_0{}^k)^{\frac{2}{k+l}}$$

$$\frac{(1-t_0)^2}{t_0}=t_0{}^{\frac{k-l}{k+l}}$$

$$t_0+\frac{1}{t_0}-t_0{}^{\frac{k-l}{k+l}}=2$$

已证$f(t)$是$t$的减函数,所以

$$f(t)<f(t_0)=t_0+\frac{1}{t_0}-t_0{}^{\frac{k-l}{k+l}}=2$$

得$\cos B<1$,当且仅当$t\to t_0$即$a\to t_0c$时$B\to 0$.

再由$A\leqslant B\leqslant C$及$A+B+C=\pi$可立得关于$A,C$的结论也成立.

请读者再研究$\alpha>0$或$k>l$时$\alpha$次$k,l$加权平均$\triangle ABC$中各角的取值范围的求法.

**猜想** 若$\triangle ABC$是$\alpha$次$k,l$加权平均三角形,则$A$、$B$的取值范围均是$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$,$C$的取值范围是$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$(当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时$A,B,C$取到

$\frac{\pi}{3}$);均当且仅当 $a \to t_0 c$ 时 $A \to 0, B \to 0, C \to \pi$,其中 $t_0$ 是仅与 $\alpha, k, l$ 有关的常数(请读者能求出 $t_0$ 的表达式).

## 参考文献


[1] 李明.四类平均三角形的一条共性[J].数学教学,2008(6):19.

[2] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.

# 这种证明仍有瑕疵

2004年西部数学奥林匹克的一道竞赛题是:

求证:对于任意的正实数 $a,b,c$,都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad ①$$

文献[1]给出了式①左边的简洁证明:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}>$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>1$$

文献[2]还指出了文献[1]对式①右边证明的错误,但笔者发现文献[2]的证明也不对!先来看看文献[2]的证明:

若令 $x=\frac{b^2}{a^2},y=\frac{c^2}{b^2},z=\frac{a^2}{c^2}$,即证:

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}(x,y,z\in\mathbf{R}^+,xyz=1) \qquad ②$$

可先证得

$$\frac{1}{\sqrt{1+p}}+\frac{1}{\sqrt{1+q}}\leqslant\sqrt{2}(p,q\in\mathbf{R}^+,pq=1) \qquad ③$$

由此,可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z}}}\leqslant3\sqrt{2}$$

$$(x,y,z\in\mathbf{R}^+) \qquad ④$$

假设式②的右边不成立,得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>\frac{3\sqrt{2}}{2}(x,y,z\in\mathbf{R}^+,xyz=1) \qquad ⑤$$

令 $x=\frac{1}{r},y=\frac{1}{s},z=\frac{1}{t}$,得 $r,s,t\in\mathbf{R}^+,rst=1$,且有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{r}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}>\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad ⑥$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z}}}>\frac{3\sqrt{2}}{2}(x,y,z\in\mathbf{R}^+,xyz=1) \qquad ⑦$$

⑤ + ⑦,将与 ④ 矛盾!所以假设错误,得式 ② 的右边即式 ① 的右边也成立!

这种证明的错误在于:

要证明式 ② 的右边成立,即证明满足条件"$x,y,z\in\mathbf{R}^+,xyz=1$"的任意一组数 $x,y,z$ 均有式 ② 的右边成立.

假设式 ② 的右边不成立,只能得到:存在一组满足条件"$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,$xyz=1$"的数 $x,y,z$ 使 ⑤ 成立.所以 ⑥ 中的 $r,s,t$ 只能表示 ⑤ 中的$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$,由此不能得出 ⑦.

文献[2] 的证明中认为 ⑤ 对于任意的 $x,y,z$ 均成立,是不对的!

文献[1],[2] 都没有给出这道赛题的简证,笔者也没有好的方法,但笔者却发现这道赛题与 2008 年普通高考(江西卷)的压轴题最后一问有惊人的相似,这道题是:

22.已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\frac{ax}{ax+8}}$,$x\in(0,+\infty)$.

(2) 对任意正数 $a$,证明:$1<f(x)<2$.

参考解答也很复杂,给出的思路是:

若令 $b=\frac{8}{ax}$,则 $abx=8$,$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}$,即证如下结论:

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}<2(a,b,c\in\mathbf{R}^+,abc=8) \qquad ⑧$$

由 ②,⑧,笔者提出

**猜想** 若 $k,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,则

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a_i}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{k+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}}$$

本文将证明该猜想的一个类似结论:

**定理** 若 $k,l,a_1,a_2,\cdots,a_n,\alpha\in\mathbf{R}^+$,$a_1a_2\cdots a_n=l^n$,则$\sum_{i=1}^{n}(k+a_i)^{\alpha}\geqslant$

$n(k+l)^\alpha$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=l$ 时取等号).

**证明** 可设 $a_i=le^{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$,其中 e 是自然对数的底数,得 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$. 即证:

当 $k,l\in\mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 时, $\sum_{i=1}^{n}(k+le^{x_i})^\alpha\geqslant n(k+l)^\alpha$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时取等号) ⑨

这用凸函数的以下性质(见文献[3]第85页定理3)极易获证:

**Jensen 不等式** 若 $f(x)$ 为区间 $I$ 上的上(下)凸函数,则对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$,必有 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant(\geqslant)nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$,且当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号.

设 $f(x)=(k+le^x)^\alpha$,得

$f'(x)=\alpha le^x(k+le^x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha le^x(k+le^x)^{\alpha-2}(k+\alpha le^x)>0$

所以 $f(x)=(k+le^x)^\alpha$ 是 $\mathbf{R}$ 上的下凸函数,由 Jensen 不等式立得要证的结论⑨成立,所以定理也成立.

## 参考文献

[1] 杨安琪.一道竞赛题的新解.中学生数学,2007(1,上):17-18.
[2] 黄兆麟.一道竞赛题"新解"的错误及其另解.中学生数学,2008(8,上):25.
[3] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993.

# 介绍几道 2008 年自主招生数学试题

高校自主招生考试数学试题材料鲜活，不易压中，试题的结构常以5～7道解答题的形式出现（如 2008 年清华大学、北京大学、浙江大学的自主招生试题），也有与本省高考数学试卷的形式类似的（如 2008 年山东大学自主招生试题），试题的难度一般略高于高考题.下面介绍几道 2008 年自主招生数学试题，且这里给出的解答多与原参考答案不同.

**题 1** （2008 年北京大学自主招生数学试题）求证：边长为 1 的正五边形对角线长为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

原参考解答是用平面几何中的三角形相似证得的，下面给出一种三角解法.

**解** 选择正五边形的两条共顶点的对角线及其一边组成等腰三角形，再作其底边上的高，又设这个正五边形对角线长为 $x$，得

$$\sin 18^\circ = \frac{0.5}{x}, x = \frac{1}{2\sin 18^\circ}$$

下面求 $\sin 18^\circ$（实际上，有很多资料把 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 作为特殊角的三角函数值列出 —— 此值为黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 的一半，挺好记的；高一数学老师应当介绍 $\sin 18^\circ$ 的值极其算法，并不难）：

由公式 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ 及 $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ 立得

$$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$$

$$2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3 = 4(1-\sin^2 18^\circ) - 3$$

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

所以所求正五边形对角线长为 $x = \frac{1}{2\sin 18^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**题 2** （2008 年复旦大学自主招生数学试题）请证明$\sqrt{2}$ 是一个无理数.

**证明** 假设$\sqrt{2}$是有理数则可设$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$($m,n$是两个互质的正整数),得$m^2=2n^2$,所以$m^2$是偶数,进而得$m$也是偶数(因为当$m$是奇数时,$m^2$是奇数),又可得$m^2(m^2=2n^2)$是4的倍数,$n^2$是偶数,$n$也是偶数,得$m,n$均是偶数,这与$m,n$互质矛盾!说明$\sqrt{2}$是无理数.

以上证明初二学生即可弄懂,但反证法在教科书上虽然作了介绍,平时却训练极少,所以学生对这种证法很陌生(而2008年高考数学江苏卷第19题第(2)问就是需要用反证法证明的题目),我们在平时的教学中应当重视这方面的训练.

$\sqrt{2}$还是人类历史上发现的第一个无理数,是Pythagoras(约公元前500年,希腊学者)学派的成员Hippasus所发现的,从而产生了数学史上的第一次危机,所以学生还应当尽可能地通过课外阅读等手段扩大知识面.

**题3** (2008年浙江大学自主招生数学试题)$A=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\frac{5}{4}\right\}$,$B=\{(x,y)\mid |x-1|+2|y-2|\leqslant a\}$,$A\subseteq B$,求$a$的取值范围.

原参考解答是:通过换元后可知,题意即

若$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant\frac{5}{4}\right\}\subseteq\{(x,y)\mid |x|+2|y|\leqslant a\}$,求正数$a$的取值范围.

再通过画图(由对称性,可以只考虑第一象限的图形),得圆$x^2+y^2\leqslant\frac{5}{4}$的圆心即坐标原点到直线$x+2y=a$的距离不小于该圆的半径$\frac{\sqrt{5}}{2}$,得所求$a$的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

下面给出一种所用知识更少的解法.

**解** 题意即

若$(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\frac{5}{4}\Rightarrow|x-1|+2|y-2|\leqslant a$,求实数$a$的取值范围.

因为$(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\frac{5}{4}\Leftrightarrow|y-2|\leqslant\sqrt{\frac{5}{4}-(x-1)^2}$,所以题设等价于$|x-1|+2\sqrt{\frac{5}{4}-(x-1)^2}\leqslant a$恒成立.设$|x-1|=t$,得$t\geqslant 0$,题设即函数$z=t+\sqrt{5-4t^2}\,(t\geqslant 0)$的最大值$z_{\max}\leqslant a$,下面用两种方法求$z_{\max}$.

法一:可得
$$(z-t)^2=5-4t^2$$

$$5t^2-2zt+(z^2-5)=0$$
$$\Delta=4z^2-20(z^2-5)\geqslant 0$$
$$-\frac{5}{2}\leqslant z\leqslant\frac{5}{2}$$

还可得当且仅当 $t=\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{3}{2}$,或 $-\frac{1}{2}$ 时,$z=\frac{5}{2}$,所以 $z_{\max}=\frac{5}{2}$.

法二:可得 $5-4t^2\geqslant 0,0\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以可设 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta,(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$,得

$$z=t+\sqrt{5-4t^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta=$$
$$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)=\frac{5}{2}\sin(\theta+\varphi)\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

其中 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

由此也可得:当且仅当 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ 也即 $t=\frac{1}{2}$ 就是 $x=\frac{3}{2}$,或 $-\frac{1}{2}$ 时,$z_{\max}=\frac{5}{2}$.

所以所求 $a$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

**题4** (2008年浙江大学自主招生数学试题)已知 $x>0,y>0,a=x+y,b=\sqrt{x^2+xy+y^2},c=m\sqrt{xy}$,问是否存在正数 $m$ 使得对于任意正数 $x,y$ 可使 $a$、$b$、$c$ 为一个三角形的三条边,如果存在,求出 $m$ 的值;如果不存在,请说明理由.

**解** 因为 $a>b$,所以存在正数 $m$ 满足题意的充要条件是对于任意的正数 $x,y$ 有下式成立:

$$\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}>m\sqrt{xy}\\\sqrt{x^2+xy+y^2}+m\sqrt{xy}>x+y\end{cases}$$

可设 $y=k^2x(k>0)$,得

$$\begin{cases}1+k^2+\sqrt{1+k^2+k^4}>mk\\\sqrt{1+k^2+k^4}+mk>1+k^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)+\sqrt{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-1}\right]_{\min}>m\\m>\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)-\sqrt{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-1}\right]_{\max}\end{cases}$$

设 $k+\frac{1}{k}=t$,得 $t\geqslant 2$,所以

$$\begin{cases}(t+\sqrt{t^2-1})_{\min}>m\\ m>\left(\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2-1}}\right)_{\max}\end{cases}$$

再由函数的单调性,可立得满足题意的正数 $m$ 存在,且 $m$ 的值有无数多个,其取值范围是$(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

**题 5** (2008 年南京大学自主招生数学试题)若正数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=1$,求证:$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1\,000}{27}$.

高中生在学习"不等式的证明"时,大多都证明过这样的题:

若正数 $a,b$ 满足 $a+b=1$,求证:$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$.

简证如下:先得 $0<ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,又函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$上是减函数,所以 $ab+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$,再得

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{17}{4}+2=\frac{25}{4}$$

对于该题的深入研究,就会得到题 5 的问题.下面给出题 5 的两个简证,并推广其结论.

**证法 1** 因为在题 5 的不等式中,当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号,为了使 $a+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{ma}+\frac{1}{ma}+\cdots+\frac{1}{ma}$(共 $m$ 个$\frac{1}{ma}$)能使用均值不等式且等号能取到,应让 $a=\frac{1}{ma}$ 且 $a=\frac{1}{3}$,得 $m=9$,所以有如下证法:

$$a+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9a}+\cdots+\frac{1}{9a}(\text{共 9 个}\frac{1}{9a})\geqslant 10\sqrt[10]{\frac{a}{(9a)^9}}$$

同理,有

$$b+\frac{1}{b}\geqslant 10\cdot\sqrt[10]{\frac{b}{(9b)^9}},c+\frac{1}{c}\geqslant 10\sqrt[10]{\frac{c}{(9c)^9}}$$

所以
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\geqslant 10^3\sqrt[10]{\frac{abc}{(9^3abc)^9}}$$

再由 $0<abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,可得$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1\,000}{27}$(当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号).

由此思路,还可证得

**推广 1** 若正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则 $\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取等号).

**证法 2** $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)=\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{b^2+1}{b}\cdot\frac{c^2+1}{c}=$

$$\frac{a^2b^2c^2+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2+b^2+c^2)+1}{abc}\geqslant$$

$$\frac{a^2b^2c^2+3(\sqrt[3]{a^2b^2c^2})^2+3(\sqrt[3]{a^2b^2c^2})+1}{abc}=$$

$$\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$$

再由 $0<abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,及函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$上是减函数,可得要证结论成立!

**推广 2** 若 $a,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant n\sqrt{a}$,则 $\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{a}{a_i}\right)\geqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}+\frac{na}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^n$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

**证明** $\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{a}{a_i}\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+a)}{\prod_{i=1}^{n}a_i}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}a_i}(a^n+a^{n-1}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}a_{i_1}^2+$

$a^{n-2}\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}a_{i_1}{}^2a_{i_2}{}^2+\cdots+a\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leqslant n}a_{i_1}{}^2a_{i_2}{}^2\cdots a_{i_{n-1}}{}^2+a_1^2a_1^2\cdots a_n^2)=$

$$\frac{a^n+\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_k\leqslant n}(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})^2}{\prod_{i=1}^{n}a_i}$$

注意到和式 $\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_k\leqslant n}(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})^2$ 是 $C_n^k$ 项的和,由均值不等式,得

$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_k\leqslant n}(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})^2\geqslant C_n^k\cdot\sqrt[C_n^k]{\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_k\leqslant n}(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})^2}=$

$C_n^k\cdot\sqrt[C_n^k]{(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{2kC_n^k}{n}}}=C_n^k\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\right)^{2k}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等

号).

$$\text{所以}\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{a}{a_i}\right)\geqslant\frac{a^n+\sum\limits_{k=1}^{n}a^{n-k}C_n^k\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)^{2k}}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}=\frac{\left[a+\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)^2\right]^n}{\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)^n}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{a}{a_i}\right)\geqslant\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\frac{a}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}}\right)^n$$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号）.

又由均值不等式，得

$$0<\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\leqslant\sqrt{a}$$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时第一个"$\leqslant$"中取等号）

再由函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数，可得

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\frac{a}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}+\frac{na}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}>0$$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时"$\geqslant$"中取等号）

从而可得推广 2 成立.（推广 1 显然是推广 2 的特例）

# 一个不等式问题的初等解决

2001年第9期《数学通讯》上发表了《综合题新编选登》,其中第3题是广东吴伟朝老师编拟的一道关于不等式的难题,吴老师在"试题背景"中提出了如下问题:

设实常数 $a$ 使得关于 $x$ 的不等式 $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \geqslant a\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ 有非零实数解,求 $a$ 的最大值.

本文将用初等方法圆满的解决这个问题(答案见本文的定理).

**引理1** 设函数 $f(u) = u^2 + 4u + \frac{2}{u}(u > 0)$,则

(1) 当 $u \in (0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 时,$f(u)$ 严格单调递减;

(2) 当 $u \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty)$ 时,$f(u)$ 严格单调递增;

(3) 当且仅当 $u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时,$f(u)$ 取最小值,且最小值为 $\frac{5\sqrt{5}+1}{2}$.

**证明** (1) 设 $0 < u_1 < u_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,得

$$u_1u_2(u_1 + u_2 + 4) < (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2 + 4) = 2$$

$$u_1 + u_2 + 4 - \frac{2}{u_1u_2} < 0$$

$$(u_1 - u_2)(u_1 + u_2 + 4 - \frac{2}{u_1u_2}) > 0$$

$$u_1^2 + 4u_1 + \frac{2}{u_1} > u_2^2 + 4u_2 + \frac{2}{u_2}$$

$f(u_1) > f(u_2)$,得结论(1)成立.

(2) 同(1)可证.

(3) 由结论(1),(2)可得,也可仅用平均值不等式证得:

设 $0 < \alpha < 1$,则

$$\begin{cases} q^2+\dfrac{\alpha}{q}+\dfrac{\alpha}{q}\geqslant 3\sqrt[3]{q^2\cdot\dfrac{\alpha}{q}\cdot\dfrac{\alpha}{q}}=3\sqrt[3]{\alpha^2} \\ 4q+\dfrac{2-2\alpha}{q}\geqslant 2\sqrt{4q\cdot\dfrac{2-2\alpha}{q}}=4\sqrt{2-2\alpha} \end{cases}$$

从而,得 $q^2+4q+\dfrac{2}{q}\geqslant 3\sqrt[3]{\alpha^2}+4\sqrt{2-2\alpha}$(当且仅当"$q^2=\dfrac{\alpha}{q}$ 且 $4q=\dfrac{2-2\alpha}{q}$"时取符号,即"$q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 且 $\alpha=q^3=\sqrt{5}-2$"时取符号),由此立得结论(3)成立.

**引理 2** 设函数 $g(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}(x>1)$,则

(1) 当 $x\in(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})$ 时,$g(x)$ 严格单调递增;

(2) 当 $x\in(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)$ 时,$g(x)$ 严格单调递减;

(3) 当且仅当 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时,$g(x)$ 取最大值,且最大值是$\dfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$.

**证明** 设 $x=(u+1)^2(u>0)$,得

$$(g(x))^2=\frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)}=\frac{u}{(u+1)^2(u+2)}=\frac{u}{u^3+4u^2+5u+2}=$$

$$\frac{1}{f(u)+5}\quad(f(u)\text{ 见引理 1})$$

所以 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(u)+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{f(\sqrt{x}-1)+5}}$,再由引理 1,得

(1) 当 $u\in(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$ 时,即 $x\in(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})$ 时,函数 $g(x)$ 严格单调递增.

(2) 当 $u\in(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty)$,即 $x\in(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)$ 时,函数 $g(x)$ 严格单调递减.

(3) 由结论(1),(2)可得.

**定理** 设实常数 $a$ 使得关于 $x$ 的不等式$\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\geqslant a\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ 有非零实数解,则 $a$ 的最大值是$\dfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}=0.300\ 283\cdots$

**证明** 由题设可得

实常数 $a$ 使得关于 $x$ 的不等式

$$g(x)\geqslant a(x>1,g(x)\text{ 见引理 2})\tag{①}$$

有实数解.

又由引理 2, 可画出函数 $g(x)$ 的草图(见图 1),容易看出:

当 $a > \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ 时,不等式①无实数解;

当 $a = \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ 时,不等式①有且仅有一个实数解: $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$;

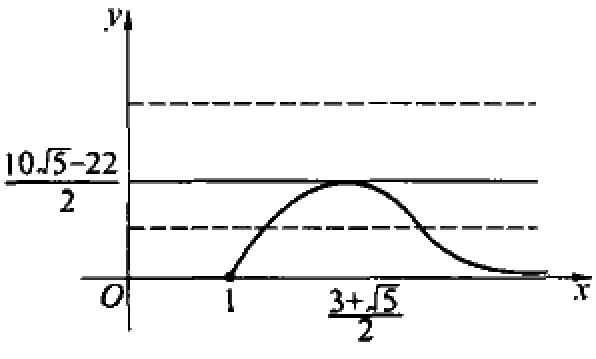


图 1　定理图

当 $a < \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ 时,不等式 ① 有无数个实数解.

所以定理成立.

# 一个不等式的推广

上海胡炯涛先生曾给出如下不等式[1]：

若 $a,b\in\mathbf{R}^+,a+b=1$,则

$$\sqrt{2}<\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2 \qquad ①$$

本文将推广此不等式.

**定理1** 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$,则 $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

**证明** 由题设,可构造出一个 Rt$\triangle ABC$,其中 $\angle C=$ Rt$\angle$, $BC=\sqrt{a}$, $CA=\sqrt{b}$, $AB=\sqrt{a+b}$(如图1).

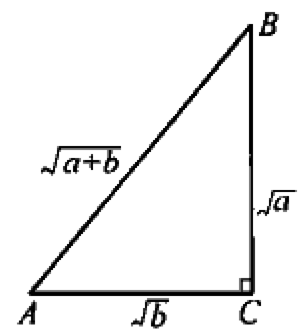


图1

由"三角形的两边之和大于第三边",得

$$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

还可得

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}(\sin A+\cos A)=\sqrt{2(a+b)}\sin(A+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2(a+b)}$(当且仅为 $A=\frac{\pi}{4}$ 即 $a=b$ 时取等号)

所以定理1成立.

当 $a\to 0$ 或 $b\to 0$ 时,均有 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\to\sqrt{a+b}$,从这个意义上说,定理1的左边不容改进.

由定理1知,不等式①中的条件"$a>0,b>0$"可放宽为"$a>-\frac{1}{2},b>-\frac{1}{2}$".

**定理2** 若 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 2,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,则 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}<\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}2^{n-i+1}a_i-2^{n-1}a_1}$(当且仅当 $a_i=2^{2i-4}a_1(i=2,3,\cdots,n)$ 时取等号).

**证明** 对 $n$ 用数学归纳法来证.

由定理1知,$n=2$ 时成立.

假设 $n=k$ 时成立,下证 $n=k+1$ 时也成立.

由"$n = k$ 时成立"的左边不等式及定理 1,可得

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i} = \sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{k+1}} > \sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i} + \sqrt{a_{k+1}} > \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}a_i}$$

即
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}a_i} < \sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i} \quad ②$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i} = \sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{k+1}} \overset{(1)}{\leqslant} \sqrt{\sum_{i=1}^{k}2^{k-i+1}a_i - 2^{k-1}a_1} + \sqrt{a_{k+1}} \overset{(2)}{\leqslant}$$
$$\sqrt{2(\sum_{i=1}^{k}2^{k-i+1}a_i - 2^{k-1}a_1 + a_{k+1})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}2^{k-i+2}a_i - 2^k a_1}$$

即
$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}2^{k-i+2}a_i - 2^k a_1} \quad ③$$

再来看 ③ 中取等号的充要条件,即(1),(2) 中同时取等号的充要条件:

(1) 中取等号的充要条件是:$a_i = 2^{2i-4}a_1(i = 2,3,\cdots,k)$.

(2) 中取等号的充要条件是 $a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}2^{k-i+1}a_i - 2^{k-1}a_1$.

此时,得

$$a_{k+1} = \sum_{i=2}^{k}2^{k-i+1}a_i + 2^{k-1}a_1 = \sum_{i=2}^{k}2^{k-i+1}\cdot 2^{2i-4}a_1 + 2^{k-1}a_1 =$$
$$2^k a_1\sum_{i=2}^{k}2^{i-3} + 2^{k-1}a_1 = 2^{2k-2}a_1$$

所以 ③ 中取等号的充要条件是:

$$a_i = 2^{2i-4}a_1(i = 2,3,\cdots,k+1) \quad ④$$

由 ②,③,④ 得 $n = k + 1$ 时定理 2 成立.

综上所述,得定理 2 成立.

文献[1]还将不等式 ① 的左边加强为:

若 $a,b \in \mathbf{R}^+, a + b = 1$,则

$$\sqrt{a + \frac{1}{2}} + \sqrt{b + \frac{1}{2}} > \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \quad ⑤$$

不等式 ⑤ 也不容再改进:因为当 $a \to 0$ 或 $b \to 0$ 时,$\sqrt{a + \frac{1}{2}} + \sqrt{b + \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

下面再推广不等式 ⑤.

**定理 3** 若 $a \geqslant h \geqslant 0, b \geqslant h \geqslant 0$,则$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{h} + \sqrt{a + b - h}$(当且仅当 $a = h$ 或 $b = h$ 时取等号).

(因平方法可证)

**定理 4** 若 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2, h \geqslant 0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in [h, +\infty)$,则 $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \geqslant (n-1)\sqrt{h} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)h}$(当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有 $n-1$ 个字母同时取 $h$ 时取等号).

(用定理 3 对 $n$ 用数学归纳法可证)

## 参考文献

[1] 曾玉良.一个不等式的简证.中学数学月刊,2001(2):37

# 简证两个不等式

可把文献[1]的引理1,2分别推广为:

**引理1** 若 $k,l,m,n\in\mathbf{R}^{+}$, $k<l\leqslant m<n$(或 $k>l\geqslant m>n$), $kn=lm$,则 $k+n>l+m$.

**证明** 由题设,可得 $m(l-k)>k(l-k)$,即 $ml-mk>k(l-k)$.

再由 $kn=lm$,得 $k(n-m)>k(l-k)$.

又 $k>0$,所以 $n-m>l-k$, $k+n>l+m$.

**引理2** 若 $k,l,m,n\in\mathbf{R}$, $k<l\leqslant m<n(k>l\geqslant m>n)$, $k+n=l+m$,则 $kn<lm$.

**证明** 由题设,可得 $m(l-k)>k(l-k)$,即 $ml+k^2>kl+mk$.

再由 $k+n=l+m$,得 $k^2+kn=kl+km$,所以 $kn<lm$.

文献[2]的定理1,2分别给出了关于等比数列、等差数列的不等式:

**定理1** 设$\{b_n\}$是正项等比数列, $k,l,m,n\in\mathbf{N}^*$, $k<l\leqslant m<n$且$k+n=l+m$,则 $b_k+b_n\geqslant b_l+b_m$(当且仅当$\{b_n\}$是常数列时取等号).

**定理2** 设$\{a_n\}$是等差数列, $k,l,m,n\in\mathbf{N}^*$, $k<l\leqslant m<n$且$k+n=l+m$,则 $a_ka_n\leqslant a_la_m$(当且仅当$\{a_n\}$是常数列时取等号).

下面运用引理1,2给出它们的简证.

**定理1的证明** 设$\{b_n\}$的公比为 $q$,有 $q>0$, $b_1>0$.

由$\{b_n\}$是等比数列及 $b_1>0$, $k<l\leqslant m<n$,可证得:

当 $q>1$ 时, $b_k<b_l\leqslant b_m<b_n$;

当 $0<q<1$ 时, $b_k>b_l\geqslant b_m>b_n$.

当 $k+n=l+m$ 及$\{b_n\}$是等比数列,可得 $b_kb_n=b_lb_m$.

用引理1,即得 $b_k+b_n>b_l+b_m$.

当 $q=1$ 时,显然有 $b_k+b_n=b_l+b_m$.

综上所述,得定理1成立.

**定理2的证明** 设$\{a_n\}$的公差为 $d$.

由$\{a_n\}$是等差数列及 $k<l\leqslant m<n$,可证得:

当 $d>0$ 时, $a_k<a_l\leqslant a_m<a_n$;

当 $d<0$ 时, $a_k>a_l\geqslant a_m>a_n$.

由 $k + n = l + m$ 及 $\{a_n\}$ 是等差数列,可得 $a_k + a_n = a_l + a_m$.

由引理 2,即得 $a_k a_n < a_l a_m$.

当 $d = 0$ 时,显然有 $a_k a_n = a_l a_m$.

综上所述,得定理 2 成立.

下面再指出文献[2]的三处印刷错误:第 27 页右栏倒数第四行中等号右边的式子"$(1-q)(q+1)(2q-1)$"应改为"$(1-q)(q-1)(2q+1)$",第 28 页左栏第一行中第一个等号右边的式子"$b_k + 1 - q^2 - b_k q$"应改为"$b_k + q^2 - 1 - b_k q$",第 28 页右栏定理 1 中的"$a_k, a_n, a_l, a_m$"应分别改为"$b_k, b_n, b_l, b_m$".

## 参考文献

[1] 盛宏礼.有关正项等差数列的不等式.中学数学月刊,2000(9):30-32.
[2] 方廷刚,张俊.一道数列综合题的解法分析.数学通讯,2000(19):27-28.

# 一个不等式的简证

文献[1]的定理1给出了关于正项等差数列的一个不等式.实际上,它对于任意等差数列均成立,即有:

**定理1** 设$\{a_n\}$是公差为$d$的等差数列,$m,n,p,k\in\mathbf{N}^*$,$m<n\leqslant p<k$且$m+k=n+p$,则$a_ma_k\leqslant a_na_p$(当且仅当$d=0$时取等号).

先把文献[1]的引理2作如下改进后,便可给出定理1的简洁证明.

**引理1** 若$m,n,p,k\in\mathbf{R}$,$m<n\leqslant p<k$(或$m>n\geqslant p>k$),$m+k=n+p$,则$mk<np$.

**证明** 由题设,可得

$$p(n-m)>m(n-m)$$

$$pm+m^2>mn+pm$$

再由$m+k=n+p$,得

$$m^2+mk=mn+mp$$

所以

$$mk<np$$

**定理1的证明** 由$\{a_n\}$是等差数列及$m<n\leqslant p<k$,可证得:

当$d>0$时,$a_m<a_n\leqslant a_p<a_k$;

当$d<0$时,$a_m>a_n\geqslant a_p>a_k$.

由$m+k=n+p$及$\{a_n\}$是等差数列,可得$a_m+a_k=a_n+a_p$.

由引理1,即得$a_ma_k<a_na_p$.

当$d=0$时,显然有$a_ma_k=a_na_p$.

综上所述,得定理1成立.

对于等比数列,也有类似于定理的结论:

**定理2** 设$\{b_n\}$是公比为$q$的正项等比数列,$m,n,p,k\in\mathbf{N}^*$,$m<n\leqslant p<k$且$m+k=n+p$,则$b_m+b_k\geqslant b_n+b_p$,$\frac{1}{b_m}+\frac{1}{b_k}\geqslant\frac{1}{b_n}+\frac{1}{b_p}$,它们均当且仅当$q=1$时取等号.

读者可用下面的引理2(由文献[1]的引理1改进得到)证得定理2

**引理2** 若$m,n,p,k\in\mathbf{R}^+$,$m<n\leqslant p<k$(或$m>n\geqslant p>k$),$mk=np$,则$m+k>n+p$,$\frac{1}{m}+\frac{1}{k}>\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$.

**证明** 由题设,可得

$$p(n-m)>m(n-m)$$

$$pn-pm>m(n-m)$$

再由 $mk=np$,得 $m(k-p)>m(n-m)$.

又 $m>0$,所以 $k-p>n-m,m+k>n+p$.

由 $m+k>n+p,mk=np>0$,得

$$\frac{m+k}{mk}>\frac{n+p}{np}$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{k}>\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$$

## 参考文献

[1] 盛宏礼.有关正项等差数列的不等式.中学数学月刊,2000(9):30-32.

# 对一道好题的剖析

沈红梅、田正平老师分别在《中学数学月刊》1997 年第 6,10 期介绍了下面一道好题的巧妙解法：

若 $a > b > 0$,求证：$\frac{a\sin x + b}{a\sin x - b}$ 不能介于$\frac{a-b}{a+b}$与$\frac{a+b}{a-b}$之间.

下面对此题作一些剖析,并对该结论进行推广.

容易看出,该题中“$\sin x$”起的作用只是限定 $\sin x$ 的取值范围为$[-1,1]$.在本题中可设 $\sin x = r, a = bs$,则得以下结论：

若 $rs \neq 1, |r| \leqslant 1, s > 1$,则$\frac{rs+1}{rs-1} \leqslant \frac{s-1}{s+1}$或$\frac{rs+1}{rs-1} \geqslant \frac{s+1}{s-1}$.

还可把该结论推广为：

若 $rs \neq 1, s \neq 0, \pm 1$,则

(1) $\frac{s-1}{s+1} \leqslant \frac{rs+1}{rs-1} \leqslant \frac{s+1}{s-1} \Leftrightarrow (r^2-1)(s^2-1) \geqslant 0$;

(2) $\frac{rs+1}{rs-1} \leqslant \frac{s-1}{s+1}$或$\frac{rs+1}{rs-1} \geqslant \frac{s+1}{s-1} \Leftrightarrow (r^2-1)(s^2-1) \leqslant 0$;

(3) $\frac{rs+1}{rs-1} = \frac{s-1}{s+1}$或$\frac{s+1}{s-1} \Leftrightarrow r^2 = 1$.

**证明** 由以下性等式可证上面三个结论成立：

$$\left(\frac{rs+1}{rs-1} - \frac{s-1}{s+1}\right)\left(\frac{rs-1}{rs+1} - \frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{4s^2(1-r^2)}{(rs-1)^2(s^2-1)}$$

由以上证明知,把原题中的 $\sin x$ 换为 $\sin^n x$,或 $\cos^n x(n > 0)$,所得结论也成立;再把 $a > b > 0$ 换为 $a^2 > b^2 > 0$,所得结论也成立.严格地说,原题中还应添上条件 $a\sin x \neq b$.

# 再谈一个最值问题的平方解法

文献[1]用平方法给出了下面一道题的解法：

已知 $a,b$ 是不相等的正数，试求函数 $y=\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x}+\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x}$ 的最值.

本文再给出此题更简明的解法.

**解** 设 $\cos^2x=r$,则 $\sin^2x=1-r,0\leqslant r\leqslant 1$.

本题即求函数

$y=\sqrt{b+(a-b)r}+\sqrt{a-(a-b)r}$ （$a,b$ 是已知的不等正数）的最值.

又设 $(a-b)r=s$,则

$a>b$ 时,$0\leqslant s\leqslant a-b$;$a<b$ 时,$a-b\leqslant s\leqslant 0$.

又将本题化为求下面函数的最值：

$$y=\sqrt{a-s}+\sqrt{b+s}$$

由 $y^2=a+b+2\sqrt{(a-s)(b+s)}$ 知,只需求

$$f(s)=(a-s)(b+s)$$

的最值.有：

$$f(s)=-(s-\frac{a-b}{2})^2+(\frac{a+b}{2})^2$$

所以当且仅当 $s=\frac{a-b}{2}$ 时,$f(s)$ 取到最大值$(\frac{a+b}{2})^2$;当且仅当 $s=0$ 或 $a-b$ 时,$f(s)$ 取到最小值 $ab$.

从而可得：当且仅当 $\sin^2x=\frac{1}{2}$ 时,$y$ 取到最大值$\sqrt{2(a+b)}$;当且仅当 $\cos x=0,\pm 1$ 时,$y$ 取到最小值$\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

## 参考文献

[1] 李建章.一个最值问题的平方解法.中学数学月刊,1997(7～8):31-33.

# 不等式$(a+b)^2 \geqslant 4ab$的另证及应用

**引理** 若关于$x$的方程$ax^2+bx+c=0(a,b,c \in \mathbf{R})$有实数根，则$\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$.

**证明** 当$a \neq 0$时成立.

当$a=0$时，$\Delta = b^2-4ac = b^2 \geqslant 0$.

由引理可得常用不等式

若$a,b \in \mathbf{R}$，则

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab \qquad ①$$

的另证：

因为关于$x$的方程

$$ax^2-(a+b)x+b=0 \qquad ②$$

即
$$(x-1)(ax-b)=0$$

有根$x=1$，所以$\Delta = (a+b)^2-4ab \geqslant 0$，即$(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

再证"当且仅当$a=b$时取等号"：

当$a=0$时成立.

当$a \neq 0$时，$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程②有两个相等的实数根$\Leftrightarrow \dfrac{b}{a}=1 \Leftrightarrow a=b$.

**例1** 已知$\sqrt{3}y=3x+z$，求证：$y^2 \geqslant 4xz$（当且仅当$6x=\sqrt{3}y=2z$时取等号）.

**证明** 由①，得

$(c+b-2a)^2=(2a-b-c)^2=[(a+c-2b)+(a+b-2c)]^2 \geqslant 4(a+c-2b)(a+b-2c)$（当且仅当$a+c-2b=a+b-2c$即$b=c$时取等号）.

**例2** （1983年瑞士数学竞赛题）设$a,b,c \in \mathbf{R}^+$，求证$abc \geqslant (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$（当且仅当$a=b=c$时取等号）.

**证明** 因为$a,b,c \in \mathbf{R}^+$，所以

若$b+c \leqslant a$，则$c+a>b, a+b>c$，此时要证结论成立.

同理当$c+a \leqslant b, a+b \leqslant c$时要证结论也成立.

下面再证$a+b>c$且$b+c>a$且$c+a>b$即$a,b,c$是某三角形三边长时成立，可用切线长代换获证，也可这样证得：

$$4a^2 = (2a)^2 = [(c+a-b)+(a+b-c)]^2 \geqslant 4(c+a-b)(a+b-c)$$

即 $a^2 \geqslant (c+a-b)(a+b-c)$(当且仅当 $b=c$ 时取等号)

同理 $b^2 \geqslant (a+b-c)(b+c-a)$(当且仅当 $c=a$ 时取等号)

$c^2 \geqslant (b+c-a)(c+a-b)$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)

三式相乘,即得要证结论成立.

## 参考文献

[1] 吕志新,孙建斌.巧用$(a+b)^2 \geqslant 4ab$证明不等式.中学数学,2002(6):24-26.

# 用二元均值不等式证 $n$ 元均值不等式

本文仅用二元均值不等式及数学归纳法证得 $n$ 元均值不等式.

**定理 1** 若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

**定理 1′** (二元均值不等式)若 $a,b$ 均是非负数,则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

**定理 2** ($n$ 元均值不等式)若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均是非负数,$n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$,则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

欲证定理 2,只需证明其等价的结论:

**定理 2′** 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均是非负数,$n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$, 则 $\sum_{i=1}^{n}a_i^n\geqslant n\prod_{i=1}^{n}a_i$(当且仅为 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

**证明** (1) 由定理 1 知 $n=2$ 时成立.

(2) 假设 $n<k(k\in\mathbf{N},k\geqslant 3)$ 时成立,下证 $n=k$ 时也成立.分两种情形:

① 若 $k$ 是偶数,设 $k=2l(l\in\mathbf{N},l\geqslant 2$,且 $l<k)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}a_i^k=\sum_{i=1}^{2l}a_i^{2l}=\sum_{i=1}^{l}a_i^{2l}+\sum_{i=l+1}^{2l}a_i^{2l}\geqslant\\ &l\prod_{i=1}^{l}a_i^2+l\prod_{i=l+1}^{2l}a_i^2(\text{因为 } l<k,\text{所以定理 2′ 在 } n=l \text{ 时成立})=\\ &l\Big[\Big(\prod_{i=1}^{l}a_i\Big)^2+\Big(\prod_{i=l+1}^{2l}a_i\Big)^2\Big]\geqslant\\ &l\cdot 2\prod_{i=1}^{l}a_i\cdot\prod_{i=l+1}^{2l}a_i(\text{用定理 1})=\\ &2l\cdot\prod_{i=1}^{2l}a_i=k\cdot\prod_{i=1}^{k}a_i\end{aligned}$$

即$\prod_{i=1}^{k}a_i^k\geqslant k\prod_{i=1}^{k}a_i$,其中等号当且仅当"$a_1=a_2=\cdots=a_l$ 且 $a_{l+1}=a_{l+2}=\cdots=a_{2l}$ 且$\prod_{i=1}^{l}a_i=\prod_{i=l+1}^{2l}a_i$"即"$a_1=a_2=\cdots=a_k$"时取等号.说明此时

“$n=k$ 时也成立”.

② 若 $k$ 是奇数,设 $k=2l-1(l\in\mathbf{N},l\geqslant 2$,且 $l<k)$.

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^k+\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{l}a_i^{2l-1}+(\sum_{i=l+1}^{2l-1}a_i^{2l-1}+\prod_{i=1}^{2l-1}a_i)\geqslant$$

$$l\sqrt[l]{\prod_{i=1}^{l}a_i^{2l-1}}+l\sqrt[l]{\prod_{i=l+1}^{2l-1}a_i^{2l-1}\cdot\prod_{i=1}^{2l-1}a_i}\text{(因为 } l<k\text{,所以定理 }2'\text{ 在 } n=l\text{ 时成立)}\geqslant$$

$$l\cdot 2\sqrt{\sqrt[l]{\prod_{i=1}^{l}a_i^{2l-1}}\cdot\sqrt[l]{\prod_{i=l+1}^{2l-1}a_i^{2l-1}\cdot\prod_{i=1}^{2l-1}a_i}}\text{(用定理 }1'\text{)}=$$

$$2l\prod_{i=1}^{2l-1}a_i=(k+1)\prod_{i=1}^{k}a_i$$

即 $\sum_{i=1}^{k}a_i^k+\prod_{i=1}^{k}a_i\geqslant(k+1)\prod_{i=1}^{k}a_i$,… 从而可得“$n=k$ 时也成立.”

由数学归纳法知定理 $2'$ 成立.

# 关于斜抛运动的另几个最值

## 1 斜抛运动及其最大射程

以初速度 $v_0$,抛射角 $\alpha(v_0>0, 0^\circ<\alpha\leqslant 90^\circ)$ 推出的铅球在不计空气阻力时的运动为斜抛运动(包括竖直上抛运动,如图1),其运动轨迹的参数方程为(以下 $x, y$ 分别表示铅球在 $t$ 时飞行的水平距离及铅直高度,$g$ 为重力加速度):

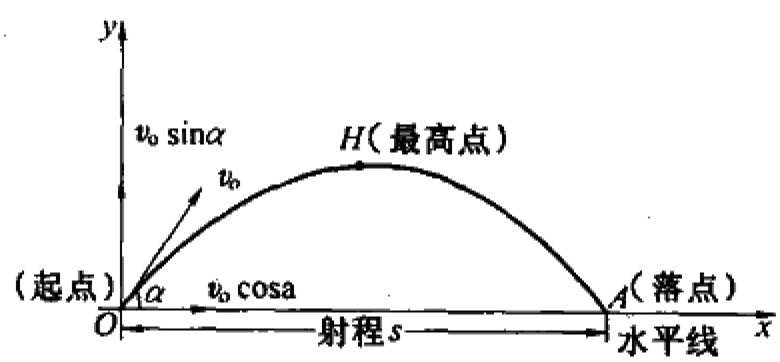



图 1

$$\begin{cases} y = v_0\cos\alpha\cdot t & ① \\ y = v_0\sin\alpha\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 & ② \end{cases}$$

在②中令 $y=0$,得 $t=0$ 或 $\dfrac{2}{g}v_0\sin\alpha$,所以在图1中的斜抛运动中时间参数 $t$ 的取值范围为

$$0\leqslant t\leqslant \frac{2}{g}v_0\sin\alpha \quad ③$$

由①,③得 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$,所以图1中铅球的射程为

$$s=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \quad ④$$

本文约定,在图1的斜抛运动中,初速度 $v_0$ 为常量,抛射角 $\alpha$ 为变量($0^\circ<\alpha\leqslant 90^\circ$).

由④,得

**定理1** 在图1的斜抛运动中,当且仅当 $\alpha=45^\circ$ 时,射程 $s$ 取到最大值,且最大值是 $\dfrac{v_0^2}{g}$.

该结论是众所周知的,通常把45°叫做斜抛运动和最佳抛射角.本文将再给出关于斜抛运动的另外几个最值.

## 2 轨迹与水平线围成的最大面积

用定积分[1]可求出图1中铅球运动的轨迹 $OHA$ 与水平线 $x$ 轴围成图形的面积为

$$S=\int_0^{\frac{2}{g}v_0\sin\alpha}|(v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2)(v_0\cos\alpha\cdot t)'|\,\mathrm{d}t=$$

$$v_0\cos\alpha\int_0^{\frac{2}{g}v_0\sin\alpha}(v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2)\mathrm{d}t=$$

$$v_0\cos\alpha(\frac{v_0}{2}\sin\alpha\cdot t^2-\frac{g}{6}t^3)\Big|_0^{\frac{2}{g}v_0\sin\alpha}=$$

$$\frac{2v_0^4}{3g^2}\sin^3\alpha\cos\alpha$$

又 $\sin^6\alpha\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt[4]{3}}\cdot\sqrt[4]{27}(1-\sin^2\alpha)\leqslant\left[\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt[4]{3}}\cdot 3+\sqrt[4]{27}\frac{(1-\sin^2\alpha)}{4}}{4}\right]^4=\frac{27}{256}$，当且仅当 $\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{27}(1-\sin^2\alpha)$ 即 $\alpha=60°$ 时取等号，

所以 $S\leqslant\frac{\sqrt{3}v_0^4}{8g^2}$(当且仅当 $\alpha=60°$ 时取等号)，即

**定理2** 在图1的斜抛运动中，当且仅当 $\alpha=60°$ 时，铅球运动的轨迹 $OHA$ 与水平线 $x$ 轴围成的面积取到最大值，且最大值是 $\frac{\sqrt{3}v_0^4}{8g^2}$.

## 3 轨迹的最大长度

当 $\alpha=90°$ 时，由①，②容易求得：在图1中铅球运动的轨迹 $OHA$ 的长度为 $\frac{v_0^2}{g}$.

当 $0°<\alpha<90°$ 时，用定积分[1]可求出在图1中铅球运动的轨迹 $OHA$ 的长度为

$$l=\int_0^{\frac{2}{g}v_0\sin\alpha}\sqrt{(v_0\cos\alpha\cdot t)'^2+(v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2)'^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{\frac{2}{g}v_0\sin\alpha}\sqrt{(gt-v_0\sin\alpha)^2+(v_0\cos\alpha)^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2g}\Big[(gt-v_0\sin\alpha)\sqrt{g^2t^2-2gv_0\sin\alpha\cdot t+v_0^2}+v_0^2\cos^2\alpha$$

$$\ln\left| gt - v_0\sin\alpha + \sqrt{g^2t^2 - 2gv_0\sin\alpha\cdot t + v_0^2}\right|\Big]\Big|_0^{\frac{2}{g}v_0\sin\alpha} =$$

$$\frac{v_0^2}{2g}\left(2\sin\alpha + \cos^2\alpha\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right) \quad ⑤$$

令 $f(\alpha) = 2\sin\alpha + \cos^2\alpha\ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}(0° < \alpha < 90°)$,得

$$f'(\alpha) = 2\cos\alpha\left(2 - \sin\alpha\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$$

令 $f'(\alpha) = 0$,得

$$\sin\alpha\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = 2(0° < \alpha < 90°) \quad ⑥$$

因为 $\sin\alpha, \ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ 的值均随 $\alpha(0° < \alpha < 90°)$ 的增加而严格增加,所以 $\sin\alpha\ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ 的值也随 $\alpha$ 的增加而严格增加,且其位域是 $(0, +\infty)$.

所以方程 ⑥ 有唯一解 $\alpha = \alpha_0$,笔者由计算器算得 $\alpha_0 \approx 56.5°$.

又 $\lim\limits_{\alpha\to(0°)^+} f(\alpha) = 0$, $\lim\limits_{\alpha\to(90°)^-} f(\alpha) = 2 + \lim\limits_{\alpha\to(90°)^-}\dfrac{\left(\ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)'}{(\sec^2\alpha)'} = 2 + \lim\limits_{\alpha\to(90°)^-}\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 2$,所以再由 ⑤ 得:当且仅当 $\alpha = \alpha_0$ 时 $l$ 取到最大值,即

**定理 3** 在图 1 的斜抛运动中,当且仅当 $\alpha = \alpha_0$($\alpha_0$ 是方程 ⑥ 的唯一解,$\alpha_0 \approx 56.5°$)时,铅球运动的轨迹 $OHA$ 的长度取到最大值,且最大值是 $\dfrac{v_0^2}{g\sin\alpha_0}$.

## 4 最大高度

由 ② 得,$y = -\dfrac{g}{2}\left(t - \dfrac{v_0}{g}\sin\alpha\right)^2 + \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$,所以有

**定理 4** 在图 1 的斜抛运动中,当且仅当 $\alpha = 90°$ 时,铅球的最大高度 $h$ 取到最大值,且最大值是 $\dfrac{v_0^2}{2g}$.

## 参考文献

[1] 罗元,等.数学分析简明教程(上册)[M].武汉:武汉工业大学出版社,1988.

# 也谈证明不等式

直接证明一个不等式不太容易时,可以考虑把它加强后再用数学归纳法去证明[1],但是怎么加强,加强到何种程度,也是很难的.文献[1]介绍了这方面的技巧,但本文给出文献[1]中前三个例题的常规证法(例4是先一般化后再证明,一般化是容易想到的).

**例1** 求证

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2(n\in\mathbf{N}^*) \qquad ①$$

文献[1]是先把命题加强为

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$$

再用数学归纳法证出的(这种加强也来源于下面的证明),而用通常的放缩也易证出:

当 $n=1$ 时,式①显然成立.

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$,所以

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1^2}+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=$$

$$2-\frac{1}{n}<2$$

此时式①也成立.

**例2** 已知 $0<a<1$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1+a$,$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a(n\in\mathbf{N}^*)$,求证 $a_n\geqslant 1$.

文献[1]是先把命题加强为

$$1<a_n<\frac{1}{1-a}$$

再用数学归纳法证出的.实际上,用步长为2的数学归纳法极易证得

$$a_n>1$$

(1)当 $n=1$ 时成立:$a_1=1+a>1$(因为 $a>0$).

当 $n=2$ 时成立:

$$a_2 = \frac{1}{a_1} + a = \frac{1}{1+a} + a = \frac{a^2+a+1}{1+a} > 1 \qquad ②$$

(2) 假设 $n = k(k \in \mathbf{N}^*)$ 时成立：$a_k > 1$，得

$$a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + a < a + 1$$

$a_{k+2} = \frac{1}{a_{k+1}} + a > \frac{1}{a+1} + a > 1$(见式 ② 的证明，也可用均值不等式得 $\frac{1}{a+1} + a + 1 > 2$)

由 $a_{k+2} > 1$ 知，$n = k + 2$ 时也成立. 所以要证结论成立.

**例 3** 设数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1(n \in \mathbf{N}^*)$. 当 $a_1 \geqslant 3$ 时，证明：

(1) $a_n \geqslant n + 2$；

(2) $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

易因数学归纳法证得(1) 成立(文献[1] 未证).

文献[1] 先用数学归纳法证得

$$a_n \geqslant 2^{n+1} - 1 \qquad ③$$

后再证(2). 怎么想到先证式 ③ 呢?而以下证法更自然：

由 $a_{n+1} = a_n(a_n - n) + 1$ 及(1)，得 $n \geqslant 2$ 时，有：

$$a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - n + 1) + 1 \geqslant a_{n-1}(n + 1 - n + 1) + 1 = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_{n+1} \geqslant 2(a_{n-1} + 1)(n \geqslant 2)$$

由此，得

$$a_{n+1} \geqslant 2(a_{n-1} + 1) \geqslant 2^2(a_{n-2} + 1) \geqslant \cdots \geqslant 2^{n-1}(a_1 + 1) \geqslant 2^{n+1}$$

$$a_n \geqslant 2^{n+1} - 1$$

后面的证法同文献[1].

## 参考文献

[1] 苏辉仙. 加强命题在证明不等式中的运用. 数学通讯，2006(8)：8-9.

# 一道求取值范围题的正确解法

有一份高三复习试卷的压轴题及其参考答案是:

22. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 6, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{CA}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ 成等比数列,求:

(1) $\triangle ABC$ 的面积 $S$ 的最大值;

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围.

**解**　设 $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{CA}|=b$, $|\overrightarrow{AB}|=c$,则 $a+b+c=6, b^2=ac$. 由余弦定理,得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$$

所以
$$0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$$

又 $b=\sqrt{ac}\leqslant\frac{a+c}{2}=\frac{6-b}{2}$,得 $0<b\leqslant 2$.

(1) 所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b^2\sin B\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,即 $S_{\max}=\sqrt{3}$.

(2) 所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=\frac{(a+c)^2-2ac-b^2}{2}=\frac{(6-b)^2-3b^2}{2}=27-(b+3)^2$

由 $0<b\leqslant 2$,得 $2\leqslant\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<18$,即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 $[2,18)$.

对于第(2)问的答案"$[2,18)$",笔者提出以下质疑:

由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos B$ 及 $ac=b^2$, $0<b\leqslant 2$, $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$,可得 $0<\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<4$,所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 $(0,4)$ 的一个子集. 原答案不对.

正确的解法是:

原解答已得

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=27-(b+3)^2 \qquad ①$$

欲求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围,需求 $b$ 的取值范围(原解答中认为 $b$ 的取值范围是 $(0,2]$ 不对:由 $a,b,c$ 成等比数列知 $a\geqslant b\geqslant c$ 或 $a\leqslant b\leqslant c$,由 $a,c$ 的对称性,可不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$(下同),若 $b\to 0$,则 $c\to 0$,则 $b+c\to 0$, $a\to b$,不能得到 $b+c>a$(三角形的两边之和大于第三边)).

$b$ 的取值范围由下式确定：$\begin{cases} a+b+c=6 \\ b^2=ac \\ a \geqslant b \geqslant c > 0 \\ b+c>a \end{cases}$

易得 $a$ 的取值范围是 $[2,3)$，且 $b$ 满足 $0<b\leqslant 2$.

得
$$b^2 = ac = a(6-a-b)$$
$$a^2+(b-6)a+b^2=0$$

题意即这个关系 $a$ 的一元二次方程在 $[2,3)$ 上至少有一根. 又 $a = \frac{6-b\pm\sqrt{3b^2-12b+36}}{2}$（因为 $2a+b\geqslant 6$，所以"±"中选"+"），得

$$4 \leqslant 6-b+\sqrt{-3b^2-12b+36} < 6$$

又由 $0<b\leqslant 2$，得 $b>\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$，所以 $b$ 的取值范围是 $(\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1),2]$. 再由式①可得 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 $[2,\frac{9}{2}(3-\sqrt{5}))$.

读者还可得到第(1)问中 $S$ 的取值范围是 $(0,\sqrt{3}]$，当且仅当 $b\to\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$ 时（此时 $a\to 3, c\to\frac{3}{2}(3-\sqrt{5})$，得 $b+c\to a, B\to 0$），$S\to 0$.

# 谈谈加权平均值不等式

## 1 几处文献中的最值结论及问题

**结论 1**[1] 设 $x_i \in \mathbf{R}^+, m_i \in \mathbf{Q}^+ \ (i = 1,2,\cdots,n)$.

(1) 若 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 为定值,则当且仅当 $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \cdots = \frac{x_n}{m_n}$ 时, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{m_i}$ 取到最大值;

(2) 若 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 为定值,则当且仅当 $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \cdots = \frac{x_n}{m_n}$ 时, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{m_i}$ 取到最小值.

**结论 2**[2] 设函数 $y = \sin^m\cos^n x(0 < x < \frac{\pi}{2})$,则

(1) 当 $m,n \in \mathbf{Q}^+$ 时,当且仅为 $x = \arctan\sqrt{\frac{m}{n}}$ 时 $y$ 取到最大值;

(2) 当 $m,n \in \mathbf{Q}^-$ 时,当且仅为 $x = \arctan\sqrt{\frac{m}{n}}$ 时 $y$ 取到最小值.

**结论 3**[3] 已知 $x_i, a_i \in \mathbf{R}^+ \ (i = 1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = k, m \in \mathbf{Q}$,则

(1) 当 $m > 1$ 或 $m < 0$ 时, $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^m \geqslant k^m(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-m}})^{1-m}$;

(2) 当 $0 < m < 1$ 时, $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^m \leqslant k^m(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-m}})^{1-m}$.

**问题 1**[4] 若 $x > 0$ 时, $x + \frac{a}{x^n} \geqslant n + 1(n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立,求 $a$ 的最小值.

能把结论 1,2,3 中的"$\mathbf{Q}^+$","$\mathbf{Q}$","$\mathbf{Q}^+$","$\mathbf{Q}^-$"分别改为"$\mathbf{R}^+$","$\mathbf{R}$","$\mathbf{Q}^+$","$\mathbf{Q}^-$"?问题 1 中的"$\mathbf{N}^*$"改为"$\mathbf{R}^+$"后又如何求?

## 2 加权平均值不等式

众所周知, $n$ 个非负数的算术平均数不小于它们的几何平均数,即

**平均值不等式** 设 $a_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$,则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$,也即

$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

该不等式还有以下特殊形式,实际上也是推广形式:

设 $a_i \geqslant 0, \alpha_i \in \mathbf{N}^*(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n \geqslant (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)(a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

并且把这个结论中的"$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$"改为"$\alpha_i \in \mathbf{Q}^+$",所得结论也成立.

**证明** 因为 $\alpha_i \in \mathbf{Q}^+$,所以存在 $A \in \mathbf{N}^*$ 使 $A\alpha_i \in \mathbf{N}^*(i=1,2,\cdots,n)$,得 $A\alpha_1 \cdot a_1 + A\alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + A\alpha_n \cdot a_n \geqslant (A\alpha_1+A\alpha_2+\cdots+A\alpha_n)(a_1^{A\alpha_1}a_2^{A\alpha_2}\cdots a_n^{A\alpha_n})^{\frac{1}{A\alpha_1+A\alpha_2+\cdots+A\alpha_n}}$

从而可得要证结论成立.

试问:还能再把"$a_i \in \mathbf{Q}^+$"改为"$\alpha_i \in \mathbf{R}^+$"吗?这就是

**加权平均值不等式** 若 $a_i \geqslant 0, \alpha_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_ia_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i}\right)^{1/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

若运用有理数逼近无理数的方法可证得以上不等式成立,但不能证得"(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号)".为证明加权平均值不等式,须先介绍高中数学竞赛中常用的

**Jensen 不等式**[5] 若 $f(x)$ 为区间 $I$ 内的上(下)凸函数,则对于任意的 $x_i \in I$ 及 $\lambda_i \in \mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, 必有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right) \geqslant (\leqslant) \sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号).

**加权平均值不等式的证明** 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 0 时显然成立.下证 $a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+$ 时成立.

因为 $f(x)=\ln x$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的上凸函数,所以可在 Jensen 不等式中令 $x_i=a_i, \lambda_i=\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}(i=1,2,\cdots,n), f(x)=\ln x, I=\mathbf{R}^+$,得

$$\ln\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_ia_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln a_i^{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\text{(当且仅当 } a_1=a_2=\cdots=a_n \text{ 时取等号)}$$

从而可得要证结论成立.

在加权平均值不等式中令 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1$,便得平均值不等式.

运用加权平均值不等式,得

把结论 1[1] 中的"$Q^+$"改为"$R^+$";结论 2[2] 中"$Q^+$","$Q^-$"分别改为"$R^+$","$R^-$";结论 3[3] 中的"Q"改为"R"后,所得结论均成立,且证法均同原文的证明,但要用到加权平均值不等式(原文的证明均同上文把"$\alpha_i \in N^*$"改为"$\alpha_i \in Q^+$"的证明),并且改进后的结论 2 中两个不等式中的等号均当且仅当 $x_1 : x_2 : \cdots : x_n = (a_1 : a_2 : \cdots : a_n)^{\frac{1}{1-m}}$ 时取等号.

还可再把结论 1 推广为

**定理 1** 设 $x_i \geqslant 0, a_i > 0, m_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$.

(1) 若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 为定值,则当且仅当 $\frac{a_1 x_1}{m_1} = \frac{a_2 x_2}{m_2} = \cdots = \frac{a_n x_n}{m_n}$ 时,$\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}$ 取到最大值;

(2) 若 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}$ 为定值,则当且仅当 $\frac{a_1 x_1}{m_1} = \frac{a_2 x_2}{m_2} = \cdots = \frac{a_n x_n}{m_n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 取到最小值.

下面再来用加权平均值不等式解决.

**问题 1′** 若 $x > 0$ 时,$x + \frac{a}{x^n} = n + 1 (n \in R^+)$ 恒成立,求 $a$ 的最小值.

**解** 设 $f(x) = x + \frac{a}{x^n}$.

当 $a = 0$ 时,$f(x) = x$ 无最小值.

当 $a < 0$ 时,$f(x) = x - \frac{-a}{x^n}$,当 $x \to 0^+$ 时,$f(x) \to -\infty$,此时 $f(x)$ 也无最小值.

所以所求常数 $a > 0$. 当 $a > 0$ 时,$f(x) = \frac{x}{n} \cdot n + \frac{a}{x^n} \geqslant (n+1)\left[\left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot \frac{a}{x^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$(当且仅当 $\frac{x}{n} = \frac{a}{x^n}$ 即 $x = (an)^{\frac{1}{n+1}}$ 时取等号)$= (n+1)\left(\frac{a}{n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

即
$$[f(x)]_{\min} = (n+1)(an^{-n})^{\frac{1}{n+1}}$$

又由题意,得 $[f(x)]_{\min} \geqslant n + 1$,从而可得 $a \geqslant n^n$,即 $a$ 的最小值是 $n^n$.

Hölder 不等式[6] 也可用加权平均值不等式证得,文献[7] 中的结论也可从"N"向"$R^+$"推广.

## 3 又一个问题的解决

文献[8] 末提出尚未解决的

**问题 2** 求函数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^j+\sum_{j=1}^{p}\frac{k}{(\sum_{j=1}^{n}x_i)^j}(k>0,$ $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+)$ 的最值.

在问题2中,因为$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号),又设$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=x$,得问题2等价于(因为 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 无上界):

**问题 3** 求函数 $h(x)=\sum_{j=1}^{m}n^jx^j+\sum_{j=1}^{p}\frac{k}{x^{nj}}(n\in\mathbf{N}^*,k>0,x\in\mathbf{R}^+)$ 的最小值.

用加权平均值不等式可解决问题3,但有时会遇到解一元高次方程的难题.

**解** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_p$ 是待定的实常数,有

$$\begin{aligned}h(x)=&a_1\cdot\frac{nx}{a_1}+a_2\cdot\frac{(nx)^2}{a_2}+\cdots+a_m\cdot\frac{(nx)^m}{a_m}+b_1\cdot\frac{k}{b_1x^n}+\\&b_2\cdot\frac{k}{b_2x^{2n}}+\cdots+b_p\cdot\frac{k}{b_px^{pn}}\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_p)\\&[(\frac{n}{a_1})^{a_1}(\frac{n^2}{a_2})^{a_2}\cdots(\frac{n^m}{a_m})^{a_m}(\frac{k}{b_1})^{b_1}(\frac{k}{b_2})^{b_2}\cdots(\frac{k}{b_p})^{b_p}\cdot\\&x^{(a_1+2a_2+\cdots+ma_m-n(b_1+2b_2+\cdots+pb_p))}]^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}a_j+\sum_{j=1}^{p}b_j}}\end{aligned}$$

对照加权平均值不等式,应令

$$\begin{cases}a_1+2a_2+\cdots+ma_m=n(b_1+2b_2+\cdots+pb_p)\\\frac{nx}{a_1}=\frac{(nx)^2}{a_2}=\cdots=\frac{(nx)^m}{a_m}=\frac{k}{b_1x^n}=\frac{k}{b_2x^{2n}}=\cdots=\frac{k}{b_px^{pn}}\end{cases}$$

可选 $a_i=(nx)^i(i=1,2,\cdots,m),b_j=kx^{-jn}(j=1,2,\cdots,p)$,得

$$nx+2(nx)^2+\cdots+m(nx)^m=kn(x^{-n}+2x^{-2n}+\cdots+px^{-pn})(k>0,n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}^+)\quad①$$

**定理 2** 若 $x_0$ 是方程 ① 的解,则问题3中函数的最小值是 $h(x_0)$(当且仅当 $x=x_0$ 时取到最小值),问题2中函数的最小值是 $g(x_0,x_0,\cdots,x_0)$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x_0$ 时取到最小值).

顺便再指出:

文献[8]第6节中说函数 $f(x_1,x_2)=x_1x_2+\frac{k}{x_1+x_2}(x_1,x_2\in\mathbf{R}^+,k>0)$ 和函数 $(x_1x_2\cdots x_n)^p+k(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{-q}(p,q\in\mathbf{N}^*,k$ 是正常数,$x_1,$

$x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$)的值域均是$(1,+\infty)$,这均不正确,它们的值域均是$\mathbf{R}^+$,以前者为例说明如下:

把$x_1$固定,当$x_2\to 0^+$时,$f(x_1,x_2)\to\frac{k}{x_1}$,因为$x_1$的值域是$\mathbf{R}^+$,所以$\frac{k}{x_1}$,$f(x_1,x_2)$的值域均是$\mathbf{R}^+$.

文献[8]末还提出了尚未解决的

**问题4** 求函数$\sum\limits_{j=1}^{m}(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i)^j+\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{k}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^j}$($k>0,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$)的值域.

把$x_1$固定下来,令$x_i\to 0^+$ ($i=2,3,\cdots,n$),可证得

**定理3** 问题4中函数的值域是$\mathbf{R}^+$.

文献[8]是用$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^p$的展开式来解答1～5节中所有最小值的,挺繁琐,若改用以上方法均可变得简洁.且文献[8]第5节中两处关于"无最小值"的结论均是错误的(在第30页).文献[8]第1节末的最小值"$(2^n+n\cdot 2^{n-1})\cdot\sqrt[(2^n+n\cdot 2^{n-1})]{(\frac{k}{n\cdot 2^{n-1}})^{n\cdot 2^{n-1}}}$"应简化为"$(4n+8)\cdot\sqrt[n+2]{\frac{1}{64}(\frac{k}{n})^n}$";文献[8]第3节第三个最小值"$(n^m+mn^{m-1})\cdot\sqrt[(n^m+mn^{m-1})]{(\frac{k}{mn^{m-1}})^{mn^{m-1}}}$"应简化为"$(m+n)n^n\cdot\sqrt[m+n]{n^{-n^2-n}(\frac{k}{m})^m}$".文献[8]第30页右栏③中的"$(p\cdot n^{p-1})^e=q$"应改为"$(p\cdot n^{p-1})^e=q$".

## 参考文献


[1] 四川数学会.方程与不等式[M].成都:四川教育出版社,1984.

[2] 周晓.关于函数$f(x)=\sin^m x\cos^n x$的最值[J].数学通讯,1995(6):13-15.

[3] 黎发兵.一类条件不等式的"根"[J].数学通讯,2002(15):36-37.

[4] 姜达荣.课堂教学中如何实施研究性学习[J].数学通讯,2004(1):9-11.

[5] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993.

[6] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲(修订版)[M].北京:高等教育出版社,1983.

[7] 王富英.一道最值习题的推广及应用[J].数学通讯,2001(15):11-12.

[8] 刘小满.例说通过联想类比开发数学问题[J].数学通报,2003(2):27-29.

# 排序不等式的数学归纳法证明

文献[1]介绍了排序不等式(又称排序原理)：

若 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$(顺序和) $\geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{l_i}$(乱序和) $\geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$(逆序和). 其中 $l_1 \cdots l_n$ 是 $1 \cdots n$ 的任一排列. 当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$ 时等号成立(对任一排列 $l_1 \cdots l_n$).

首先，我们指出，结论中等号成立的条件"$a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$"不必要，因而文献[1]关于此的证明及平均不等式的证明均有误.

选 $a_1 = \cdots = a_{n-1} < a_n, b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$(且不全相等)，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{l_i}$ $(l_n = n)$，其中 $l_1 \cdots l_{n-1}$ 是 $1 \cdots (n-1)$ 的任一排列，此时，顺序和 = 乱序和，但"$a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$"不成立.

排序不等式中三个和式的大小关系正确，但文献[1]的证明不易理解. 下面的证明，读者是清楚明白的.

先用数学归纳法证明"顺序和 $\geqslant$ 乱序和".

即证：若 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则 $k = 2, 3, \cdots, n$ 时，均有 $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} a_i b_{l_i}$. 其中 $l_1 \cdots l_k$ 是 $1 \cdots k$ 的任一排列.

因为 $a_1 \leqslant a_2, b_1 \leqslant b_2$，所以

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqslant 0$$

即

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_1 \quad ①$$

得 $k = 2$ 时成立.

假设 $k$ 时成立，即

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} a_i b_{l_i} (l_1 \cdots l_k \text{ 是 } 1 \cdots k \text{ 的任一排列}) \quad ②$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} a_i b_{l_i} + a_{k+1} b_{k+1} \quad ③$$

设 $t \in \{1,\cdots,k\}$,则 $l_t \in \{l_1,\cdots,l_k\} = \{1,\cdots,k\}$,所以 $a_t \leqslant a_{k+1}, b_{l_t} \leqslant b_{k+1}$,由①得 $a_tb_{lt} + a_{k+1}b_{k+1} \geqslant a_tb_{k+1} + a_{k+1}b_{l_t}$,所以

$$a_1b_{l_1} + \cdots + a_{t-1}b_{l_{t-1}} + a_tb_{l_t} + a_{t+1}b_{l_{t+1}} + \cdots + a_kb_{l_k} + a_{k+1}b_{l_{k+1}} \geqslant$$

$$a_1b_{l_1} + \cdots + a_{t-1}bl_{t-1} + a_tb_{k+1} + a_{t+1}b_{l_{t+1}} + \cdots + a_kb_{l_k} + a_{k+1}b_{l_t} \qquad ④$$

因为 $l_1\cdots l_k$ 是 $1\cdots k$ 的任一排列,所以 $l_1\cdots l_k(k+1)$ 和 $l_1\cdots l_{t-1}(k+1)l_{t+1}\cdots l_kl_t(t = 1,\cdots,k)$ 可表 $1\cdots(k+1)$ 的任一排列,所以由③,④得 $k+1$ 时成立,顺序和 $\geqslant$ 乱序和!

再证"乱序和 $\geqslant$ 逆序和".

用以上证得的"顺序和 $\geqslant$ 乱序和",可得

$$a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n, -b_n \leqslant \cdots \leqslant -b_1$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(-b_{n+1-i}) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(-b_{l_i})$($l_1\cdots l_n$ 是 $1\cdots n$ 的任一排列),即

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_{l_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_{n+1-i}$$

证得"乱序和 $\geqslant$ 逆序和".

由两个数组 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,可组成 $n!$ 个形如 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_{l_i}$ 的和($l_1\cdots l_n$ 是 $1\cdots n$ 的任一排列),排序不等式已指出顺序和最大,逆序和最小,我们自然还会问:能否确定出这 $n!$ 个和式的大小关系呢?由下例看到:对于一般的情形,它们没有固定的大小关系.

设 $A = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2, B = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3$.选 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.

$b_1 = 5, b_2 = 6, b_3 = 7$ 时,$A = B$;

$b_1 = 5, b_2 = 6, b_3 = 8$ 时,$A < B$;

$b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 8$ 时,$A > B$.

但下面的不等式显然成立

$$\sum_{i=1}^{t} a_ib_{l_i} + \sum_{i=t+1}^{n} a_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_{l_i} \geqslant \sum_{i=1}^{t} a_ib_{l_i} + \sum_{i=t+1}^{n} a_ib_{n+t+1-i}$$

其中 $l_1\cdots l_t$ 是 $1\cdots t$ 的任一排列,$l_{t+1}\cdots l_n$ 是 $(t+1)\cdots n$ 的任一排列,$t = 1,\cdots,n-1$.

## 参考文献

[1] 常庚哲,李炯生.高中数学竞赛教程[M].南京:江苏教育出版社,1989:110-113.

# 对一道中考题的深入研究

## —— 平行四边形各顶点的斯坦纳最小树

## 1　一道中考题

2000年湖北省黄冈市有如下一道中考题(见《中学数学月刊》2001年第5期第19页):

国家电力总公司为了改善农村用电电费过高的现状,目前已在全国各地农村进行电网改造.莲花村六组有四个村庄 $A,B,C,D$ 正好位于一个正方形的四个顶点,现计划在四个村庄联合架设一条线路.他们设计了四种架设方案,如图1中的实线部分,请你帮助计算一下,哪种架设方案最省电线.(以下数据可供参考:$\sqrt{2}\approx 1.414$,$\sqrt{3}\approx 1.732$,$\sqrt{5}\approx 2.236$)

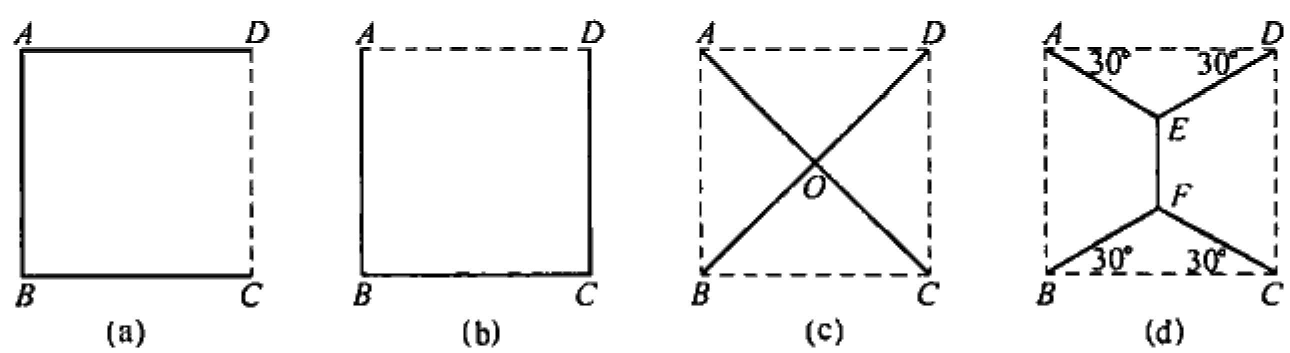



图1

答案是第四种架设方案.本题的背景是图论中的"斯坦纳(Steiner)树问题",文献[1]较详细的论述了该问题,本文将在文献[1]的基础上给出平行四边形各顶点的斯坦纳最小树(即连接平行四边形各顶点的最短网络).

请读者注意,本文中未证明的引理、性质均可在文献[1]中找到;斯坦纳树都是在平面上讨论的,因而下文中不再注明"同一平面上"的条件.

## 2　斯坦纳树问题

### 2.1　费马问题

1640年,法国数学家费马(Fermat,1601—1665)提出如下问题:给出不共线三点 $A,B,C$,求一点 $P$,使 $PA+PB+PC$ 最小.通常把这样的点 $P$ 叫做 $\triangle ABC$ 的费马点.

**引理 1** 设点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的费马点,则

(1) 若 $\triangle ABC$ 的内角均小于 $120°$,则 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$(可证点 $P$ 存在且唯一,且在 $\triangle ABC$ 内).

(2) 若 $\triangle ABC$ 有一个内角不小于 $120°$,则点 $P$ 为 $\triangle ABC$ 的最大内角顶点.

设点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的费马点,本文记 $F(A,B,C) = P$,$f(A,B,C) = PA + PB + PC$.

**引理 2** 用 $A,B,C$ 表示 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的度数,$BC = a$,$AC = b$,$AB = c$,则

$$f(A,B,C) = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin(C - 30°)} & (A,B,C\text{ 均小于 }120°) \\ b + c & (A \geqslant 120°) \\ a + c & (B \geqslant 120°) \\ a + b & (C \geqslant 120°) \end{cases}$$

## 2.2 斯坦纳树问题

给出 $n(n \geqslant 3)$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,求出一组连通的线段(叫做网络),使各线段长度之和最短,且每两点 $A_i,A_j(i \neq j,i,j = 1,2,\cdots,n)$ 都可用该组中的线段连接起来.这个问题就叫做斯坦纳树问题,问题的解称为斯坦纳最小树.

在斯坦纳最小树中,线段叫做边;若点 $S$ 是几条边的公共端点,且 $S$ 不是点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则 $S$ 叫做斯坦纳点;有公共端点的两边组成的图形叫做角(其度数限定在$[0°,180°]$范围内);所有边的和叫做网程.

**引理 3** $n$ 个点的斯坦纳最小树至多有$(n - 2)$个斯坦纳点.

斯坦纳树问题是费马问题的推广,在 19 世纪初任教于柏林大学的斯坦纳只是提出过该问题,对此却没作出任何贡献.德国数学家高斯(Gauss,1777—1855)研究了四点的斯坦纳最小树,可能连接的方式有 31 种(四类),读者可见文献[1].

斯坦纳最小树有三个重要性质:

**性质 1** 斯坦纳最小树的角不小于 $120°$.

**性质 2** 斯坦纳最小树在斯坦纳点处有且仅有三条边且这三条边平分周角.

**性质 3** 斯坦纳最小树中不存在相互交叉的两边(指不能形成对顶角的形状).

**引理 4** 三点的斯坦纳树有且只有一棵,四点的斯坦纳树有一棵或两棵.

# 3 平行四边形各顶点的斯坦纳最小树

本大节中所述平行四边形均指 $\square ABCD$,其中 $AB = a$,$BC = b$,$a \leqslant b$,

$A \leqslant 90°$.

### 3.1 引理

**引理 5** 若平行四边形各顶点的斯坦纳最小树没有斯坦纳点，则网程为 $L_1 = 2a + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos A}$，此时必有 $\angle ABD \geqslant 120°$，斯坦纳最小树为图 2(c).

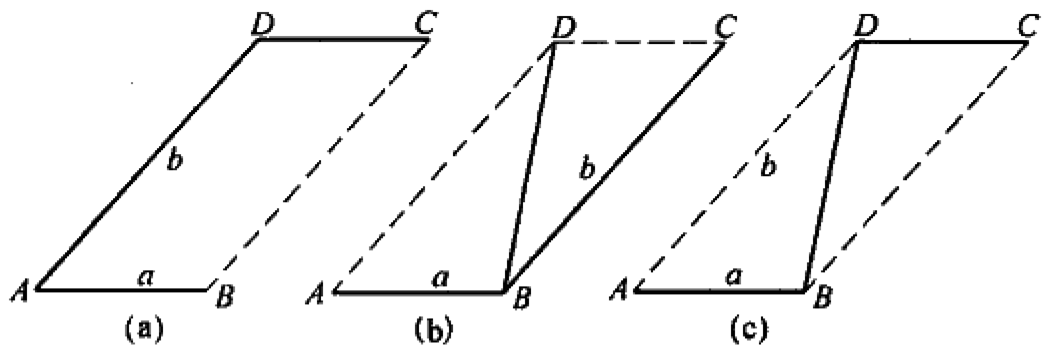



图 2

**证明** 由题设及 $A \leqslant 90°$，$a \leqslant b$，性质 1 知，只有图 2(c) 才可能是斯坦纳最小树（由性质 1 知，图 2(a)，(b) 之类不可能是斯坦纳最小树）.

图 2(c) 的网程为 $L_1 = 2a + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos A}$. 由性质 1 知，此时必有 $\angle ABD \geqslant 120°$，所以引理 5 成立.

**引理 6** 若平行四边形各顶点的斯坦纳最小树有且仅有一个斯坦纳点，则网程为 $L_2 = a + \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin(A - 30°)}$. 此时必有 $A < 90°$，$a < b$，斯坦纳最小树为图 3(c)，(d).

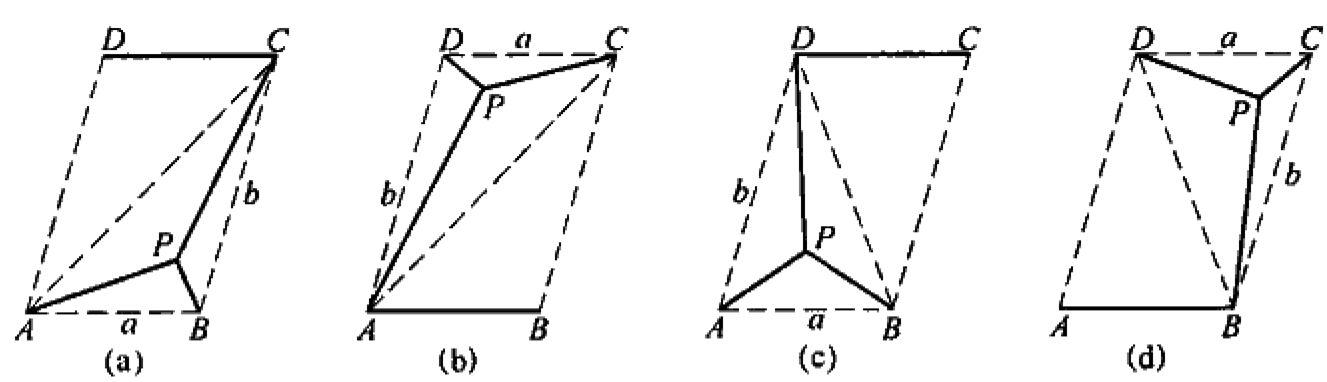



图 3

**证明** 先证 $a < b$ 时成立.

由题设及 $a < b$，性质 2 知，只有图 3 的四种情形才可能是斯坦纳最小树. 其中点 $P$ 是它所在三角形的费马点. 又点 $P$ 还是斯坦纳点，所以点 $P$ 在它所在三角形内.

由引理 2 知，图 3(a)，(b) 的网程为 $L'_2 = a + \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin(A + 30°)}$，图 3(c)，(d) 的网程为 $L_2 = a + \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin(A - 30°)}$.

由 $0° < A \leqslant 90°$ 可证得 $L'_2 \geqslant L_2$(当且仅当 $A = 90°$ 时取等号).若 $A = 90°$,则图3的四种情形都是斯坦纳最小树,这与引理4矛盾,所以当 $a < b$ 时引理6成立.

再看 $a = b$ 时的情形.此时有八种可能的斯坦纳最小树(另四种分别类似于图3的四种情形),同上证明可得此时有四棵斯坦纳最小树,不可能!所以引理6成立.

**引理7** 若平行四边形各顶点的斯坦纳最小树有且仅有两个斯坦纳点,则网程为 $L_3 = \sqrt{3a^2 + b^2 + 2\sqrt{3}ab\sin A}$,并且:

(1) 当 $a < b$ 时,只有一棵斯坦纳最小树(图4(a),其中点 $O$ 是 $AC$ 与 $BD$ 的交点,$E = F(O,C,D)$,$G = F(O,A,B)$);

(2) 当 $a = b$ 时,有两棵斯坦纳最小树(图4(c),(d),$O,E,G$ 的意义同上).

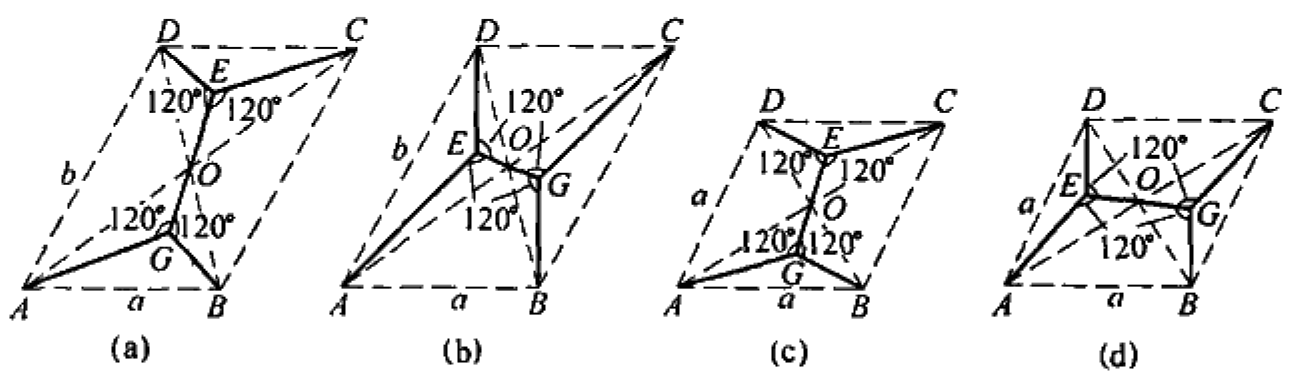



图4

**证明** 由题设及性质2,3知,只有图4(a),(b)的两种情形才可能是斯坦纳最小树.

先看图4(a)的情形.

显然 $E = F(C,D,G)$,$G = F(A,B,E)$,所以

$$\angle AGE = \angle BGE = \angle DEG = \angle CEG = 120°, AG \parallel CE$$

$$\angle BAG = \angle BAD - \angle DAC - \angle CAG = \angle BCD - \angle BCA - \angle ACE = \angle DCE$$

又 $\angle AGB = \angle CED = 120°$,$AB = CD = a$,所以 $\triangle ABG \cong \triangle CDE$.

设 $AC$,$BD$ 交于点 $O$.因为 $\angle EOC = 60° - \angle ECO = 60° - \angle GAO = \angle GOA$,所以 $E,O,G$ 共线,因而图4(a)的实线是斯坦纳最小树,且网程为 $2f(O,A,B)$.

可以证得

$$\sin\angle BAC = \frac{b\sin A}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}}, \cos\angle BAC = \frac{a + b\cos A}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}}$$

所以
$$\sin(\angle BAC - 30°) = \frac{\sqrt{3}b\sin A - b\cos A - a}{2\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}}$$

由引理2得网程为

$$2f(O,A,B)=\sqrt{3a^2+b^2+2\sqrt{3}ab\sin A}$$

再看图 4(b) 的情形. 此时若是斯坦纳最小树, 由以上研究知网程为 $\sqrt{a^2+3b^2+2\sqrt{3}ab\sin A}$. 又由 $a\leqslant b$ 知,当且仅当 $a=b$ 时图 4(b) 才是斯坦纳最小树,从而有引理 7 成立.

3.2　结论

**定理**　(1) 当 $\cos A\geqslant\dfrac{3a+\sqrt{4b^2-3a^2}}{4b}$(即 $\angle ABD\geqslant 120°$) 时,平行四边形各顶点的斯坦纳最小树为图 2(c),网程为 $2a+\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos A}$.

(2) 当 $\cos A<\dfrac{3a+\sqrt{4b^2-3a^2}}{4b}$(即 $\angle ABD<120°$) 时:

① 若又 $a<b$,平行四边形各顶点的斯坦纳最小树为图 4(a)(其中点 $O$, $E$, $G$ 的意义见引理 7),网程为$\sqrt{3a^2+b^2+2\sqrt{3}ab\sin A}$;

② 若又 $a=b$,平行四边形(即菱形) 各顶点的斯坦纳最小树为图 4(c),(d)(其中点 $O,E,G$ 的意义同上),网程为 $a\sqrt{4+2\sqrt{3}\sin A}$.

**证明**　由引理 5,6,7 知,网程只可能是:

$L_1=2a+\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos A}$(图 2(c));

$L_2=a+\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(A-30°)}$(图 3(c),(d));

$L_3=\sqrt{3a^2+b^2+2\sqrt{3}ab\sin A}$(当 $a<b$ 时,见图 4(a);当 $a=b$,时见图 4(c),(d)).

由费马点的意义及作法(见引理 1) 知:当 $\angle ABD\geqslant 120°$ 时,网程为 $L_1$;当 $\angle ABD<120°$ 时,网程为 $L_2$ 或 $L_3$.

(1) 在图 2(c) 中可证得 $\cos\angle ABD=\dfrac{a-b\cos A}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos A}}$,所以在 $\triangle ABD$ 中,有

$$\angle ABD\geqslant 120°\Leftrightarrow\cos\angle ABD\leqslant-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$2(b\cos A-a)\geqslant\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos A}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}b\cos A\geqslant a\\4(b\cos A-a)^2\geqslant a^2+b^2-2ab\cos A\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}b\cos A\geqslant a\\(2b\cos A-\frac{3}{2}a)^2\geqslant b^2-\frac{3}{4}a^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\cos A \geqslant \frac{3a+\sqrt{4b^2-3a^2}}{4b}$$

所以结论(1) 成立.

(2) 当 $\cos A < \frac{3a+\sqrt{4b^2-3a^2}}{4b}$(即 $\angle ABD < 120°$) 时,网程为 $L_2$ 或 $L_3$. 下证 $L_2 > L_3$.

$L_2 > L_3 \Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(A-30°)} > \sqrt{3a^2+b^2+2\sqrt{3}ab\sin A} \Leftrightarrow$

$$a+2b\sin(A+30°) < 2\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(A-30°)} \Leftrightarrow$$

$$[2b\cos(A+30°)-\sqrt{3}a]^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos(A+30°) \neq \frac{\sqrt{3}a}{2b} \Leftrightarrow$$

$$\cos A \neq \frac{3a+\sqrt{4b^2-3a^2}}{4b}(\text{因为 } 0° < A \leqslant 90°)$$

所以结论(2) 也成立.

**推论** (1) 长为 $b$ 宽为 $a(a<b)$ 的矩形各顶点的斯坦纳最小树为图 5(b),网程为 $\sqrt{3a^2+b^2+2\sqrt{3}ab}$.

(2) 边长为 $a$ 的正方形各顶点的斯坦纳最小树为图 6,网程为 $(\sqrt{3}+1)a$.

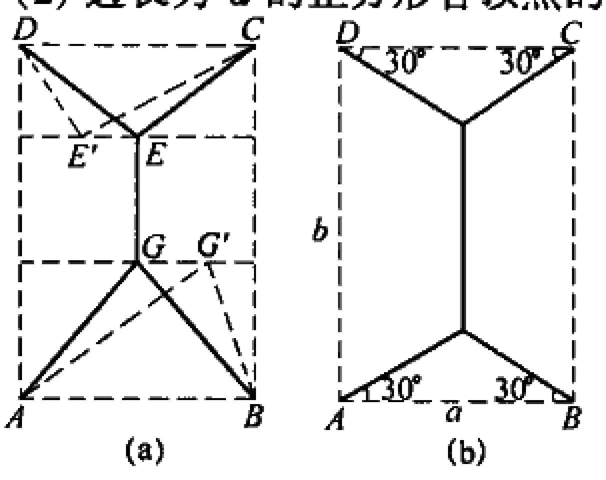



图 5

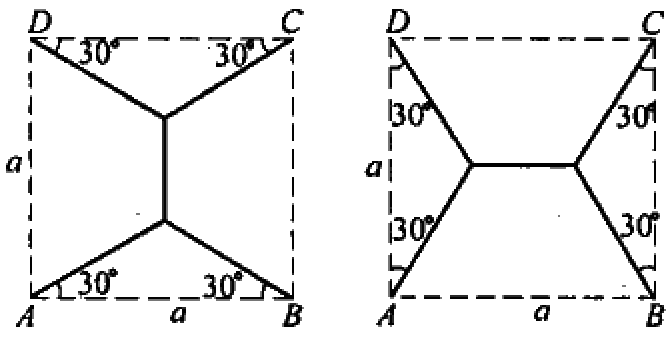



图 6

**证明** 由定理知,只有图 5(a) 的实线才可能是矩形各顶点的斯坦纳最小树.

由文献[2] 的结论"同底等高的所有三角形中等腰三角形的周长最小" 可得:在图 5(a) 中,若实线是 $A,B,C,D$ 的斯坦纳最小树,则 $EC = ED, GA = GB$. 又因为 $\angle DEC = \angle AGB = 120°$,所以 $\angle EDC = \angle ECD = \angle GAB = \angle GBA = 30°$,因而得图 5(b) 的作法,进而有推论成立.

# 参考文献

[1] 堵丁柱. 谈谈斯坦纳树[J]. 数学通报,1995(1):25-30.

[2] RICHARD C, HERBERT R. 数学是什么[M]. 汪浩,朱煜民,译. 长沙:湖南教育出版社,1985:355.

# 一个不等式的多方位推广

**不等式** 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，$a+b=1$，则 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$（当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号）.

本文将推广该不等式.

**定理** 若 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{a}{x_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n a^{\frac{n^3}{1+n^2}}n^{\frac{n-n^3}{1+n^2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}\geqslant(n+\frac{1}{n})^n a^{\frac{n^3}{1+n^2}}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{\frac{n-n^3}{1+n^2}}$（两个等号均当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{\sqrt{a}}{n}$ 时取等号）.

**证明** 
$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{a}{x_i})=\prod_{i=1}^{n}(x_i+\underbrace{\frac{a}{n^2x_i}+\cdots+\frac{a}{n^2x_i}}_{n^2\text{个}\frac{a}{n^2x_i}})\geqslant$$
$$\prod_{i=1}^{n}(n^2+1)\sqrt[n^2+1]{(\frac{a}{n^2})^{n^2}\cdot(\frac{1}{x_i})^{n^2-1}}$$
（当且仅当 $x_i=\frac{a}{n^2x_i}$，即

$x_i=\frac{\sqrt{a}}{n}(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号）=
$$\prod_{i=1}^{n}(n+\frac{1}{n})n^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}a^{\frac{n^2}{1+n^2}}(\frac{1}{x_i})^{\frac{n^2-1}{n^2+1}}=$$
$$(n+\frac{1}{n})^n n^{\frac{n-n^3}{1+n^2}}a^{\frac{n^3}{1+n^2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}\geqslant$$
$$(n+\frac{1}{n})^n n^{\frac{n-n^3}{1+n^2}}a^{\frac{n^3}{1+n^2}}(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^{n\cdot\frac{1-n^2}{1+n^2}}$$
（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号）=
$$(n+\frac{1}{n})^n a^{\frac{n^3}{1+n^2}}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{\frac{n-n^3}{1+n^2}}$$

**推论** 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $\prod_{i=1}^{n}x_i=1$，则 $\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时取等号）.

# 对一个不等式推广的再认识

文献[1],[2] 均证明了如下不等式:

若 $a > \frac{1}{3}, b > \frac{1}{3}, ab = \frac{2}{9}$,则 $a + b < 1$.

文献[3] 把它推广为:

若 $a_i > \frac{1}{n+1}(i = 1,2,\cdots,n; n \geqslant 2), a_1a_2\cdots a_n = \frac{2}{(n+1)^n}$,则

$$\frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i < 1 \quad ①$$

不等式 ① 的左边是由平均值不等式得到的,当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n+1}$ 时取等号;不等式 ① 的右边可以这样理解:当 $a_i \to \frac{1}{n+1}(i = 1, 2,\cdots,n-1)$ 时,$a_n \to \frac{2}{n+1}$,从而得 $\sum_{i=1}^{n} a_i \to 1$.

实际上不等式 ① 为下面定理 1 的特例.

**定理 1** 设 $a_i \geqslant \alpha_i(i = 1,2,\cdots,n; n \geqslant 2), 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$, $a_1a_2\cdots a_n = A$(必有 $A \geqslant \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$),则

$n\sqrt[n]{A} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + \frac{A}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}$(当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt[n]{A}$ 时,第一个"$\leqslant$"中取等号;当且仅当 $a_i = \alpha_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 或($a_i = \alpha_i(i = 1, 2,\cdots,k-1), a_k > \alpha_k = a_{k+1} = \alpha_{k+1} = a_{k+2} = \alpha_{k+2} = \cdots = a_n = \alpha_n$)时第二个"$\leqslant$"中取等号) ②

**证明** 由平均值不等式立得 ② 左边的不等式成立,下面证明 ② 右边的不等式成立.

可设 $a_i = \alpha_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$,得

$$\begin{aligned} a_1a_2\cdots a_n &= (\alpha_1 + \varepsilon_1)(\alpha_2 + \varepsilon_2)\cdots(\alpha_n + \varepsilon_n) \geqslant \\ &\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n + (\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\alpha_2} \cdot \varepsilon_2 + \cdots + \\ &\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\alpha_n} \cdot \varepsilon_n) \end{aligned}$$

(当且仅当 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 中至少有 $n-1$ 个为 0 时取等号) $\geqslant$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n + (\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\varepsilon_1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\varepsilon_n) =$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)$$

所以 $a_1a_2\cdots a_n \geqslant \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}(\alpha_n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i)$(当且仅当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = 0$,或 $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_{k+1} = \cdots = \varepsilon_n = 0, \varepsilon_k \neq 0, \alpha_k = \alpha_n)$ 时取等号),即

$$\alpha_n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \leqslant \frac{A}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} \quad ③$$

所以 $\sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i + (\alpha_n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i + \frac{A}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}$(当且仅当 $a_i = \alpha_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 或 $a_i = \alpha_i(i = 1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$, $a_k > \alpha_k = \alpha_n$ 时取等号).

又 $\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$,从而可得 ② 右边的不等式成立.

**定理 2**　设 $a_i \geqslant \alpha_i(i = 1,2,\cdots,n; n \geqslant 2)$, $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$, $\sum_{i=1}^{n}a_i = B$(必有 $B \geqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$),则

$(B - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} \leqslant a_1a_2\cdots a_n \leqslant (\frac{B}{n})^n$(当且仅当 $a_i = \alpha_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 或 $a_i = \alpha_i(i = 1,2,\cdots,k-1)$, $a_k > \alpha_k = a_{k+1} = \alpha_{k+1} = a_{k+2} = \alpha_{k+2} = \cdots = a_n = \alpha_n$ 时第一个"$\leqslant$"中取等号;当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{B}{n}$ 时第二个"$\leqslant$"中取等号)　④

**证明**　由平均值不等式立得 ④ 右边的不等式成立,下面证明 ④ 左边的不等式也成立.

可设 $a_i = \alpha_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$,得式 ③ 也成立.

由 $B = \sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i + (\alpha_n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i)$,得

$$\alpha_n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = B - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

再由 ③ 得 ④ 左边的不等式也成立.

## 参考文献

[1] 赵岳云.构造二次方程证明不等式[J].数学通报,1998(8):17-18.
[2] 王文清.一个不等式的简证[J].数学通报,2000(12):21.
[3] 张在明.一个不等式的再证与推广[J].数学通报,2001(10):28.

# 权方和不等式的推广及其简证

**权方和不等式**[1] 设 $a_i,b_i,\alpha\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{\alpha+1}}{(\sum_{i=1}^{n}b_i)^{\alpha}}$（当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号）.

本文将给出其推广.

**推广** (1) 当 $\alpha>0$ 或 $\alpha<-1$ 时权方和不等式均成立；

(2) 当 $-1<\alpha<0$ 时，权方和不等式中的“$\geqslant$”改为“$\leqslant$”后仍成立（等号成立的条件相同）.

下面运用加权平均值不等式给出上述推广的简证.

**加权平均值不等式**[2] 若 $a_i\geqslant 0,\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号）.

（用 Jensen 不等式[2] 容易证得加权平均值不等式）

**推广的证明** (1) 当 $\alpha>0$ 时，对于任意的正数 $\lambda$，有

$$\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}+\alpha\cdot\lambda b_i\geqslant(1+\alpha)\left[\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\cdot(\lambda b_i)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}\text{（当且仅当}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}=\lambda b_i\text{，即}\frac{a_i}{b_i}=\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}\text{ 时取等号）}=(1+\alpha)a_i\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\geqslant(1+\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n}a_i-\alpha\lambda\sum_{i=1}^{n}b_i\text{（当且仅当}\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}\text{ 时取等号）}$$

令 $\lambda=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)^{\alpha+1}$，便得此时推广成立.

当 $\alpha<-1$ 时，对于任意的正数 $\lambda$，有

$$\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}-(\alpha+1)\cdot\lambda a_i\geqslant-\alpha\left[\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\cdot(\lambda a_i)^{-(\alpha+1)}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$（当且仅当$\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}=\lambda a_i$，即$\frac{a_i}{b_i}=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$时取等号）$=-\alpha b_i\lambda^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(i=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\geqslant(\alpha+1)\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i-\alpha\lambda^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}b_i$$（当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$时取等号）

令$\lambda=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)^{\alpha}$，便得此时推广成立.

(2) 当$-1<\alpha<0$时，对于任意的正数$\lambda$，有

$$(\alpha+1)\cdot a_i-\alpha\cdot\lambda b_i\geqslant a_i^{\alpha+1}\cdot(\lambda b_i)^{-\alpha}$$（当且仅当$a_i=\lambda b_i$，即$\frac{a_i}{b_i}=\lambda$时取等号）$=\frac{a_i^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha}b_i^{\alpha}}(i=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\leqslant(\alpha+1)\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}a_i-\alpha\lambda^{\alpha+1}\sum_{i=1}^{n}b_i$$（当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\lambda$时取等号）

令$\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}b_i}$，便得此时推广成立.

在推广中令$\alpha=m-1,a_i=x_i,b_i=a_i^{-\frac{1}{\alpha}}(i=1,2,\cdots,n)$，即得文献[3]的命题(将该命题中的$m$是有理数改为$m$是实数后所得结论也成立).

在推广中令$a_i=a'^{t}_i,b_i=b'^{t}_i,\alpha t=s$，得

**推广的等价形式** 设$a_i,b_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$，则

(1) 当$\frac{s}{t}>0$或$\frac{s}{t}<-1$时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{s+t}}{b_i^{s}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{t}\right)^{\frac{s}{t}+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{t}\right)^{\frac{s}{t}}}$（当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时取等号）;

(2) 当 $-1<\frac{s}{t}<0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{s+t}}{b_i^s}\leqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^t\right)^{\frac{s}{t}+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^t\right)^{\frac{s}{t}}}$（当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号）.

（在该结论中，令 $s=\alpha,t=1$ 又可得到“推广”）

以上推广必有重要应用，下面用此证明.

**猜想**[4] 已知 $\alpha,\beta$ 为锐角，$k\in\mathbf{R},k\neq-2,0$，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件是 $\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}=1$.

文献[5]已给出了该猜想的多种证明，但以下证明更简洁.

**定理1** 若 $\alpha,\beta$ 是锐角，则

(1) 当 $k>0$ 或 $k<-2$ 时，$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}\geqslant 1$（当且仅当 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时取等号）；

(2) 当 $-2<k<0$ 时，以上不等式反向.

**证明** (1) 由推广(1)，得

$$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}=\frac{(\sin^2\alpha)^{\frac{k}{2}+1}}{(\cos^2\beta)^{\frac{k}{2}}}+\frac{(\cos^2\alpha)^{\frac{k}{2}+1}}{(\sin^2\beta)^{\frac{k}{2}}}\geqslant$$

$$\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^{\frac{k}{2}+1}}{(\cos^2\beta+\sin^2\beta)^{\frac{k}{2}}}\text{（当且仅当}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta},$$

$$\text{即 }\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\text{ 时取等号）}=1$$

(2) 同理可证.

在定理1中令 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha',\beta=\frac{\pi}{2}-\beta'$ 还可得其他结论.

还可将文献[4]的结论1,2加强为：

**定理2** 若 $\alpha,\beta$ 为锐角，$k\geqslant 0$，则 $\alpha+\beta>(=,<)\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\sin^{k+2}\beta}{\cos^k\alpha}>(=,<)1$.

**证明**

$$\alpha+\beta>(=,<)\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sin\alpha>(=,<)\cos\beta\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin\alpha>(=,<)\cos\beta\\ \cos\alpha<(=,>)\sin\beta\end{cases}\text{（因为}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\beta+\cos^2\beta\text{）}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\sin^{k+2}\beta}{\cos^k\alpha}>(=,<)\frac{\cos^{k+2}\beta}{\cos^k\beta}+\frac{\sin^{k+2}\beta}{\sin^k\beta}=1$$

**定理 3** 若 $\alpha,\beta$ 为锐角,$k\geqslant 0$,则 $\alpha+\beta>(=,<)\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\beta}{\sin^k\alpha}<(=,>)1$.

在推广中令 $a_i=a'^{\alpha'+\beta'}_i$,$b_i=b'^{\alpha'+\beta'}_i$,$\alpha=-\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'}$,得推广的等价形式:

**定理 4** 设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

(1) 当 $\alpha\beta<0$ 且 $\alpha+\beta\neq 0$ 时,$\sum\limits_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^\beta\geqslant(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\sum\limits_{i=1}^n b_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$(当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号);

(2) 当 $\alpha\beta>0$ 时,以上不等式反向(等号成立的条件相同).

**幂平均不等式**[6] 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$,$\alpha<\beta$,则 $(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号).

我们用幂平均不等式及定理 4 来证明文献[7]中定理的部分结论:

**定理 5** 若 $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

(1) 当 $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta<1$ 时,$\sum\limits_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^\beta\leqslant n^{1-\alpha-\beta}(\sum\limits_{i=1}^n a_i)^\alpha(\sum\limits_{i=1}^n b_i)^\beta$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,$b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时取等号);

(2) 当 $\alpha<0,\beta<0$ 时,以上不等式反向(等号成立的条件相同).

(文献[5]中说 $\alpha+\beta\geqslant 1$ 时结论(2)也成立.)

**证明** (1) 由定理 4(2) 只需证明:

当 $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta<1$ 时,$(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\sum\limits_{i=1}^n b_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\leqslant n^{1-\alpha-\beta}(\sum\limits_{i=1}^n a_i)^\alpha(\sum\limits_{i=1}^n b_i)^\beta$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,$b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时取等号),即证

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\leqslant(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i)^\alpha(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i)^\beta$$

又只需证

$$0<(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\leqslant(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i)^\alpha\text{(当且仅当 }a_1=a_2=\cdots=a_n\text{ 时取等号)}$$

$0 < (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \leqslant (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i)^{\beta}$(当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时取等号)

这由幂平均不等式立得.

(2) 同(1) 可证.

## 参考文献

[1] 徐彦明.权方和不等式的应用[J].数学通讯,2003(3):37-38.

[2] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲(修订版)[M].北京:高等教育出版社,1983:134,149.

[3] 黎发兵.一类条件不等式的"根"[J].数学通讯,2002(15):36-37.

[4] 张荣萍.两角互余的几个等价条件[J].数学通讯,2002(11):17-18.

[5] 万家练.一个猜想的几种证明[J].数学通讯,2002(21):14-16.

[6] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:84.

[7] 杨寅.一个猜想的推广[J].数学通报,2002(11):37.

# 对三个猜想的研究

本文将解决《湖南数学通讯》1995 年第 1 期中的三个猜想.

**猜想 1**[2] 已知 $a_i \in (0,1), b_i \in (0,+\infty), i=1,2,\cdots,n; n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2$,证明或否定 $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{1-a_i^n} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}$.

取 $n=2, a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{3}, b_1=\frac{1}{20}, b_2=\frac{1}{10}$,得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{1-a_i^n} = \frac{\frac{1}{20}}{1-(\frac{1}{2})^2} + \frac{\frac{1}{10}}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{215}{1\,200}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\frac{1}{20}+\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{126}{1\,200}$$

所以此时 $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{1-a_i^n} < \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}$,即否定了猜想 1.

对于任意的 $n \geqslant 2$,均可找到猜想 1 的反例.

在猜想 1 的条件下,总可选字母,使

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} & ① \\ \prod_{i=1}^{n} a_i > a_n^n & ② \\ \frac{b_n}{b_1} > \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-a_i^n} - \frac{n-1}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}}{\frac{1}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i} - \frac{1}{1-a_n^n}} & ③ \end{cases}$$

由②,得

$$\frac{1}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}-\frac{1}{1-a_n^n}>0$$

又由③,得

$$b_n\left(\frac{1}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}-\frac{1}{1-a_n^n}\right)>b_1\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-a_i^n}-\frac{n-1}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)$$

$$b_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-a_i^n}+\frac{b_n}{1-a_n^n}<\frac{(n-1)b_1}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}+\frac{b_n}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

又由①,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1-a_i^n}<\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{1-\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

由文献[1]的推广1知,猜想1在 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时成立;由《数学通报》1994年第7期的数学问题904知,猜想1在 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时也成立.

**猜想 2**[2] 已知 $a_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n;n\in \mathbf{N}^*,n\geqslant 4$,证明或否定

$$f(n)=\frac{a_1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}+\cdots+a_1+1}+$$

$$\frac{a_2}{a_2a_3\cdots a_n+a_2a_3\cdots a_{n-1}+\cdots+a_2+1}+\cdots+$$

$$\frac{a_n}{a_na_1\cdots a_{n-2}+a_na_1\cdots a_{n-3}+\cdots+a_n+1}\leqslant 1$$

**定理 1** 若$\sqrt{2}-1<a<1,n\in \mathbf{N}^*,n\geqslant 4$,则$\frac{na}{1+a+\cdots+a^{n-1}}>1$.

**证明** 由 $a>\sqrt{2}-1$,得

$$a^2+2a-1>0$$

又 $a<1$,所以

$$(a-1)(a^2+2a-1)<0$$

即

$$\frac{1-a^4}{1-a}<4a$$

又 $a<1$,所以

$$\frac{1-a^4}{4}<a(1-a) \qquad ④$$

由 $a<1$,得

$$na^n < 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

$$na^n(1 - a) < 1 - a^n$$

$$n(1 - a^{n+1}) < (n + 1)(1 - a^n)$$

$$\frac{1 - a^{n+1}}{n + 1} < \frac{1 - a^n}{n}$$

所以 $n \geqslant 4$ 时，$\frac{1 - a^n}{n} \leqslant \frac{1 - a^4}{4}$.

又由 ④，得当 $n \geqslant 4$ 时，$\frac{1 - a^n}{n} < a(1 - a)$，所以 $\frac{na}{\frac{1 - a^n}{1 - a}} > 1$，即 $\frac{na}{1 + a + \cdots + a^{n-1}} > 1$.

由定理1知，猜想2在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$，$\sqrt{2} - 1 < a < 1$ 时，均不成立.

**定理2** 若 $a \geqslant 1, n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3$，则 $\frac{na}{1 + a + \cdots + a^{n-1}} \leqslant 1$(当且仅当 $a = 1$ 时取等号).

**证明** $(a^{n-1} + \cdots + a^3 + a^2 + a + 1) - na = (a^{n-1} - a) + \cdots + (a^3 - a) + (a^2 - 2a + 1) \geqslant 0$(当且仅当 $a = 1$ 时取等号)，所以

$$\frac{na}{1 + a + \cdots + a^{n-1}} \leqslant 1 \text{(当且仅当 } a = 1 \text{ 时取等号)}$$

由定理2知，猜想2在 $a_1 = \cdots = a_n = a \geqslant 1$ 时成立，因此笔者提出

**猜想 Ⅰ** 猜想2在 $a_i \geqslant 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时成立.

关于猜想 Ⅰ，笔者得到

**定理3** 若 $a^{n-1} - na + n - 1 \geqslant 0, a_i \geqslant a > 1 (i = 1, 2, \cdots, n; n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3)$，则 $f(n) < 1$($f(n)$ 的意义见猜想2).

**证明** 由 $a^{n-1} - na + n - 1 \geqslant 0, a > 1$，可得

$$\frac{na - n}{a^{n-1} - 1} \leqslant 1$$

$$f(n) = \frac{1}{a_2 \cdots a_{n-1} + a_2 \cdots a_{n-2} + \cdots + a_2 + 1 + \frac{1}{a_1}} + \frac{1}{a_3 \cdots a_n + a_3 \cdots a_{n-1} + \cdots + a_3 + 1 + \frac{1}{a_2}} + \cdots + \frac{1}{a_1 \cdots a_{n-2} + a_1 \cdots a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1 + \frac{1}{a_n}} <$$

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_1a_2\cdots a_{n-3}+\cdots+a_1+1}+$$
$$\frac{1}{a_2a_3\cdots a_{n-1}+a_2a_3\cdots a_{n-2}+\cdots+a_2+1}+\cdots+$$
$$\frac{1}{a_na_1\cdots a_{n-3}+a_na_1\cdots a_{n-4}+\cdots+a_n+1}\leqslant$$
$$\frac{n}{a^{n-2}+\cdots+a+1}=\frac{na-n}{a^{n-1}-1}\leqslant 1$$

所以定理 3 成立.

**推论 1** 若 $a^{n-1}-na+n-1\geqslant 0, a_i\geqslant a>1(i=1,2,\cdots,m;m\geqslant n)$，则 $f(m)<1$.

**证明** 由 $a>1, m\geqslant n$，得

$$(a^{m-1}-ma+m-1)-(a^{n-1}-na+n-1)=$$
$$a^{n-1}(a^{m-n}-1)-(m-n)(a-1)=$$
$$(a-1)[a^{n-1}(a^{m-n-1}+\cdots+a+1)-(m-n)]>0$$
$$a^{m-1}-ma+m-1>a^{n-1}-na+n-1\geqslant 0$$
$$a^{m-1}-ma+m-1>0$$

再由定理 3，得 $f(m)<1$.

**推论 2** 若 $n\geqslant 4, a_i\geqslant\frac{\sqrt{13}-1}{2}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $f(n)<1$.

**证明** 当 $a\geqslant\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ 时，$a^3-4a+3\geqslant 0$.

又 $n\geqslant 4$，由推论 1，得 $f(n)\leqslant 1$.

**猜想 3**[3] 记 $R_m(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^mC_n^k(m,n\in\mathbf{N}^*)$，则

(1)$n(n+1)\mid R_{2m}(n)$；

(2)$n^2\mid R_{2m+1}(n)$.

本文将证得猜想 3 成立.

**定理 4** 若 $m,n,\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2$，则 $n(n+1)\mid R_{2m}(n)$.

**证明** $R_{2m-1}(n)-R_{2m-1}(n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2m-1}C_n^k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^{2m-1}C_{n-1}^k=$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m-1}(C_n^k-C_{n-1}^k)+n^{2m-1}=$$
$$n^{2m-1}+\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1}=(n^{2m-1}+1)+$$
$$\sum_{k=2}^{n-1}k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1}$$

下证
$$n+1 \mid \sum_{k=2}^{n-1} k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1} \qquad ⑤$$

当 $n$ 是偶数时,设 $n=2t$,得

$$\sum_{k=2}^{n-1} k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1} = \sum_{k=2}^{2t-1} k^{2m-1}C_{2t-1}^{k-1} =$$
$$2^{2m-1}C_{2t-1}^{1}+\cdots+t^{2m-1}C_{2t-1}^{t-1}+(t+1)^{2m-1}C_{2t-1}^{t}+\cdots+$$
$$(2t-1)^{2m-1}C_{2t-1}^{2t-2}=$$
$$[2^{2m-1}+(2t-1)^{2m-1}]C_{2t-1}^{1}+\cdots+[t^{2m-1}+$$
$$(t+1)^{2m-1}]C_{2t-1}^{t-1}=$$
$$(2t+1)A_1+\cdots+(2t+1)A_{t-1}$$

所以
$$2t+1 \mid \sum_{k=2}^{n-1} k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1}$$

即 $n$ 为偶数时,⑤ 成立.

当 $n$ 是奇数时,设 $n=2t+1(t\in \mathbf{N}^*)$.

$$\sum_{k=2}^{n-1} k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1} = \sum_{k=2}^{2t} k^{2m-1}C_{2t}^{k-1} =$$
$$2^{2m-1}C_{2t}^{1}+\cdots+t^{2m-1}C_{2t}^{t-1}+(t+1)^{2m-1}C_{2t}^{t}+$$
$$(t+2)^{2m-1}C_{2t}^{t+1}+\cdots+(2t)^{2m-1}C_{2t}^{2t-1}=$$
$$[2^{2m-1}+(2t)^{2m-1}]C_{2t}^{1}+\cdots+[t^{2m-1}+(t+2)^{2m-1}]C_{2t}^{t-1}+$$
$$(t+1)^{2m-1}C_{2t}^{t}=$$
$$(2t+2)A+2(t+1)\cdot(t+1)^{2m-2}C_{2t-1}^{t}$$

所以
$$2t+2 \mid \sum_{k=2}^{n-1} k^{2m-1}C_{n-1}^{k-1}$$

即 $n$ 为奇数时,⑤ 成立,所以

$$n+1 \mid R_{2m-1}(n)-R_{2m-1}(n-1) \qquad ⑥$$

又由文献[3],得

$$R_{m+1}(n)=n[R_m(n)-R_m(n-1)] \qquad ⑦$$

所以
$$R_{2m}(n)=n[R_{2m-1}(n)-R_{2m-1}(n-1)]$$

再由 ⑥,得

$$n(n+1) \mid R_{2m}(n)$$

**定理 5** 若 $m,n\in \mathbf{N}^*$,$n\geqslant 3$,则 $n^2 \mid R_{2m+1}(n)$.

**证明** 由定理4,得 $n\geqslant 2$时,$n+1 \mid R_{2m}(n)$,所以 $n\geqslant 3$时,$n \mid R_{2m}(n-1)$.又由 ⑦ 知,$n \mid R_{2m}(n)$,所以 $n\geqslant 3$ 时,$n \mid R_{2m}(n)-R_{2m}(n-1)$.再由 ⑦ 知,$R_{2m+1}(n)=n[R_{2m}(n)-R_{2m}(n-1)]$,所以 $n\geqslant 3$ 时,$n^2 \mid$

$R_{2m+1}(n)$.

以上整除,均指数的整除.

由式⑦,易证

**定理 6** 若 $m \in \mathbf{N}^*$, $m \geqslant 2$,则 $R_m(n) = n \cdot 2^{n-m} P_m(n)$.其中 $P_m(n)$ 是关于 $n$ 的 $m-1$ 次整系数多项式.

**猜想 Ⅱ** (1) $n(n+1) \mid \dfrac{R_{2m}(n)}{2^{n-2m}}$;

(2) $n^2 \mid \dfrac{R_{2m+1}(n)}{2^{n-2m-1}}$

(这里的整除均指多项式的整除)

## 参考文献

[1] 安振平.一道高考题的别证及引申[J].湖南数学通讯,1995(1):13-14.

[2] 安振平.一个代数不等式[J].湖南数学通讯,1995(1):41.

[3] 王云葵.等幂迭乘和 $\sum_{k=1}^{n} k^m C_n^k$ 的简捷算法[J].湖南数学通讯,1995(1):25-26.

# 不要冷落了“简化”

简化也叫做化简,就是化繁为简,是一种常用的解题方法,有时很有效.请看简化在不等式中的作用.

文献[1]证明了如下不等式:

设 $a>0,\lambda>0,0\leqslant x\leqslant\lambda\leqslant a,n=2,3$,则$\sqrt[n]{a^n-x^n}\geqslant a-\frac{1}{\lambda}[a-\sqrt[n]{a^n-\lambda^n}]x$(当且仅当 $x=0$ 或 $\lambda$ 时取等号).

文献[1]末猜想:当 $n\geqslant 4,n\in\mathbf{N}$时,时以上结论也成立.

文献[2]用导数的方法证明了上述猜想及以下推广(但文献[2]左栏最后一行中的“$\lambda<a$”应改为“$\lambda\leqslant a$”,右栏第二行中的“$x$”应改为“$\lambda$”):

**定理 1**[2] 设 $a>0,\lambda>0,\alpha>1,0\leqslant x\leqslant\lambda\leqslant a$,则$(a^\alpha-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant a-\frac{1}{\lambda}[a-(a^\alpha-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]x$(当且仅当 $x=0$ 或 $\lambda$ 时取等号).

下面从简化定理 1 入手,来给出其证明.

容易验证 $x=0$ 或 $\lambda$ 时定理 1 成立,所以只需证

**定理 1′** 设 $\alpha>1,0<x<\lambda\leqslant a$,则$(a^\alpha-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{\lambda}[a-(a^\alpha-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]x>a$.

设$(a^\alpha-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=y$,得 $y>0,x=(a^\alpha-y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$,所以定理 1′ 等价于

**定理 1″** 设 $\alpha>1,0\leqslant(a^\alpha-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}<y<a$,则

$$\frac{a^\alpha-y^\alpha}{(a-y)^\alpha}>\left[\frac{\lambda}{a-(a^\alpha-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^\alpha$$

记 $f(y)=\frac{a^\alpha-y^\alpha}{(a-y)^\alpha}(0<y<a)$,下证:

当 $\alpha>1$ 时,$f(y)$ 是增函数.

进而由 $y>(a^\alpha-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 可得定理 1″ 成立.

因为$f(y)=(\frac{y}{a-y}+1)^\alpha-(\frac{y}{a-y})^\alpha$,又 $g(y)=\frac{y}{a-y}=\frac{1}{\frac{a}{y}-1}(y<a)$是增函数,且 $g(y)>0$,所以要证当 $\alpha>1$ 时,$f(y)$ 是增函数,只需证当 $\alpha>1$

时，$h(x)=(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}(x\in\mathbf{R}^{+})$是增函数，运用导数极易证出($\alpha\in\mathbf{N}$且$\alpha>1$时，由二项式定理易知$h(x)$是增函数，所以可用初等方法解决文献[1]的猜想).

还可用导数的方法证得当$0<\alpha<1$时，$h(x)$是$\mathbf{R}^{+}$上的减函数，所以当$0<\alpha<1$时，$h(g(y))=f(y)$是减函数.从而可得

**定理2** 设$0<\alpha<1,0<x<\lambda\leqslant a$，则

$$(a^{\alpha}-x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\lambda}[a-(a^{\alpha}-\lambda^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}]x<a$$

**注** 由以上证明可知，定理1′,2中最后的“$a$”是最佳的.在定理1′中，当$\alpha<0$时，由$x<a$，得$a^{\alpha}-x^{2}<0$，所以此时无需推广定理1′.

看起来很复杂的定理1′，通过将其简化，我们看到了其实质就是：当$\alpha>1$时，$h(g(y))=f(y)$是增函数，所以，我们在解题时，不要冷落了简化的方法.简化不仅可以化复杂为简单，有时还可看清事物的本质.

**问题** 能否用初等方法证明$h(x)=(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}(x\in\mathbf{R}^{+})$在$\alpha>1$时是增函数；在$0<\alpha<1$时是减函数.

## 参考文献

[1] 叶军.一类含根式的新不等式及应用[J].数学通报,2001(1):36,11.
[2] 樊益武,万家练.一个不等式猜想的证明[J].数学通报,2001(9):46.

# 对两个猜想的否定及研究

文献[1]末提出了以下两个猜想：

**猜想 1**[1] 已知 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$，证明或否定

$$\sqrt{\frac{a}{3+b}}+\sqrt{\frac{b}{3+a}}\leqslant 1 \quad ①$$

$$\sqrt{\frac{a}{1+3b}}+\sqrt{\frac{b}{1+3a}}\geqslant 1 \quad ②$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{1+7b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{1+7a}}\geqslant 1 \quad ③$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{7+b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{7+a}}\leqslant 1 \quad ④$$

**猜想 2**[1] 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$，$xyz=1$，证明或否定

$$\frac{1}{\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{\sqrt{1+3y}}+\frac{1}{\sqrt{1+3z}}\geqslant\frac{3}{2} \quad ⑤$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+7x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7z}}\geqslant\frac{3}{2} \quad ⑥$$

本文将否定以上六个不等式.

很容易理解不等式 ① ~ ④ 中关于 $a,b$ 的式子均 $\to+\infty$（当 $\frac{a}{b}\to+\infty$ 或 $\frac{b}{a}\to+\infty$ 时）；也均 $\to 0$（当 $a\to 0$ 且 $b\to 0$ 时），因而 ① ~ ④ 均不成立.还可举出具体的反例.

① 的反例：$a=\frac{5}{4}$，$b=2$；

② 的反例：$a=\frac{5}{8}$，$b=\frac{1}{2}$；

③ 的反例：$a=\frac{9}{16}$，$b=\frac{1}{2}$；

④ 的反例：$a=\frac{9}{8}$，$b=2$.

不等式⑤，⑥中关于 $x,y,z$ 的式子均可 $\to 1$（当 $x\to+\infty$，$y\to+\infty$ 时，$z=\frac{1}{xy}\to 0$），所以 ⑤，⑥ 均不成立.也很容易举出具体的反例.

⑤ 的反例:$x=y=8, z=\frac{1}{64}$;

⑥ 的反例:$x=y=9, z=\frac{1}{81}$.

不等式 ⑤,⑥ 中关于 $x, y, z$ 的式子均可 $\to 2$(当 $x\to 0, y\to 0$ 时,$z=\frac{1}{xy}\to+\infty$).因而,笔者对 ⑤,⑥ 重新提出

**猜想 1** 若 $x, y, z\in \mathbf{R}^{+}, xyz=1$,则

$$1\leqslant \frac{1}{\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{\sqrt{1+3y}}+\frac{1}{\sqrt{1+3z}}\leqslant 2 \quad ⑦$$

$$1\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+7x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7z}}\leqslant 2 \quad ⑧$$

(⑦,⑧ 中的等号能否取到,也应研究).

文献[1] 的例 1 证明了 IMO42 第 2 题,该题等价于:

若 $x, y, z\in \mathbf{R}^{+}, xyz=1$,则$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geqslant 1$(当且仅当 $x=y=z=1$ 时取等号).

文献[1]的例4:若 $x, y, z\in \mathbf{R}^{+}, xyz=1$,则$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

**猜想 2** 若 $x, y, z\in \mathbf{R}^{+}, xyz=1$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\leqslant 2 \quad ⑨$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\geqslant 1 \quad ⑩$$

**猜想 3** 若 $x, y, z\in \mathbf{R}^{+}, xyz=1, n\in \mathbf{N}^{*}, n\geqslant 2, a>0$,则

$$1\leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{1+ax}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+ay}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+az}}\leqslant \max\{2, \frac{3}{\sqrt[n]{1+a}}\} \quad ⑪$$

## 参考文献

[1] 安振平,千海军.由一道竞赛题引发的思考[J].中学数学教学参考,2001(12):17-18.

# 一种去掉绝对值符号的方法

对于绝对值不等式问题(比如解绝对值不等式),往往需要先去掉绝对值符号,一般采用分类讨论的方法去掉绝对值符号,而这是比较复杂的.本文介绍一种去掉绝对值符号的方法,用这种方法可以一次去掉所有的绝对值符号.

我们知道,设 $a \in \mathbf{R}$(下同),有 $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$,所以

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a \\ -x \leqslant a \end{cases} \qquad ①$$

同理,有

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a,\text{或} -x \geqslant a \qquad ②$$

本文的一次性去掉绝对值符号的方法,就是结论①,②的推广.

**定理 1** $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant a \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (\pm x_i) \leqslant a$(+,-任意选取,共 $2^n$ 种取法,这 $2^n$ 个不等式同时成立).

**证明** 对 $n$ 用数学归纳法.由①知 $n=1$ 时成立.

假设 $n$ 时成立,得

$$\sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = a \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant a - |x_{n+1}| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\pm x_i) \leqslant a - |x_{n+1}|$$
(+,-任意选取,共 $2^n$ 种取法,这 $2^n$ 个不等式同时成立)

又由 $n=1$ 时成立,得

$$\sum_{i=1}^{n+1} |x_i| \leqslant a \Leftrightarrow \pm x_{n+1} \leqslant a - \sum_{i=1}^{n} (\pm x_i) \leqslant$$
(+,-任意选取,共 $2^{n+1}$ 种取法,这 $2^{n+1}$ 个不等式同时成立)

从而可得 $n+1$ 时成立.定理 1 成立.

**定理 2** $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant a \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (\pm x_i) \geqslant a$(+,-任意选取,共 $2^n$ 种取法,这 $2^n$ 个不等式之一成立).

**证明** 可仿定理 1 进行证明.

**定理 3** $\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i| - \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| \leqslant a \Leftrightarrow$ 下面 $2^m$ 组式子同时成立(每一组式子

包括 $2^n$ 个不等式,这 $2^n$ 个不等式之间是“或者”的关系),每个式子均形如

$$\sum_{i=1}^{m}(\pm x_i)-\sum_{i=1}^{n}(\pm y_i)\leqslant a(+,-\text{ 任意选取,共 }2^{m+n}\text{ 种取法})\qquad ③$$

每一组式子的不等式左边前 $m$ 个 +, - 一致(是③左边前 $m$ 个 +, - 的 $2^m$ 种选法中的一种),后 $n$ 个 +, - 号不一致(是③左边后 $n$ 个 +, - 的 $2^n$ 种选法).

**证明** 可先用定理 1 及结论②证得 $n=1$ 时成立,然后可对 $n$ 用数学归纳法证得定理 3 成立.

**定理 4** $\sum_{i=1}^{m}|x_i|-\sum_{i=1}^{n}|y_i|\geqslant a\Leftrightarrow$ 下面 $2^m$ 组式子之一成立(每一组式子包括 $2^n$ 个不等式,这 $2^n$ 个不等式之间是“并且”的关系),每个式子均形如

$$\sum_{i=1}^{m}(\pm x_i)-\sum_{i=1}^{n}(\pm y_i)\geqslant a(+,-\text{ 任意选取,共 }2^{m+n}\text{ 种取法})\qquad ④$$

每一组式子的不等式左边前 $m$ 个 +, - 一致(是④左边前 $m$ 个 +, - 的 $2^m$ 种选法中的一种),后 $n$ 个 +、- 不一致(是④左边后 $n$ 个 +, - 的 $2^n$ 种选法).

**证明** 可仿定理 3 进行证明.

由本文定理 1,2 中 $n=2$ 的情形可得文献[1]的定理 1,2 成立,但文献[1]的结论尚未把绝对值符号全部去掉.容易看出,将本文定理中的所有等号都去掉,得到的严格不等式均成立.

**例 1** 解不等式:$|x-2|-|x+3|\geqslant 1$.

**解** 由定理 4,可得原不等式为

$$\begin{cases}(x-2)-(x+3)\geqslant 1\\(x-2)+(x+3)\geqslant 1\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}-(x-2)-(x+3)\geqslant 1\\-(x-2)+(x+3)\geqslant 1\end{cases}$$

得

$$x\leqslant -1$$

所以原不等式的解集是 $(-\infty,-1]$.

**例 2** 解不等式:$|x+5|+|3x-1|\geqslant 2|x+7|$.

**解** 原不等式 $\Leftrightarrow |x+5|+|3x-1|-|2x+14|\geqslant 0$,由定理 4,可得原不等式为

$$\begin{cases}(x+5)+(3x-1)-(2x+14)\geqslant 0\\(x+5)+(3x-1)+(2x+14)\geqslant 0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}(x+5)-(3x-1)-(2x+14)\geqslant 0\\(x+5)-(3x-1)+(2x+14)\geqslant 0\end{cases}$$

或
$$\begin{cases} -(x+5)+(3x-1)-(2x+14)\geqslant 0 \\ -(x+5)+(3x-1)+(2x+14)\geqslant 0 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} -(x+5)-(3x-1)-(2x+14)\geqslant 0 \\ -(x+5)-(3x-1)+(2x+14)\geqslant 0 \end{cases}$$

得 $x\geqslant 5$,或 $x\leqslant -2$,或 $x\leqslant -3$,即 $x\geqslant 5$,或 $x\leqslant -2$,所以原不等式的解集为 $(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$.

本文的例题选自文献[1]的例题,答案当然一致.

# 参考文献

[1] 肖振纲.关于绝对值不等式的几个同解定理[J].数学通讯,1993(7):14-16.

# 两个不等式的推广

文献[1]给出了八个不等式，其中的不等式(6)为：

若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，$p\in\mathbf{N}^*$，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(p+x_i)\geqslant(p+1)^n$$

本文将证得该不等式在 $p\in\mathbf{R}^+$ 时也成立.

文献[1]的不等式(8)为：

若 $x,y,m,p\in\mathbf{R}^+$，则

$$\left(m+\frac{p}{x}\right)\left(m+\frac{p}{y}\right)\geqslant\left(m+\frac{2p}{x+y}\right)^2$$

本文将对该不等式作高维推广：

若 $x_1,x_2,\cdots,x_n,m,p\in\mathbf{R}^+$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(m+\frac{p}{x_i}\right)\geqslant\left(m+\frac{np}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)^n \qquad ①$$

**定理**　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n,m\in\mathbf{R}^+$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(m+x_i)\geqslant(m+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^n$$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号）

**证明**　即证

$$m^n+(\sum x_1)m^{n-1}+(\sum x_1x_2)m^{n-2}+\cdots+(\sum x_1x_2\cdots x_{n-1})m+x_1x_2\cdots x_n\geqslant m^n+[\mathrm{C}_n^1(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})]m^{n-1}+[\mathrm{C}_n^2(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^2]m^{n-2}+\cdots+[\mathrm{C}_n^{n-1}(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^{n-1}]m+\mathrm{C}_n^n(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^n$$

因为 $m\in\mathbf{R}^+$，所以只需证

$$\sum x_1x_2\cdots x_j\geqslant\mathrm{C}_n^j(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^j\ (j=1,2,\cdots,n)$$

下面用均值不等式来证

$$\sum x_1x_2\cdots x_j\geqslant\mathrm{C}_n^j\cdot\sqrt[\mathrm{C}_n^j]{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{j\mathrm{C}_n^j}{n}}}=\mathrm{C}_n^j(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^j\ (j=1,2,\cdots,n)$$

从而可得定理成立.

在定理中,令 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 得到的结论即文献[1]的不等式(6)在 $p\in\mathbf{R}^+$ 时也成立.

**推论** 若 $y_1,y_2,\cdots,y_n,m\in\mathbf{R}^+$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(m+\frac{1}{y_i}\right)\geqslant\left(m+\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}\right)^n\text{(当且仅当 }y_1=y_2=\cdots=y_n\text{ 时取等号)}$$

**证明** 在定理中令 $x_i=\frac{1}{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$,得 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}^+$,且

$$\prod_{i=1}^{n}\left(m+\frac{1}{y_i}\right)\geqslant\left(m+\frac{1}{\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}}\right)^n\geqslant\left(m+\frac{1}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}}\right)^n=\left(m+\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}\right)^n.$$

从而可得推论成立.

在推论中,又令 $y_i=\frac{x_i}{p}(i=1,2,\cdots,n)$,$x_i,p\in\mathbf{R}^+$,即得上述不等式①成立.

## 参考文献

[1] 曹大方.条件最值(不等式)问题的一种解(证)法[J].数学通讯,2000(15):20-22.

# 不等式$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$的六种证法

**题目** 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+,a+b=1$,求证:$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$.

**证法 1** 即证 $(ab)^2+(a^2+b^2)-\frac{25}{4}ab+1\geqslant 0$

$$(ab)^2-\frac{33}{4}ab+2\geqslant 0$$

$$(ab-\frac{1}{4})(ab-8)\geqslant 0$$

只需证明 $$ab\leqslant\frac{1}{4}$$

这由 $a+b=1\geqslant 2\sqrt{ab}$ 可得.

**证法 2** 由$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$,得

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant ab+\frac{1}{ab}+2$$

所以只需证明 $ab+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{17}{4}$.

由证法 1 末可得 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$,再由函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在$(0,1]$上是减函数立得.

**证法 3** $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=ab+\frac{1}{ab}+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=ab+\frac{2}{ab}-2$

又可证$f(x)=x+\frac{2}{x}$在$(0,\sqrt{2}]$上是减函数及$0<ab\leqslant\frac{1}{4}$,从而可得欲证.

**证法 4** 
$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=(ab+\frac{1}{ab})+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant$$
$$[(\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab})^2+2]+2\geqslant$$
$$(2-\frac{1}{2})^2+4=\frac{25}{4}$$

**证法 5** 
$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{a^2b^2+(a^2+b^2)+1}{ab}\geqslant$$
$$\frac{(ab)^2+2ab+1}{ab}=(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}})^2$$

又可证 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在(0,1]上是减函数及 $0<\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant\frac{5}{2}$,从而可得欲证.

**证法 6** $a+\frac{1}{a}=a+4\times\frac{1}{4a}\geqslant5\sqrt[5]{a(\frac{1}{4a})^4}=5\times2^{-\frac{8}{5}}a^{-\frac{3}{5}}$
同理有

$$b+\frac{1}{b}\geqslant5\times2^{-\frac{8}{5}}b^{-\frac{3}{5}}$$

所以

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant25\times2^{-\frac{16}{5}}(\frac{1}{ab})^{\frac{3}{5}}$$

可得 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$,从而可得要证结论成立.

由证法 5,6 还可得

**推广** 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则
$\prod_{i=1}^{n}(a_i+\frac{1}{a_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取等号)

# 简解两道不等式题

**题1**　(第七届(1978年)美国中学生数学竞赛(USAMO))已知实数 $a,b,c,d,e$ 满足 $\begin{cases}a+b+c+d+e=8\\a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16\end{cases}$,求 $e$ 的最大值.

文献[1],[2]均给出了该题的解法及推广,本文再给出该题的一个简解.

$$16-e^2=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+d)^2}{2}\geqslant$$

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4}=\frac{(8-e)^2}{4}$$

$$64-4e^2\geqslant e^2-16e+64$$

$$5e^2-16e\leqslant 0$$

$$0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$$

所以 $e$ 的最大值是$\frac{16}{5}$.

**题2**　设关于 $x$ 的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为 $A$,已知 $3\in A$ 且 $5\notin A$,求实数 $a$ 的取值范围.

这道题的通常解法是:$3\in A$ 且 $5\notin A$ 等价于

$$\begin{cases}\dfrac{3a-5}{9-a}<0\\\dfrac{5a-5}{25-a}\geqslant 0\text{ 或}\dfrac{5a-5}{25-a}\text{无意义}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{3a-5}{9-a}<0\\\dfrac{5a-5}{25-a}\geqslant 0\text{ 或 }25-a=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(3a-5)(9-a)<0\\(5a-5)(25-a)\geqslant 0\end{cases}$$

$$1\leqslant a<\frac{5}{3}\text{ 或 }9<a\leqslant 25$$

所以所求实数 $a$ 的取值范围是$\left[1,\frac{5}{3}\right)\cup(9,25]$.

下面给出这种问题的简洁解法.

**解** “关于 $x$ 的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为 $A$”即“关于 $x$ 的不等式$(ax-5)(x^2-a)<0$的解集为 $A$”,所以“$3\in A$ 且 $5\notin A$”即

$$\begin{cases}(3a-5)(9-a)<0\\(5a-5)(25-a)\geqslant 0\end{cases}$$

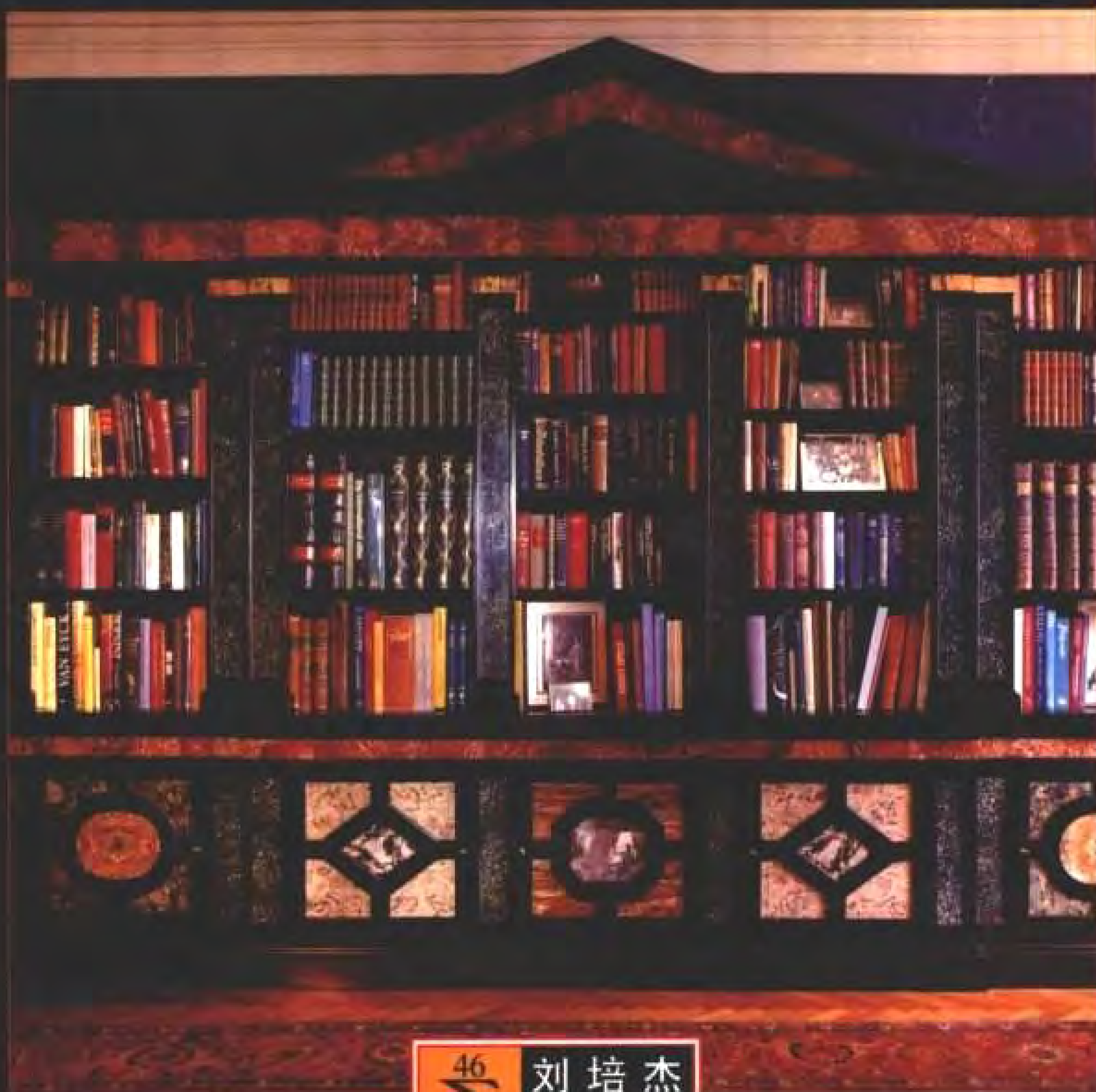
$$1\leqslant a<\frac{5}{3}\text{ 或 }9<a\leqslant 25$$

所以所求实数 $a$ 的取值范围是$\left[1,\frac{5}{3}\right)\cup(9,25]$.

## 参考文献

[1] 刘培杰.一道 USAMO 试题的推广与变形[J].数学通讯,1995(4):35-39.

[2] 甘志国.初等数学研究(I)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008:599-602.



刘培杰
数学工作室


哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn



ISBN 978-7-5603-2820-1